

**A. HALANAY**

**TEORIA  
CALITATIVĂ  
A  
ECUAȚIILOR  
DIFERENȚIALE**

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

A. HALANAY

TEORIA CALITATIVĂ  
A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE  
STABILITATEA DUPĂ LIAPUNOV. OSCILAȚII.  
SISTEME CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE  
1963

**Coperta de : *Stoian Eugen***

## P R E F A Ț Ă

*Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale cunoaște în ultima vreme o dezvoltare constatată prin numărul mare de cărți și lucrări originale care-i sînt dedicate. Se știe că începuturile teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale sînt nemijlocit legate în lucrările lui Poincaré, Liapunov, Birkhoff, de probleme clasice ale mecanicii și mecanicii cerești. Așa au apărut și teoria stabilității și teoria matematică a oscilațiilor cu metoda parametrului mic și teoria generală a sistemelor dinamice. Perioada de mare avînt, din jurul anului 1930, a teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale în Uniunea Sovietică a pornit pe de o parte de la reluarea, la Institutul de aviație din Kazan, a problemelor teoriei stabilității cu aplicație la studiul stabilității avionului, iar, pe de altă parte, la Moscova, datorită observației lui A. A. Andronov asupra utilității aparatului matematic al teoriei soluțiilor periodice ale ecuațiilor neliniare pentru explicarea unor fenomene ale radiotehnicii. Este perioada fixată de exemplu de celebra carte de teoria oscilațiilor a lui A. A. Andronov, Haikin și Witt la care se adaugă la fel de cunoscuta carte de „mecanică neliniară” a lui Krîlov și Bogoliubov.*

*Începînd din 1930, la Universitatea din Moscova funcționează seminarul de teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, orientat în special spre problemele teoretice fundamentale. Bilanțul activității seminarului în prima perioadă este fixat în cele două ediții ale monografiei lui V. V. Nemîțki și V. V. Stepanov „Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale” a căror circulație largă a și dat denumirea acestei direcții de cercetare.*

*În ultimii 10—15 ani, atît teoria stabilității, cît și teoria soluțiilor periodice (la care se adaugă problema soluțiilor aproape-periodice), au primit un nou impuls prin faptul că ele reprezintă o parte din aparatul matematic al teoriei reglării automate.*

*Caracteristic pentru dezvoltarea teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale este faptul că, pentru rezolvarea problemelor ei, se folosește un aparat matematic tot mai variat: topologia și analiza funcțională, algebră liniară și teoria funcțiilor de o variabilă complexă.*



*Ținînd seama de marea varietate a problemelor, alegerea materialului pentru o carte dedicată teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale este o problemă grea. În această monografie autorul a fost călăuzit de ideea unei expuneri sistematice, încheiate, a teoriei stabilității (bazată în primul rînd pe metoda funcției lui Liapunov) și a teoriei oscilațiilor, inclusiv teoria sistemelor cu parametru mic. În această expunere accentul a fost pus tocmai pe teoremele generale, pe acea dezvoltare a teoriei care clarifică ideile și metodele. A fost introdus un capitol relativ la teoria stabilității sistemelor de reglare, în care accentul cade de asemenea pe cele mai generale teoreme obținute în această direcție, în particular pe prezentarea contribuției esențiale adusă aici de V. M. Popov, membru corespondent al Acad. R.P.R. Ultimul capitol reia problemele teoriei stabilității și teoriei oscilațiilor în cadrul sistemelor cu întârziere, care în ultima vreme ocupă un loc din ce în ce mai mare atît în preocupările matematicienilor cît și ale celor ce lucrează în domeniul aplicațiilor. În întreaga lucrare au fost cuprinse o serie de rezultate obținute la noi în țară; în particular, ultimul capitol reprezintă o expunere sistematică și perfecționată a rezultatelor autorului în teoria sistemelor cu întârziere.*

*Comentariile bibliografice de la sfîrșitul fiecărui capitol au în primul rînd menirea de a indica acele izvoare care au fost nemijlocit folosite pentru redactarea lucrării sau ale căror idei sînt dezvoltate în lucrare. Există și un număr mic de excepții — semnalarea unor lucrări fundamentale care nu au fost cuprinse în lucrare deoarece ar fi cerut dezvoltări prea mari. De altfel, nici chiar în sensul limitat despre care s-a vorbit mai sus, bibliografia nu are pretenția de a fi completă.*

**AUTORUL**

## TABLA DE MATERII

	<u>Pag.</u>
INTRODUCERE . . . . .	7
§ 1. Scrierea vectorială a sistemelor de ecuații diferențiale . . . . .	7
§ 2. Teorema de existență . . . . .	8
§ 3. Inegalități diferențiale . . . . .	10
§ 4. Teorema de unicitate . . . . .	13
§ 5. Teoremele de continuitate și de derivabilitate în raport cu condițiile inițiale . .	15

### *Capitolul I*

TEORIA STABILITĂȚII DUPĂ LIAPUNOV . . . . .	19
§ 1. Teoreme asupra stabilității și stabilității uniforme . . . . .	20
§ 2. Stabilitatea asimptotică . . . . .	26
§ 3. Sisteme liniare . . . . .	42
§ 4. Stabilitatea la sistemele liniare . . . . .	46
§ 5. Sisteme liniare cu coeficienți constanți . . . . .	50
§ 6. Funcția Liapunov la sisteme liniare cu coeficienți constanți . . . . .	61
§ 7. Teoria stabilității după prima aproximație . . . . .	63
§ 8. Stabilitatea în raport cu perturbații permanente . . . . .	88
§ 9. Sisteme liniare cu coeficienți periodici . . . . .	105
§ 10. Condiția lui Perron . . . . .	119

### *Capitolul II*

STUDIUL STABILITĂȚII ABSOLUTE LA SISTEMLER NELINIARE DE REGLARE AUTOMATĂ .	129
§ 1. Forma canonică și funcția Liapunov corespunzătoare . . . . .	131
§ 2. Studiul intrinsec al sistemelor de reglare . . . . .	143
§ 3. Metoda lui V. M. Popov . . . . .	157
§ 4. Stabilitatea practică a sistemelor cu elemente de tip releu . . . . .	208

### *Capitolul III*

TEORIA OSCILAȚIILOR . . . . .	214
§ 1. Oscilații liniare . . . . .	214
§ 2. Soluții aproape-periodice ale sistemelor liniare . . . . .	220
§ 3. Sisteme cvasiliniare. . . . .	225

	<u>Pag.</u>
§ 4. Sisteme cu parametru mic . . . . .	240
§ 5. Metoda luării mediei . . . . .	251
§ 6. Metode topologice . . . . .	261
§ 7. Sisteme autonome . . . . .	264
§ 8. Sisteme autonome cu parametru mic . . . . .	272
§ 9. Soluții periodice de speța a doua . . . . .	287
§ 10. O metodă de aproximații succesive . . . . .	291
§ 11. Perturbații periodice ale sistemelor autonome . . . . .	300
§ 12. Perturbații singulare . . . . .	309

#### *Capitolul IV*

SISTEME CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT . . . . .	320
§ 1. Teorema de existență. Proprietăți generale . . . . .	320
§ 2. Teoria stabilității Liapunov . . . . .	326
§ 3. Condiția lui Perron la sistemele cu întârziere . . . . .	340
§ 4. O evaluare în teoria stabilității sistemelor liniare cu întârziere . . . . .	350
§ 5. Stabilitatea unor sisteme de reglare cu întârziere . . . . .	356
§ 6. Sisteme liniare periodice cu întârziere . . . . .	359
§ 7. Sisteme periodice cu argument întârziat. Cazul critic . . . . .	361
§ 8. Cazul critic la sisteme generale cu întârziere . . . . .	373
§ 9. Teoria stabilității sistemelor liniare periodice cu întârziere . . . . .	383
§ 10. Stabilitatea sistemelor liniare periodice cu întârziere mică . . . . .	387
§ 11. Sisteme cu parametru mic, cu întârziere . . . . .	403
§ 12. Sisteme cu argument întârziat cu parametru mic . . . . .	409
§ 13. Soluții aproape-periodice la sisteme cvasiliniare cu întârziere . . . . .	427
§ 14. Metoda luării mediei la sisteme cu argument întârziat . . . . .	433
§ 15. Alte teoreme relative la soluții periodice și aproape-periodice ale sistemelor cu întârziere . . . . .	456
ANEXA	
I. Elemente de teoria transformatei Fourier . . . . .	463
II. Permutarea ordinii de integrare la integrala Stieltjes . . . . .	470
III. Teoria stabilității sistemelor liniare staționare cu întârziere . . . . .	474
Bibliografie . . . . .	479

## INTRODUCERE

La baza întregii teorii calitative a ecuațiilor diferențiale stau teoremele generale de existență, unicitate și dependență continuă de condițiile inițiale și de parametri. De aceea vom începe prin a reaminti aceste teoreme generale, stabilind cu acest prilej unele leme care vor fi întâlnite adesea în cele ce urmează. De asemenea vor fi precizate cele mai frecvente notații.

### § 1. SCRIEREA VECTORIALĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

Să considerăm un sistem de ecuații diferențiale de forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Vom nota cu  $x$  vectorul coloană

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vom folosi de obicei norma euclidiană  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . În unele cazuri sînt convenabile și normele echivalente  $|x| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$  sau  $|x| = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$ ; cînd vom folosi aceste norme vom menționa special acest lucru.

Derivata vectorului  $x(t)$  este prin definiție vectorul

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Aceasta nu este o definiție formală; ea coincide cu  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ , limita fiind definită cu ajutorul normei introduse. De asemenea integrala vectorului  $x(t)$  pe  $[a, b]$  este prin definiție vectorul

$$\begin{pmatrix} \int_a^b x_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b x_n(t) dt \end{pmatrix}.$$

Nici aceasta nu este o definiție formală; se poate ajunge la ea definind integrala în mod obișnuit cu ajutorul sumelor Riemann.

Foarte adesea vom folosi evaluarea

$$\left| \int_a^b x(t) dt \right| \leq \int_a^b |x(t)| dt.$$

Avem

$$\left| \int_a^b x(t) dt \right| = \left\{ \left( \int_a^b x_1(t) dt \right)^2 + \left( \int_a^b x_2(t) dt \right)^2 + \dots + \left( \int_a^b x_n(t) dt \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

$$\text{Notăm } J_k = \int_a^b x_k(t) dt, \quad b_k = \frac{J_k}{\sqrt{\sum_i J_i^2}}. \text{ Rezultă}$$

$$\sum_k b_k J_k = \frac{\sum_k J_k^2}{\sqrt{\sum_i J_i^2}} = \sqrt{\sum_k J_k^2} = \left| \int_a^b x(t) dt \right|.$$

Pe de altă parte,

$$\sum_k b_k J_k = \sum_k b_k \int_a^b x_k(t) dt = \int_a^b \sum_k b_k x_k(t) dt \leq \int_a^b \sqrt{\sum_k b_k^2} \sqrt{\sum_k x_k^2(t)} dt.$$

Dar  $\sum_k b_k^2 = 1$ , deci

$$\sum_k b_k J_k \leq \int_a^b \sqrt{\sum_k x_k^2(t)} dt = \int_a^b |x(t)| dt,$$

ceea ce demonstrează evaluarea scrisă mai sus.

## § 2. TEOREMA DE EXISTENȚĂ

În notațiile vectoriale introduse, sistemul de ecuații diferențiale se scrie

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1)$$

Vom presupune în cele ce urmează că  $f$  e continuă într-un domeniu  $D \subset R^{n+1}$ .

DEFINIȚIE. O funcție  $\varphi$  definită și continuă pe un interval  $I$  al axei reale (cu valori în  $R^n$ ) se numește  $\varepsilon$ -soluție a sistemului (1) pe  $I$  dacă:

- a)  $(t, \varphi(t)) \in D$  pentru  $t \in I$ ;
- b)  $\varphi$  are derivată continuă pe  $I$  cu excepția eventual a unui număr finit de puncte din  $I$ ;
- c)  $\left| \frac{d\varphi}{dt} - f[t, \varphi(t)] \right| \leq \varepsilon$ , acolo unde  $\frac{d\varphi}{dt}$  există și este continuă.

LEMA 0.1. Fie  $D: |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b, M = \max |f(t, x)|$ ,  
 $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ .

Atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o  $\varepsilon$ -soluție a sistemului (1) pe  $|t - t_0| \leq \alpha$  astfel ca  $\varphi(t_0) = x_0$ .

Demonstrație. Deoarece  $f$  e continuă pe mulțimea compactă  $D$ , ea este uniform continuă, deci pentru  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel ca  $|f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})| \leq \varepsilon$  pentru  $(t, x) \in D, (\tilde{t}, \tilde{x}) \in D, |t - \tilde{t}| \leq \delta(\varepsilon), |x - \tilde{x}| \leq \delta(\varepsilon)$ . Considerăm o diviziune a intervalului  $[t_0, t_0 + \alpha]$  cu ajutorul punctelor  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_0 + \alpha$  astfel ca

$$\max |t_k - t_{k-1}| \leq \min \left( \delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M} \right).$$

Definim funcția  $\varphi$  pe  $[t_0, t_0 + \alpha]$  prin relațiile

$$\varphi(t_0) = x_0, \varphi(t) = \varphi(t_{k-1}) + f[t_{k-1}, \varphi(t_{k-1})](t - t_{k-1})$$

pentru  $t_{k-1} < t \leq t_k$ . Funcția astfel definită este continuă, derivabilă în interiorul intervalelor  $(t_k, t_{k+1})$ . În plus  $|\varphi(t) - \varphi(\tilde{t})| \leq M |t - \tilde{t}|$ . Pentru  $t \in (t_{k-1}, t_k)$  rezultă  $t - t_{k-1} < \delta(\varepsilon)$  și  $|\varphi(t) - \varphi(t_{k-1})| \leq \delta(\varepsilon)$  deci

$$\left| \frac{d\varphi}{dt} - f[t, \varphi(t)] \right| = |f[t_{k-1}, \varphi(t_{k-1})] - f[t, \varphi(t)]| < \varepsilon,$$

deci  $\varphi$  este  $\varepsilon$ -soluție. La fel se construiește  $\varepsilon$ -soluția și în intervalul  $[t - \alpha, t_0]$ .

TEOREMA 0.1. Fie  $D: |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b, M = \max_D |f(t, x)|$ ,

$$\alpha = \min \left( a, \frac{b}{M} \right).$$

Atunci există pe  $|t - t_0| \leq \alpha$  o soluție  $\varphi$  a sistemului (1) cu  $\varphi(t_0) = x_0$ .

Demonstrație. Fie  $\varepsilon_n > 0, \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ; pentru fiecare  $\varepsilon_n$  există pe baza lemei 0.1 o  $\varepsilon_n$ -soluție  $\varphi_n$  definită pe  $|t - t_0| \leq \alpha$  și astfel ca  $\varphi_n(t_0) = x_0$ ; în plus  $|\varphi_n(t) - \varphi_n(\tilde{t})| \leq M |t - \tilde{t}|$ .

Rezultă că funcțiile  $\varphi_n$  sînt uniform mărginite și egal continue pe  $|t - t_0| \leq \alpha$ , deci pe baza teoremei lui Arzelà (Ascoli) există un subșir  $\varphi_{n_k}$

uniform convergent pe  $|t - t_0| \leq \alpha$  către o funcție  $\varphi$ . Această funcție rezultă continuă și în plus  $|\varphi(t) - \varphi(\tilde{t})| \leq M |t - \tilde{t}|$ . Fie

$$\Delta_n(t) = \frac{d\varphi_n}{dt} - f[t, \varphi_n(t)]$$

în punctele în care  $\varphi_n$  e derivabilă și

$$\Delta_n(t) = 0$$

în punctele în care  $\varphi_n$  nu e derivabilă. Avem

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_n(s)) + \Delta_n(s)] ds, \quad |\Delta_n(t)| \leq \varepsilon_n.$$

Deoarece  $f[t, \varphi_{n_k}(t)]$  converge uniform pe  $|t - t_0| \leq \alpha$  către  $f[t, \varphi(t)]$  iar  $\Delta_{n_k}$  tinde uniform către zero, se poate trece la limită sub semnul de integrare și rezultă

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f[s, \varphi(s)] ds$$

Deoarece  $f$  e continuă, rezultă că  $\varphi$  e derivabilă pe  $|t - t_0| \leq \alpha$  și  $\dot{\varphi}(t) = f[t, \varphi(t)]$ . Teorema este demonstrată.

### § 3. INEGALITĂȚI DIFERENȚIALE

Înainte de a trece la teoremele de unicitate și de dependență continuă de condițiile inițiale, vom stabili câteva leme cu interes în sine.

LEMA 0.2. Fie  $\varphi$  o funcție reală definită pentru  $t_0 \leq t < t_0 + \alpha$ ; notăm

$$D_- \varphi(t) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}.$$

Fie  $\varphi$  și  $\psi$  continue în  $[t_0, t_0 + \alpha)$  și cu proprietățile:

a)  $\varphi(t_0) < \psi(t_0)$ .

b)  $D_- \varphi(t) < f[t, \varphi(t)]$ ,

$D_- \psi(t) \geq f[t, \psi(t)]$ , pentru  $t \in [t_0, t_0 + \alpha)$ .

Atunci  $\varphi(t) < \psi(t)$  pe  $[t_0, t_0 + \alpha)$ .

*Demonstrație.* Considerăm mulțimea valorilor  $t$  din  $[t_0, t_0 + \alpha)$  în care  $\varphi(t) \geq \psi(t)$ ; această mulțime nu conține pe  $t_0$  conform ipotezei. Dacă nu e vidă, fie  $\xi$  marginea ei inferioară.

Avem  $\varphi(\xi) = \psi(\xi)$  deci  $D_- \varphi(\xi) < f[\xi, \varphi(\xi)] = f[\xi, \psi(\xi)] \leq D_- \psi(\xi)$ . De aici rezultă că există  $t_0 \leq t < \xi$  astfel încît

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(\xi)}{t - \xi} < \frac{\psi(t) - \psi(\xi)}{t - \xi},$$

deci

$$\varphi(t) - \varphi(\xi) > \psi(t) - \psi(\xi),$$

deci  $\varphi(t) > \psi(t)$ , ceea ce contrazice definiția lui  $\xi$  ca margine inferioară. Multimea considerată rezultă deci vidă și lema e demonstrată.

LEMA 0.3. Fie  $f$  continuă pentru  $|t - t_0| \leq a$ ,  $|y - y_0| \leq b$ .

Fie  $M = \max |f(t, y)|$ ,  $\alpha = \min \left( a, \frac{b}{M} \right)$ ,  $\beta < \alpha$ . Atunci există o

soluție  $y(t)$  a ecuației  $y' = f(t, y)$  definită pe  $[t_0, t_0 + \beta]$  astfel ca  $y(t_0) = y_0$  și cu proprietatea că dacă  $z(t)$  e soluție a ecuației cu  $z(t_0) = y_0$  să rezulte  $z(t) \leq y(t)$  pe  $[t_0, t_0 + \beta]$ .

*Demonstrație.* Există  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încât dacă  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$  ecuația  $y' = f(t, y) + \varepsilon$  admite soluții pe  $[t_0, t_0 + \beta]$ . Fie  $\varepsilon_n > 0$ ,  $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n < \varepsilon_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ,  $y_n$  un șir monoton descrescător tinzînd către  $y_0$ . Dacă  $y_n(t)$  sînt soluții ale ecuațiilor  $y' = f(t, y) + \varepsilon_n$  cu  $y_n(t_0) = y_n$ , rezultă pe baza lemei 0.2 că  $z(t) < y_{n+1}(t) < y_n(t)$  pe  $[t_0, t_0 + \beta]$ .

Rezultă că pentru orice  $t \in [t_0, t_0 + \beta]$  avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y(t),$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(t, y_n(t)) + \varepsilon_n] = f(t, y(t)),$$

deci

$$y'_n(t) \rightarrow f(t, y(t)).$$

Șirul  $y_n(t)$  fiind monoton descrescător, funcțiile  $y_n(t)$  rezultă uniform mărginite, iar șirul derivatelor  $y'_n(t)$  fiind uniform mărginit, funcțiile  $y_n(t)$  rezultă egal continue. Dar atunci, pe baza teoremei lui Arzelà, șirul  $y_n(t)$  rezultă uniform convergent pe  $[t_0, t_0 + \beta]$  și  $y(t)$  rezultă soluție a ecuației  $y' = f(t, y)$ .

Deoarece  $y_n \rightarrow y_0$ , rezultă  $y(t_0) = y_0$ . Fie  $z(t)$  o soluție oarecare cu  $z(t_0) = y_0$ . Avem pentru toți  $n$ , pe baza lemei 0.2,  $z(t) < y_n(t)$  pentru  $t \in [t_0, t_0 + \beta]$ . Pentru  $n \rightarrow \infty$  se capătă  $z(t) \leq y(t)$  pe  $[t_0, t_0 + \beta]$  și lema e demonstrată.

LEMA 0.4. Fie  $f$  continuă pentru  $|t - t_0| \leq a$ ,  $|y - y_0| \leq b$ ,  $M = \max |f(t, y)|$ ,  $\alpha = \min \left( a, \frac{b}{M} \right)$ ,  $\beta < \alpha$ ,  $y(t)$  soluția a cărei existență este afirmată de lema 0.3,  $\omega(t)$  o funcție derivabilă pe  $[t_0, t_0 + \beta]$  astfel ca  $\omega'(t) \leq f[t, \omega(t)]$ ,  $\omega(t_0) \leq y(t_0)$ . Atunci  $\omega(t) \leq y(t)$  pe  $[t_0, t_0 + \beta]$ .

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon_n > 0$ ,  $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ,  $y_n$  un șir tinzînd monoton descrescător către  $y(t_0)$ . Avem

$$\omega'(t) \leq f[t, \omega(t)] < f[t, \omega(t)] + \varepsilon_n, \quad \omega(t_0) \leq y(t_0) < y_n,$$

deci pe baza lemei 0.2,  $\omega(t) < y_n(t)$  pe  $[t_0, t_0 + \beta]$ . De aici pentru  $n \rightarrow \infty$  rezultă  $\omega(t) \leq y(t)$  pe  $[t_0, t_0 + \beta]$ .



## LEMA 0.5. Ecuația

$$y' = a(t)y + b(t),$$

unde  $a(t)$  și  $b(t)$  sînt continue pe  $|t - t_0| \leq \alpha$ , are pe acest interval soluția

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(u)du} b(s) ds$$

și această soluție este unica soluție pentru care  $y(t_0) = y_0$ .

*Demonstrație.* Că  $y(t)$  e soluție se verifică imediat prin derivare. Să arătăm că soluția e unică. Fie  $\tilde{y}(t)$  o altă soluție cu  $\tilde{y}(t_0) = y_0$ ,  $z(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$ . Rezultă  $z(t_0) = 0$  și  $z'(t) = a(t)z(t)$ , deci  $z(t) = \int_{t_0}^t a(s)z(s) ds$ .

De aici,  $|z(t)| \leq M \int_{t_0}^t |z(s)| ds$ . Dacă există  $t_1 > t_0$  astfel încît  $\int_{t_0}^{t_1} |z(s)| ds = 0$ ,

atunci  $z(s) \equiv 0$  pentru  $t_0 \leq t \leq t_1$  și luăm pe  $t_1$  în loc de  $t_0$ .

Presupunem deci că pentru  $t > t_0$  avem  $\int_{t_0}^t |z(s)| ds \neq 0$ .

Fie  $v(t) = \int_{t_0}^t |z(s)| ds$ . Avem  $\frac{v'(t)}{v(t)} \leq M$  deci  $\int_{\tilde{t}}^t \frac{v'(t)}{v(t)} dt \leq M(t - \tilde{t})$ , deci  $\ln v(t) - \ln v(\tilde{t}) \leq M(t - \tilde{t})$  pentru  $t_0 < \tilde{t} < t$ , deci  $\ln v(t) \leq \ln v(\tilde{t}) + M(t - \tilde{t})$ .

Dar pentru  $\tilde{t} \rightarrow t_0$  avem  $\ln v(\tilde{t}) \rightarrow -\infty$  căci  $v(t_0) = 0$ .

Inegalitatea este contradictorie, deci  $z(t) \equiv 0$ .

LEMA 0.6. Fie  $\varphi, \psi, \chi$  funcții reale definite pe  $[a, b]$  și continue,  $\chi(t) > 0$ . Presupunem că pe  $[a, b]$  are loc inegalitatea

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s) \varphi(s) ds.$$

Atunci

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s) \psi(s) e^{\int_s^t \chi(u)du} ds \text{ pe } [a, b].$$

*Demonstrație.* Fie

$$R(t) = \int_a^t \chi(s) \varphi(s) ds.$$

Avem  $R'(t) = \chi(t)\varphi(t) \leq \chi(t)\psi(t) + \chi(t) \int_a^t \chi(s) \varphi(s) ds = \chi(t)\psi(t) + \chi(t)R(t)$ .

Considerăm ecuația

$$z'(t) = \chi(t)z(t) + \chi(t)\psi(t).$$

Această ecuație admite pe  $[a, b]$  soluția unică

$$z(t) = \int_a^t e^{\int_s^t \chi(u) du} \chi(s) \psi(s) ds$$

care verifică condiția  $z(a) = 0$ . Pe baza lemei 0.4 rezultă  $R(t) \leq z(t)$  pe  $[a, b]$ , deci

$\varphi(t) \leq \psi(t) + R(t) \leq \psi(t) + z(t)$  și lema e demonstrată.

CONSECINȚA 1. Dacă  $\psi$  e derivabilă, din  $\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s) \varphi(s) ds$  rezultă

$$\varphi(t) \leq \psi(a) e^{\int_a^t \chi(u) du} + \int_a^t e^{\int_s^t \chi(u) du} \psi'(s) ds.$$

*Demonstrație.* Avem, cu notațiile de mai sus

$$\begin{aligned} z(t) &= - \int_a^t \psi(s) \frac{d}{ds} e^{\int_s^t \chi(u) du} ds = - \psi(s) e^{\int_s^t \chi(u) du} \Big|_a^t + \int_a^t e^{\int_s^t \chi(u) du} \psi'(s) ds = \\ &= - \psi(t) + \psi(a) e^{\int_a^t \chi(u) du} + \int_a^t e^{\int_s^t \chi(u) du} \psi'(s) ds, \text{ deci} \\ \psi(t) + z(t) &= \psi(a) e^{\int_a^t \chi(u) du} + \int_a^t e^{\int_s^t \chi(u) du} \psi'(s) ds. \end{aligned}$$

CONSECINȚA 2. Dacă  $\psi$  e constantă, din

$$\varphi(t) \leq \psi + \int_a^t \chi(s) \varphi(s) ds$$

rezultă

$$\varphi(t) \leq \psi e^{\int_a^t \chi(u) du}$$

#### § 4. TEOREMA DE UNICITATE

LEMA 0.7. Fie  $f$  definită în  $D \subset R^{n+1}$  și  $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < k(t)|x_1 - x_2|$ .

Fie  $\varphi_1, \varphi_2 \in \varepsilon_1$  — respectiv  $\varepsilon_2$  — soluții ale ecuației (1) pe  $(a, b)$  astfel ca pentru  $t_0 \in (a, b)$  să avem  $|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| \leq \delta$ . Atunci

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \delta e^{\left| \int_{t_0}^t k(u) du \right|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left| \int_{t_0}^t e^{\int_s^t k(u) du} ds \right| \text{ în } (a, b).$$

*Demonstrație.* Presupunem  $t_0 \leq t \leq b$ ; în intervalul  $[a, t_0]$  demonstrația se face la fel. Avem

$$|\dot{\varphi}_1(s) - f[s, \varphi_1(s)]| \leq \varepsilon_1, \quad |\dot{\varphi}_2(s) - f[s, \varphi_2(s)]| \leq \varepsilon_2$$

cu excepția unui număr finit de puncte. Rezultă

$$|\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0) - \int_{t_0}^t f[s, \varphi_1(s)] ds| \leq \varepsilon_1(t - t_0),$$

$$|\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0) - \int_{t_0}^t f[s, \varphi_2(s)] ds| \leq \varepsilon_2(t - t_0).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t) - (\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)) - \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] ds| &\leq \\ &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0) \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &\leq |\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| ds \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &\leq |\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t k(s) |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds. \end{aligned}$$

Aplicăm lema 0.6 (consecința 1) luînd  $\varphi = |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$ ,  $\psi = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0) + |\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)|$ ,  $\chi = k(t)$ .

Obținem

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &\leq |\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| e^{\int_{t_0}^t k(s) ds} + \\ &+ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_{t_0}^t e^{\int_s^t k(u) du} ds \end{aligned}$$

și lema e demonstrată.

**TEOREMA 0.2.** *Dacă*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < k(t) |x_1 - x_2|$$

în  $D \subset R^{n+1}$  și  $\varphi_1, \varphi_2$  sînt două soluții ale sistemului (1) cu  $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$  atunci  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  în intervalul  $(a, b)$  în care aceste soluții sînt definite

*Demonstrație.* În lema 0.7 putem lua  $\delta = 0$ .  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  și se capătă  $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| = 0$ .

Teorema 0.1 arată că soluția sistemului (1) există într-o vecinătate a punctului inițial. O problemă importantă este aceea a prelungirii solu-

ției pe un interval cât mai mare. Fie  $\varphi(t)$  o soluție a ecuației (1) definită în  $(a, b)$ . Atunci

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) \, ds.$$

Dacă  $a < t_1 < t_2 < b$  rezultă  $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, \varphi(s))| \, ds \leq M(t_2 - t_1)$ ,

deci  $\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} \varphi(t)$  și  $\lim_{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}} \varphi(t)$  există. Dacă punctul  $(b, \varphi(b - 0))$  e în  $D$ , funcția

$\tilde{\varphi}$  definită prin  $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$  pentru  $t \in (a, b)$ ,  $\tilde{\varphi}(b) = \varphi(b - 0)$  este o soluție a sistemului în  $(a, b]$ ; această soluție poate fi prelungită pentru  $t > b$  luând ca punct inițial pe  $b$  și ca valoare inițială pe  $\varphi(b - 0)$ .

Rezultă de aici că o soluție poate fi prelungită atît timp cît nu părăsește domeniul  $D$ .

#### § 5. TEOREMELE DE CONTINUITATE ȘI DE DERIVABILITATE ÎN RAPORT CU CONDIȚIILE INIȚIALE

În cele ce urmează vom nota cu  $x(t; t_0, x_0)$  soluția sistemului (1) care pentru  $t = t_0$  ia valoarea  $x_0$ .

**TEOREMA 0.3.** Dacă  $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < k(t) |x_1 - x_2|$  în  $D$ , atunci din  $x_n \rightarrow x_0$  rezultă  $x(t; t_0, x_n) \rightarrow x(t; t_0, x_0)$ .

*Demonstrație.* Avem

$$x(t; t_0, x_n) = x_n + \int_{t_0}^t f[s, x(s; t_0, x_n)] \, ds,$$

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f[s, x(s; t_0, x_0)] \, ds.$$

Rezultă, pentru  $t \geq t_0$ ,

$$\begin{aligned} |x(t; t_0, x_n) - x(t; t_0, x_0)| &\leq |x_n - x_0| + \int_{t_0}^t |f[s, x(s; t_0, x_n)] - \\ &- f[s, x(s; t_0, x_0)]| \, ds \leq |x_n - x_0| + \int_{t_0}^t k(s) |x(s; t_0, x_n) - x(s; t_0, x_0)| \, ds. \end{aligned}$$

Aplicînd lema 0.6 (consecința 2) rezultă

$$|x(t; t_0, x_n) - x(t; t_0, x_0)| \leq |x_n - x_0| e^{\int_{t_0}^t k(s) \, ds}$$

și teorema e demonstrată.

*Observație.* Din demonstrație rezultă că are loc convergența uniformă în raport cu  $t$  pe orice interval  $(a, b)$  pe care soluțiile sînt definite.

Să presupunem acum că  $f(t, x)$  este diferențiabilă în  $D$ , pentru  $t \in I$ . Aceasta înseamnă că pentru orice  $x_0 \in D$ ,  $t \in I$  are loc relația

$$f(t, x) - f(t, x_0) = f'_x(t, x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Să considerăm acum o soluție  $x(t; t_0, x_0)$  situată în  $D$  pentru  $t \in I$ .

**TEOREMA 0.4.** *Dacă  $f$  este diferențiabilă în  $D$  pentru  $t \in I$  și  $x(t; t_0, x_0)$  este pentru  $t \in I$  situată în  $D$ , atunci  $x(t; t_0, x_0)$  este diferențiabilă în raport cu  $x_0$  și  $\frac{\partial x(t; t_0, x_0)}{\partial x_0}$  este o matrice fundamentală de soluții a sistemului liniar*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f(t, x(t; t_0, x_0))}{\partial x} y$$

numit sistemul în variații corespunzător soluției  $x(t; t_0, x_0)$ .

*Demonstrație.* Fie  $x_1$  astfel ca soluția  $x(t; t_0, x_1)$  să se afle pentru  $t \in I$  în  $D$ . Fie  $Y(t, t_0)$  o matrice fundamentală a sistemului în variații, cu alte cuvinte o matrice ale cărei coloane sînt soluții ale sistemului în variații astfel ca  $Y(t_0, t_0) = E$ ,  $E$  fiind matricea unitate.

Atunci, evident,  $Y(t, t_0)(x_1 - x_0)$  va fi o soluție a sistemului în variații care pentru  $t = t_0$  coincide cu  $x_1 - x_0$ .

Avem relațiile

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f[s, x(s; t_0, x_0)] ds,$$

$$x(t; t_0, x_1) = x_1 + \int_{t_0}^t f[s, x(s; t_0, x_1)] ds,$$

$$Y(t, t_0)(x_1 - x_0) = x_1 - x_0 + \int_{t_0}^t \frac{\partial f[s, x(s; t_0, x_0)]}{\partial x} Y(s, t_0)(x_1 - x_0) ds.$$

Rezultă de aici

$$\begin{aligned} x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0) - Y(t, t_0)(x_1 - x_0) &= \\ &= \int_{t_0}^t \left\{ f[s, x(s; t_0, x_1)] - f[s, x(s; t_0, x_0)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f[s, x(s; t_0, x_0)]}{\partial x} Y(s, t_0)(x_1 - x_0) \right\} ds. \end{aligned}$$

Ținînd seama de ipoteza asupra diferențiabilității funcției  $f$  deducem

$$\begin{aligned} x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0) - Y(t, t_0)(x_1 - x_0) &= \\ &= \int_{t_0}^t f'_x[s, x(s; t_0, x_0)][x(s; t_0, x_1) - x(s; t_0, x_0) - Y(s, t_0)(x_1 - x_0)] ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^t o(|x(s; t_0, x_1) - x(s; t_0, x_0)|) ds. \end{aligned}$$

Pe baza relației din teorema 0.3 rezultă

$$|x(s; t_0, x_1) - x(s; t_0, x_0)| \leq e^{\int_{t_0}^s k(s) ds} |x_1 - x_0|$$

deci

$$o(|x(s; t_0, x_1) - x(s; t_0, x_0)|) = o(|x_1 - x_0|)$$

pentru  $t$  fixat.

Prin urmare

$$|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0) - Y(t, t_0)(x_1 - x_0)| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^t k(s) |x(s; t_0, x_1) - x(s; t_0, x_0) - Y(s, t_0)(x_1 - x_0)| ds + o(x_1 - x_0)$$

deci, pe baza lemei 0.6,

$$|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0) - Y(t, t_0)(x_1 - x_0)| = o(|x_1 - x_0|)$$

și teorema este demonstrată.

Se demonstrează o teoremă analogă cu privire la derivabilitatea în raport cu  $t_0$  și în general în raport cu parametrii.

#### COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Pentru teoria generală a ecuațiilor diferențiale pot fi consultate, în traducere în limba română [1], [2]. De asemenea, teoria generală a ecuațiilor diferențiale este expusă într-o formă asemănătoare cu cea de aici în monografiile [3], [4], [5], [6]. Noțiunile relative la inegalitățile diferențiale sînt date în [7].



## CAPITOLUL I

### TEORIA STABILITĂȚII DUPĂ LIAPUNOV

Teorema generală 0.3 asupra dependenței continue în raport cu condițiile inițiale arată că problema determinării soluției prin condiții inițiale este corect pusă, are un sens fizic.

Într-adevăr, practic, condițiile inițiale se determină prin măsurători și orice măsurătoare nu poate fi decât aproximativă. Continuitatea în raport cu condițiile inițiale exprimă tocmai faptul că aceste erori de măsurătoare nu se răsfrâng prea grav asupra soluției, iar lema 0.7 arată că ele nu se răsfrâng prea grav nici asupra soluțiilor aproximative, cu alte cuvinte, dacă se dă o eroare  $\varepsilon$  admisă pentru soluție, există  $\delta > 0$  astfel încît dacă eroarea la stabilirea condițiilor inițiale este mai mică decît  $\delta$  sîntem siguri că

eroarea în orice  $\frac{\varepsilon}{2}$  — soluție construită cu aceste condiții inițiale este mai mică decît  $\varepsilon$ .

Trebuie însă subliniat că această proprietate este stabilită pe un interval finit  $(a, b)$  de variație a lui  $t$ ;  $\delta$  depinde de mărimea acestui interval și scade cînd mărimea intervalului crește. Rezultă că o soluție va avea în realitate caracter fizic numai dacă pentru intervale de mărime destul de mare,  $\delta$  este destul de mare, de ordinul erorilor de măsurătoare. Un mod de a realiza aceasta constă în a cere ca  $\delta$  să *nu depindă* de mărimea intervalului considerat. Ajungem astfel la noțiunea de stabilitate în sensul lui Liapunov.

Un alt mod de a ajunge la această noțiune este următorul. Considerăm o soluție a sistemului care descrie desfășurarea unui anumit fenomen. Să presupunem că în desfășurarea fenomenului au intervenit perturbații de scurtă durată care nu pot fi cunoscute exact și deci nu pot fi luate în seamă în studiul matematic al fenomenului. După ce aceste perturbații și-au încetat acțiunea, fenomenul va fi descris de același sistem de ecuații diferențiale ca și înainte de apariția lor. Ce s-a petrecut însă? Sub influența perturbațiilor, fenomenul a fost modificat, deci valoarea corespunzătoare momentului cînd perturbațiile își încetează acțiunea va fi alta decît aceea



dată de soluția considerată la început. Rezultă că după încetarea acțiunii perturbațiilor fenomenul va fi descris de altă soluție decât cea cu care am plecat. Cu alte cuvinte efectul unor perturbații de durată scurtă constă în trecerea de la o soluție cu anumite condiții inițiale la o soluție cu alte condiții inițiale, drept moment inițial fiind considerat momentul când perturbațiile își încetează acțiunea. Cum în orice model matematic al fenomenelor naturale se neglijează asemenea perturbații, pentru ca fenomenul să fie corect descris și soluția matematică să aibă sens fizic este necesar ca modificări mici ale condițiilor inițiale să nu aibă efecte prea mari asupra soluției. Această condiție este întotdeauna asigurată pe un interval dat  $(a, b)$  de teorema de continuitate în raport cu condițiile inițiale. Aceleași raționamente ca mai înainte ne fac să considerăm necesară independența lui  $\delta$  de mărimea intervalului și ne conduc astfel la noțiunea de stabilitate a soluției.

### § 1. TEOREME ASUPRA STABILITĂȚII ȘI STABILITĂȚII UNIFORME

Să trecem acum la definiția precisă a stabilității. Considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

și fie  $\tilde{x}(t)$  o soluție a sistemului definită pentru  $t \geq t_0$ .

**DEFINIȚIE.** Vom spune că soluția  $\tilde{x}(t)$  este stabilă dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon; t_0)$  astfel încât dacă  $|x_0 - \tilde{x}(t_0)| < \delta$  să rezulte  $|x(t; t_0, x_0) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .

Există împrejurări în care nu toate soluțiile unui sistem de ecuații diferențiale au semnificație fizică. Este evident că în asemenea împrejurări nu ne interesează ca toate soluțiile cu condiții inițiale apropiate de cele ale soluției  $x(t)$  să rămână în vecinătatea acestei soluții; este suficient ca această proprietate să aibă loc numai pentru soluțiile care au sens fizic. Ajungem astfel la următoarea precizare a noțiunii de stabilitate.

**DEFINIȚIE.** Vom spune că soluția  $\tilde{x}(t)$  este stabilă relativ la o mulțime  $M$  de soluții dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon; t_0)$  astfel încât dacă  $|x_0 - \tilde{x}(t_0)| < \delta$  și soluția  $x(t; t_0, x_0)$  aparține mulțimii  $M$  să rezulte  $|x(t; t_0, x_0) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .

Dacă  $\tilde{x}(t)$  este soluția a cărei stabilitate o studiem (subliniem cu acest prilej faptul că întotdeauna este vorba despre stabilitatea unei anumite soluții, pe care o presupunem cunoscută), prin schimbarea de variabile  $y = x - \tilde{x}(t)$  putem reduce întotdeauna problema la studiul stabilității soluției  $y \equiv 0$ . Într-adevăr, obținem

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\tilde{x}}{dt} = f(t, x) - f(t, \tilde{x}(t)) = f(t, y + \tilde{x}(t)) - f(t, \tilde{x}(t)) = F(t, y)$$

și noul sistem  $\frac{dy}{dt} = F(t, y)$  admite soluția  $y \equiv 0$  corespunzătoare soluției

$x = \tilde{x}(t)$ . Condiția  $|\tilde{x}(t_0) - x_0| < \delta$  revine la  $|y_0| < \delta$  iar  $|x(t; t_0, x_0) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$  revine la  $|y(t, t_0, y_0)| < \varepsilon$ .

Liapunov a numit sistemul obținut pe această cale sistemul de ecuații al mișcării perturbate; sensul acestei denumiri stă în faptul că noile necunoscute  $y$  reprezintă de fapt perturbațiile suferite de mișcarea  $\tilde{x}(t)$ . Prin trecerea la sistemul de ecuații al mișcării perturbate se poate spune că stabilitatea mișcării se reduce la studiul stabilității echilibrului.

În tot ceea ce urmează vom considera numai problema stabilității soluției banale  $x \equiv 0$ .

**TEOREMA 1.1.** *Presupunem că există o funcție  $V(t, x)$ , definită pentru  $t \geq 0$ ,  $|x| \leq \delta_0$ , continuă și cu proprietățile:*

- a)  $V(t, 0) \equiv 0$ ;
- b)  $V(t, x) \geq a(|x|)$ , unde  $a(r)$  este continuă, monoton crescătoare și  $a(0) = 0$ ;
- c)  $V^*(t) = V(t, x(t))$  este monoton descrescătoare oricare ar fi soluția  $x(t)$  a sistemului (1) cu  $|x(t_0)| < \delta_0$ ;

*Atunci soluția  $x \equiv 0$  a sistemului este stabilă.*

**Demonstrație.** Fie  $\delta_0 > \varepsilon > 0$  dat și  $\delta(\varepsilon; t_0)$  astfel ales încît  $|x_0| < \delta$  să implice  $V(t_0, x_0) < a(\varepsilon)$ ; asemenea alegere este posibilă deoarece  $V(t_0, 0) = 0$  și  $V(t_0, x)$  e continuă.

Fie  $x_0$  cu  $|x_0| < \delta$ ; considerăm soluția  $x(t; t_0, x_0)$ .

Funcția  $V^*(t) = V(t, x(t; t_0, x_0))$  este prin ipoteză monoton descrescătoare, deci

$$V^*(t) \leq V(t_0) = V(t_0, x(t_0; t_0, x_0)) = V(t_0, x_0).$$

**Rezultă**

$$a(|x(t; t_0, x_0)|) \leq V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < a(\varepsilon).$$

Deoarece  $a(r)$  este monoton crescătoare, de aici rezultă  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru orice  $t \geq t_0$ , deci soluția rămîne în domeniul  $|x| \leq \delta_0$ , unde  $V$  e definită; teorema e demonstrată.

**Observații.** 1) Dacă  $V$  este diferențiabilă, funcția  $V^*(t)$  este derivabilă și avem

$$\frac{dV^*}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{\partial V}{\partial x}, f(t, x) \right)$$

deoarece  $x$  este soluția sistemului de ecuații diferențiale.

**Funcția**

$$W(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \left( \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, f(t, x) \right)$$

se numește derivata funcției  $V$  în virtutea sistemului. Condiția c) din teoremă este evident satisfăcută dacă  $V$  este diferențiabilă și  $W(t, x) \leq 0$ .

2) Stabilitatea soluției banale implică evident prelungibilitatea pentru orice  $t \geq t_0$  a soluțiilor cu condiții inițiale într-o vecinătate a lui  $x \equiv 0$ , deoarece faptul că  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  asigură posibilitatea prelungirii, soluția nepărăsind domeniul relativ la care sînt îndeplinite condițiile teoremei de existență.

3) Să analizăm modul în care se comportă teorema dacă vrem să obținem numai stabilitatea relativ la o mulțime  $M$  de soluții. Este suficient să cerem ca  $V(t, x(t)) \geq a(|x(t)|)$  și  $V(t, x(t))$  monoton descrescătoare numai pentru soluțiile  $x(t)$  aparținând mulțimii  $M$  de soluții; de asemenea putem presupune că funcția  $V(t, x)$  e definită numai în punctele  $(t, x)$  de pe graficele soluțiilor din  $M$  și e continuă numai în aceste puncte. Teorema se va formula în felul următor:

*Presupunem că există o funcție  $V(t, x)$ , definită și continuă pe intersecția dintre domeniul  $(t \geq 0, |x| \leq \delta_0)$  și reuniunea graficelor soluțiilor din  $M$ , cu proprietățile  $V(t, 0) \equiv 0$ ,  $V(t, x(t)) \geq a(|x(t)|)$ ,  $V(t, x(t))$  monoton descrescătoare pentru orice soluție  $x(t)$  din  $M$ .*

*Atunci soluția banală a sistemului e stabilă relativ la  $M$ .*

Noțiunea de stabilitate definită mai sus are dezavantajul că este direct legată de momentul inițial  $t_0$ ; valoarea  $\delta$  a abaterilor inițiale admise depinde nu numai de abaterea admisă pentru soluție, ci și de momentul inițial. Or, dacă ne întoarcem la problema perturbațiilor cu acțiune de scurtă durată, este clar că asemenea perturbații pot apărea în diferite momente ale desfășurării fenomenului și tocmai aceste momente (mai exact, momentele când acțiunea perturbatoare încetează) sînt considerate drept momente inițiale. Pentru ca noțiunea de stabilitate introdusă să aibă valoare fizică este deci de dorit ca perturbațiile inițiale admise care nu au efect dăunător să nu depindă de momentul inițial. Ajungem astfel la noțiunea de *stabilitate uniformă*.

**DEFINIȚIE.** *Soluția banală  $x \equiv 0$  se numește uniform stabilă dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încît dacă  $|x_0| < \delta$  să rezulte  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ , oricare ar fi  $t_0$ .*

Se vede că deosebirea față de cazul considerat anterior constă în independența lui  $\delta(\varepsilon)$  de  $t_0$ .

**TEOREMA 1.1'.** *Presupunem că există o funcție  $V(t, x)$  definită și continuă pentru  $t \geq 0, |x| \leq \delta_0$ , cu proprietățile:*

a)  $V(t, 0) \equiv 0$ .

b)  $a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|)$ ,  $a(r)$  și  $b(r)$  fiind continue, monoton crescătoare și  $a(0) = b(0) = 0$ .

c)  $V^*(t) = V(t, x(t))$  este monoton descrescătoare pentru orice soluție  $x(t)$  a sistemului cu  $|x(t)| \leq \delta_0$ .

*Atunci soluția  $x \equiv 0$  este uniform stabilă.*

Enunțul corespunzător pentru stabilitatea uniformă relativă la o mulțime  $M$  de soluții este imediat.

**Demonstrație.** Fie  $0 < \varepsilon < \delta_0$  și  $\delta = b^{-1}[a(\varepsilon)]$ ; fie  $x_0$  cu  $|x_0| < \delta$ . Considerăm soluția  $x(t; t_0, x_0)$ . Funcția  $V^*(t) = V[t, x(t; t_0, x_0)]$  este monoton descrescătoare, deci

$$\begin{aligned} V^*(t) &\leq V^*(t_0) = V[t_0, x(t_0; t_0, x_0)] = V(t_0, x_0) \leq b(|x_0|) < b(\delta) = \\ &= b[b^{-1}(a(\varepsilon))] = a(\varepsilon). \end{aligned}$$

Rezultă

$$a(|x(t; t_0, x_0)|) \leq V^*(t) < a(\varepsilon)$$

deci

$$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon \text{ pentru } t \geq t_0.$$

**TEOREMA 1.2.** *Dacă soluția banală a sistemului este uniform stabilă, există o funcție  $V(t, x)$  cu proprietățile din teorema precedentă.*

*Demonstrație.* Punem  $V(t, x) = \sup_{\sigma \geq 0} |x(t + \sigma; t, x)|$ . Funcția  $V(t, x)$  e definită pentru  $t \geq 0, |x| < \delta_0 = \sup \delta(\varepsilon)$ . Din

$$|x(t + \sigma; t, x)| < \varepsilon(|x|),$$

unde  $\varepsilon(\delta)$  este funcția inversă a funcției  $\delta(\varepsilon)$  (care poate fi aleasă continuă și monoton crescătoare), rezultă  $V(t, x) \leq \varepsilon(|x|)$ . Mai departe,

$$\sup_{\sigma \geq 0} |x(t + \sigma; t, x)| \geq |x(t; t, x)| = |x|,$$

deci

$$V(t, x) \geq |x|.$$

În sfârșit, fie

$$\begin{aligned} V^*(t) &= V[t, x(t; t_0, x_0)] = \sup_{\sigma \geq 0} |x(t + \sigma; t, x(t; t_0, x_0))| = \\ &= \sup_{\sigma \geq 0} |x(t + \sigma; t_0, x_0)|. \end{aligned}$$

Fie  $t_1 > t_2$ ,  $d = t_1 - t_2$ . Avem

$$\begin{aligned} V^*(t_1) &= \sup_{\sigma \geq 0} |x(t_1 + \sigma; t_0, x_0)| = \sup_{\sigma \geq 0} |x(t_2 + d + \sigma; t_0, x_0)| = \\ &= \sup_{\sigma \geq 0} |x(t_2 + \sigma; t_0, x_0)| \leq \sup_{\sigma \geq 0} |x(t_2 + \sigma; t_0, x_0)| = V^*(t_2) \end{aligned}$$

deci  $V^*(t)$  este monoton descrescătoare. Teorema e demonstrată.

Să considerăm acum un sistem de forma

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(t, x, y), \quad (2)$$

unde  $X$  și  $Y$  sînt definite pentru  $t \geq t_0, |x| \leq H, y$  arbitrar ( $x, y$  vectori),  $X(t, 0, 0) = 0, Y(t, 0, 0) = 0$ .

**DEFINIȚIE.** *Soluția  $x = 0, y = 0$  a sistemului se numește stabilă în raport cu componentele  $x$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$  (depinzînd de  $\varepsilon$  și  $t_0$ , iar în cazul stabilității uniforme numai de  $\varepsilon$ ) astfel ca, dacă  $|x_0| + |y_0| < \delta$  să rezulte  $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .*

**TEOREMA 1.1''.** *Presupunem că există o funcție  $V(t, x, y)$  definită pentru  $t \geq t_0, |x| \leq H, y$  arbitrar, cu proprietățile:*

- 1°.  $V(t, 0, 0) \equiv 0, V(t, x, y)$  continuă pentru  $x = 0, y = 0$ ;
- 2°.  $V(t, x, y) \geq a(|x|)$  cu  $a(r)$  continuă, monoton crescătoare,  $a(0) = 0$ ;
- 3°.  $V[t, x(t), y(t)]$  e monoton descrescătoare pentru orice soluție  $x(t), y(t)$  a sistemului cu  $|x(t)| \leq H$ .

*Atunci soluția banală a sistemului (2) este stabilă în raport cu componentele  $x$ . Dacă în plus  $V(t, x, y) \leq b(|x| + |y|)$ , unde  $b(r)$  e ca în teorema 1.1', atunci stabilitatea e uniformă.*

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  ales astfel ca  $V(t_0, x_0, y_0) < a(\varepsilon)$  dacă  $|x_0| + |y_0| < \delta$ ; dacă  $V(t, x, y) \leq b(|x| + |y|)$  se ia  $\delta = b^{-1}[a(\varepsilon)]$ .

Considerăm soluția  $x(t; t_0, x_0, y_0)$ ,  $y(t; t_0, x_0, y_0)$  și funcția  $V^*(t) = V[t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0)]$  care este prin ipoteză monoton descrescătoare. Rezultă

$$a(|x(t; t_0, x_0, y_0)|) \leq V^*(t) \leq V^*(t_0) = V(t_0, x_0, y_0) < a(\varepsilon),$$

deci  $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .

**TEOREMA 1.2'.** *Dacă soluția  $x = 0$ ,  $y = 0$  a sistemului (2) este uniform stabilă în raport cu componentele  $x$ , există o funcție  $V(t, x, y)$  cu toate proprietățile din teorema precedentă.*

*Demonstrație.* Luăm  $V(t, x, y) = \sup_{\sigma \geq 0} |x(t + \sigma; t, x, y)|$ . Evident,

$V(t, x, y) \leq \varepsilon(|x| + |y|)$  și  $V(t, x, y) \geq |x|$ . Mai departe,

$$\begin{aligned} V^*(t) &= V[t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0)] = \\ &= \sup_{\sigma \geq 0} |x(t + \sigma; t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))| = \\ &= \sup_{\sigma \geq 0} |x(t + \sigma; t_0, x_0, y_0)|. \end{aligned}$$

Fie  $t_1 > t_2$ ,  $d = t_1 - t_2$ ; avem

$$\begin{aligned} V^*(t_1) &= \sup_{\sigma \geq 0} |x(t_1 + \sigma; t_0, x_0, y_0)| = \\ &= \sup_{\sigma \geq 0} |x(t_2 + d + \sigma; t_0, x_0, y_0)| = \\ &= \sup_{\sigma \geq d} |x(t_2 + \sigma; t_0, x_0, y_0)| \leq \sup_{\sigma \geq 0} |x(t_2 + \sigma; t_0, x_0, y_0)| = V^*(t_2), \end{aligned}$$

deci  $V^*(t)$  este monoton descrescătoare.

Să punem în evidență câteva particularități ale sistemelor periodice în raport cu  $t$ . Fie deci în sistemul (1)  $f(t + \omega, x) = f(t, x)$ . Atunci o dată cu  $x(t; t_0, x_0)$  este soluție și  $x(t + \omega; t_0, x_0)$ . De aici, dacă sistemul (1) îndeplinește condițiile teoremei de unicitate rezultă

$$x(t + \omega; t_0 + \omega, x_0) = x(t; t_0, x_0)$$

deoarece în ambii membri ai egalității avem soluții ale sistemului (1) și aceste soluții coincid pentru  $t = t_0$ .

**PROPOZIȚIA 1.** *Dacă  $f(t + \omega, x) = f(t, x)$ , stabilitatea soluției banale a sistemului (1) este întotdeauna uniformă.*

*Demonstrație.* Fie, pentru  $t_0$  fixat,  $\delta_0(t_0) = \sup_{\varepsilon > 0} \delta(\varepsilon, t_0)$ .

Fie  $\delta = \inf_{0 \leq t_0 \leq \omega} \delta_0(t_0)$ ;  $\delta_0 > 0$  căci  $\delta_0(t_0)$  poate fi aleasă continuă.

Pentru  $0 < \delta < \delta_0$  definim

$$\varepsilon(\delta) = \sup_{\sigma \geq 0} |x(t_0 + \sigma; t_0, x_0)|.$$

Funcția  $\varepsilon(\delta)$  este monoton crescătoare; fie  $\delta(\varepsilon)$  inversa ei.

Pentru  $|x_0| < \delta(\varepsilon)$  rezultă  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru orice  $0 \leq t_0 \leq \omega$ .

Pentru  $t_0 > 0$  arbitrar, avem  $k\omega \leq t_0 < (k+1)\omega$ , deci  $0 \leq t_0 - k\omega < \omega$  și  $|x(t; t_0, x_0)| = |x(t - k\omega, t_0 - k\omega, x_0)| < \varepsilon(\delta)$  dacă  $|x_0| < \delta$ , deci  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  dacă  $|x_0| < \delta(\varepsilon)$ .

PROPOZIȚIA 2. Dacă  $f(t + \omega, x) = f(t, x)$ , funcția  $V(t, x)$  din teorema 1.2' este periodică de perioadă  $\omega$ .

Demonstrație. Avem  $V(t + \omega, x) = \sup_{\sigma \geq 0} |x(t + \omega + \sigma; t + \omega, x)| = \sup_{\sigma \geq 0} |x(t + \sigma; t, x)| = V(t, x)$ .

Un caz particular de sisteme periodice îl constituie sistemele în care  $f$  nu depinde de  $t$ . Rezultă că pentru asemenea sisteme stabilitatea este întotdeauna uniformă și funcția  $V$  poate fi aleasă independentă de  $t$ .

DEFINIȚIE. Soluția  $x(t)$  a sistemului (1) se numește nestabilă dacă nu este stabilă.

Să formulăm acum o teoremă care permite să se recunoască nestabilitatea soluției banale  $x = 0$ .

TEOREMA 1.3. Dacă există o funcție  $V(t, x)$  cu proprietățile

1°  $|V(t, x)| \leq b(|x|)$ , unde  $b(r)$  este monoton crescătoare și continuă;

2° Pentru orice  $\delta > 0$  și orice  $t_0 > 0$  există  $x_0$  cu  $|x_0| < \delta$  astfel ca  $V(t_0, x_0) < 0$ ;

3°  $\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V(t+h, x(t+h, t, x)) - V(t, x)}{h} \leq -c(|x|)$ , unde

$c(r)$  este monoton crescătoare și continuă,  $c(0) = 0$ , atunci soluția  $x = 0$  a sistemului (1) este nestabilă.

Demonstrație. Să presupunem că soluția este stabilă. Atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  și  $t_0 > 0$  există  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  astfel ca  $|x_0| < \delta$  să implice  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ . Alegem pe  $x_0$  astfel ca  $|x_0| < \delta$  și  $V(t_0, x_0) < 0$ . Din  $|x_0| < \delta$  rezultă  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ , deci  $|V(t, x(t; t_0, x_0))| \leq b(|x(t; t_0, x_0)|) < b(\varepsilon)$ , pentru orice  $t \geq t_0$ . Din condiția 3° rezultă în particular că  $V(t, x(t; t_0, x_0))$  este monoton descrescătoare, deci pentru orice  $t \geq t_0$  rezultă  $V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < 0$ , deci  $|V(t, x(t; t_0, x_0))| \geq |V(t_0, x_0)|$ , deci  $b(|x(t; t_0, x_0)|) \geq |V(t_0, x_0)|$  deci  $|x(t; t_0, x_0)| \geq b^{-1}(|V(t_0, x_0)|)$ . Din condiția 3° rezultă

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V(t+h, x(t+h; t_0, x_0)) - V(t, x(t; t_0, x_0))}{h} \leq -c(|x(t; t_0, x_0)|)$$

deci

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) - \int_{t_0}^t c(|x(u; t_0, x_0)|) du.$$

Din

$$|x(t; t_0, x_0)| \geq b^{-1}(|V(t_0, x_0)|)$$

rezultă

$$c(|x(t; t_0, x_0)|) \geq c[b^{-1}(|V(t_0, x_0)|)]$$

deci

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) - (t - t_0) c[b^{-1}(|V(t_0, x_0)|)].$$

Dar aceasta înseamnă că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x(t; t_0, x_0)) = -\infty,$$

ceea ce contrazice faptul că

$$|V(t, x(t; t_0, x_0))| < b(\varepsilon).$$

*Observație.* Analizînd demonstrația se vede că existența unei funcții  $V$  cu proprietățile din enunț implică o nestabilitate foarte puternică: pentru orice  $\varepsilon > 0$ , orice  $t_0 > 0$  și orice  $\delta > 0$  există  $x_0$  cu  $|x_0| < \delta$  și  $T > t_0$  astfel ca  $|x(T; t_0, x_0)| \geq \varepsilon$ .

## § 2. STABILITATEA ASIMPTOTICĂ

De multe ori nu este suficient faptul că perturbațiile cu acțiune de scurtă durată nu duc la perturbații mari ale soluției ci natura problemei cere ca efectul acestor perturbații să se amortizeze, să dispară după un interval destul de mare de variație a lui  $t$ . Astfel se ajunge la noțiunea de stabilitate asimptotică pe care o vom defini în cele ce urmează.

**DEFINIȚIE.** *Soluția  $x \equiv 0$  se numește asimptotic stabilă dacă e stabilă și în plus există  $\delta_0(t_0) > 0$  cu proprietatea că dacă  $|x_0| < \delta_0$  avem*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t; t_0, x_0)| = 0.$$

*Soluția  $x \equiv 0$  se numește uniform asimptotic stabilă dacă există  $\delta_0 > 0$  și funcțiile  $\delta(\varepsilon)$  și  $T(\varepsilon)$  cu proprietatea că  $|x_0| < \delta$  implică  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$  iar  $|x_0| < \delta_0$ ,  $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$  implică  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ .*

Stabilitatea asimptotică uniformă revine la stabilitatea uniformă și la  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, x_0) = 0$  uniform în raport cu  $t_0$  și  $x_0$  ( $t_0 \geq 0$ ,  $|x_0| < \delta_0$ ).

**PROPOZIȚIE.** *Dacă  $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < k(t) |x_1 - x_2|$  în  $t \geq 0$ ,  $|x| \leq H$  și  $\int_{t_0}^t k(s) ds = O(t - t_0)$ , atunci existența funcției  $T(\varepsilon)$  este suficientă pentru stabilitatea asimptotică uniformă.*

Într-adevăr, fie  $\varepsilon > 0$ ,  $T(\varepsilon)$  valoarea corespunzătoare; alegem pe  $\delta(\varepsilon)$  astfel încît  $|x_0| < \delta$  să implice  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ . Asemenea alegere este posibilă pe baza lemei 0.7 luînd  $\varphi_1 = x(t; t_0, x_0)$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ .

Obținem

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq \delta e^{\int_{t_0}^{t_0+T} k(u) du}$$

și deci

$$\delta < \varepsilon e^{-\int_{t_0}^{t_0+T(\varepsilon)} k(u) du};$$

ținînd seama de proprietatea impusă lui  $k(u)$  rezultă că  $\delta$  depinde numai de  $\varepsilon$ .

**TEOREMA 1.4.** *Presupunem că există o funcție  $V(t, x)$  definită pentru  $t \geq t_0$ ,  $|x| \leq H$  continuă și cu proprietățile :*

a)  $V(t, 0) \equiv 0$ ;

b)  $V(t, x) \geq a(|x|)$ ,  $a(0) = 0$ ,  $a(r)$  continuă și monoton crescătoare ;

c) 
$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leq -c[V(t, x(t; t_0, x_0))],$$

unde  $c(r)$  este continuă și monoton crescătoare,  $c(0) = 0$ .

Atunci soluția  $x \equiv 0$  este asimptotic stabilă.

*Demonstrație.* Pe baza teoremei 1.1. soluția este stabilă. Din ipoteză  $V[t, x(t; t_0, x_0)]$  rezultă monoton descrescătoare, deci există

$$V_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} V[t, x(t; t_0, x_0)].$$

Dacă  $V_0 \neq 0$ , avem  $c(V_0) \neq 0$  și cum  $c(r)$  e monotonă,

$$c[V(t, x(t; t_0, x_0))] > c(V_0),$$

deci

$$-c[V(t, x(t; t_0, x_0))] < -c(V_0)$$

deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leq -c(V_0).$$

Integrând rezultă

$$V[t, x(t; t_0, x_0)] - V(t_0, x_0) \leq -c(V_0)(t - t_0)$$

deci  $V[t, x(t; t_0, x_0)]$  tinde către  $-\infty$  când  $t \rightarrow \infty$ , ceea ce contrazice faptul că

$$V[t, x(t; t_0, x_0)] \geq a(|x(t; t_0, x_0)|).$$

Rezultă  $V_0 = 0$  și din  $V[t, x(t; t_0, x_0)] \rightarrow 0$  rezultă  $a(|x(t; t_0, x_0)|) \rightarrow 0$  deci  $|x(t; t_0, x_0)| \rightarrow 0$  când  $t \rightarrow \infty$  și teorema e demonstrată.

*Observații.* 1) Considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, y), \frac{dy}{dt} = Y(t, x, y), X(t, 0, 0) \equiv 0, Y(t, 0, 0) \equiv 0.$$

Presupunem că există  $V(t, x, y)$  continuă și cu  $V(t, x, y) \geq a(|x|)$ ,  $V(t, 0, 0) \equiv 0$ ,

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0, y_0), y(t+h; t_0, x_0, y_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0)]}{h} \leq$$

$$\leq -c[V(t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))].$$



Atunci soluția  $x = 0$ ,  $y = 0$  este asimptotic stabilă în raport cu componentele  $x$ .

Într-adevăr, demonstrația decurge ca mai sus și se deduce

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0)] = 0$$

și deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(|x(t; t_0, x_0, y_0)|) = 0$$

deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t; t_0, x_0, y_0)| = 0.$$

2) Se vede de asemenea ușor că atât definiția stabilității asimptotice cât și întreaga teoremă se pot relativiza la o mulțime  $M$  de soluții.

TEOREMA 1.5. *Presupunem că există o funcție  $V(t, x)$  cu propriietățile :*

$$a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|),$$

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leq \\ \leq -c(|x(t; t_0, x_0)|).$$

Atunci soluția banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă.

Demonstrație. Fie  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta(\varepsilon) < b^{-1}[a(\varepsilon)]$ ; dacă  $|x| < \delta(\varepsilon)$  rezultă

$$a(|x(t; t_0, x_0)|) \leq V[t, x(t; t_0, x_0)] \leq V(t_0, x_0) \leq \\ \leq b(|x_0|) < b(\delta) < a(\varepsilon)$$

deci  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .

Fie  $|x| < H$  domeniul în care sînt îndeplinite condițiile din enunț,

$$\delta_0 = \delta(H), \quad T(\varepsilon) = \frac{b(\delta_0)}{c[\delta(\varepsilon)]}. \quad \text{Fie } |x_0| < \delta_0. \text{ Să presupunem că pe}$$

$[t_0, t_0 + T]$  am avea  $|x(t; t_0, x_0)| \geq \delta(\varepsilon)$ . Atunci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h; x(t+h; t_0, x_0)] - V[t; x(t; t_0, x_0)]}{h} \leq -c[\delta(\varepsilon)]$$

pentru  $t \in [t_0, t_0 + T]$  și integrînd

$$V[t, x(t; t_0, x_0)] - V[t_0, x_0] \leq -c[\delta(\varepsilon)](t - t_0),$$

$$V[t, x(t; t_0, x_0)] \leq V[t_0, x_0] - c[\delta(\varepsilon)](t - t_0) \leq b(\delta_0) - c[\delta(\varepsilon)](t - t_0).$$

Pentru  $t = t_0 + T$  se capătă

$$V[t, x(t; t_0, x_0)] \leq b(\delta_0) - c[\delta(\varepsilon)]T = 0,$$

ceea ce este contradictoriu. Rezultă că există  $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$  astfel ca  $|x(t_1; t_0, x_0)| < \delta(\varepsilon)$  deci  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_1$ , deci în orice caz pentru  $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$ .

Observații. 1) Dacă

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} b(r),$$

atunci

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$$

și dacă proprietățile din enunț au loc pentru toți  $x$  rezultă și  $\delta_0 = \infty$ . În acest caz spunem că avem de-a face cu stabilitatea în mare.

2) Ca mai sus se vede că dacă sintem în situația din observația 1) de la teorema precedentă și funcția  $V(t, x, y)$  verifică condițiile

$$a(|x|) \leq V(t, x, y) \leq b(|x| + |y|),$$

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0, y_0), y(t+h; t_0, x_0, y_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0)]}{h} \leq$$

$$\leq -c(|x(t; t_0, x_0, y_0)| + |y(t; t_0, x_0, y_0)|),$$

atunci are loc stabilitatea uniformă în raport cu componentele  $x$ . Într-adevăr, ca în demonstrația teoremei se arată că există  $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$  astfel încît

$$|x(t_1; t_0, x_0, y_0)| + |y(t_1; t_0, x_0, y_0)| < \delta(\varepsilon)$$

și apoi totul rezultă din proprietatea lui  $\delta(\varepsilon)$ .

3) În problemele practice este de mare importanță evaluarea numerelor  $\delta(\varepsilon)$ ,  $\delta_0$ ,  $T(\varepsilon)$ . Să observăm că din demonstrația teoremei rezultă că dacă avem la îndemînă funcția  $V(t, x)$  și funcțiile  $a(r)$ ,  $b(r)$ ,  $c(r)$ , putem lua  $\delta(\varepsilon) = b^{-1}[a(\varepsilon)]$ ,  $\delta_0 = \delta(H)$  (și cînd  $V$  e definită pentru orice  $x$ ,  $\delta_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = b^{-1}[a(\infty)]$ ),  $T(\varepsilon) = \frac{b[\delta_0]}{c[\delta(\varepsilon)]}$ .

Să facem acum cîteva observații în legătură cu stabilitatea asimptotică uniformă.

1° În definiția stabilității asimptotice uniforme intervin funcțiile  $\delta(\varepsilon)$  și  $T(\varepsilon)$ . Să arătăm că aceste funcții pot fi alese continue și monotone.

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon_n$  un șir pozitiv, monoton, tinzînd la zero,  $\delta_1(\varepsilon) = \sup_{\varepsilon} \delta(\varepsilon_{n+1})$  pentru  $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon < \varepsilon_n$ ;  $|x_0| < \delta_1(\varepsilon)$  implică  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ . Definim pe  $\delta^*(\varepsilon)$  liniară în  $[\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n]$  și  $\delta^*(\varepsilon_{n+1}) = \delta_1(\varepsilon_{n+2})$ ,  $\delta^*(\varepsilon_n) = \delta_1(\varepsilon_{n+1})$ . Cum  $\delta_1(\varepsilon_{n+1}) \leq \delta_1(\varepsilon_n)$  (căci  $\delta_1(\varepsilon_n)$  a fost definită ca margine superioară a mulțimii numerelor  $\delta$  cu proprietatea că  $|x_0| < \delta$  implică  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon_n$ ) și în plus  $\delta_1(\varepsilon_n) \rightarrow 0$  cînd  $n \rightarrow \infty$ , rezultă că  $\delta_1(\varepsilon_{n+1}) = \delta_1(\varepsilon_n)$  numai pe porțiuni finite ale șirului, pe care le putem suprima, astfel încît  $\delta_1(\varepsilon_n)$  și deci  $\delta^*(\varepsilon)$  să fie strict monoton crescătoare. Funcția  $\delta^*(\varepsilon)$  va fi continuă, strict crescătoare,  $\delta^*(0) = 0$  și  $|x_0| < \delta^*(\varepsilon)$  implică  $|x_0| < \delta^*(\varepsilon_n) = \delta_1(\varepsilon_{n+1})$  ( $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon < \varepsilon_n$ ) deci  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon$ , deci  $\delta^*(\varepsilon)$  are toate proprietățile cerute.

Analog, fie  $T_1(\varepsilon) = \inf_T T(\varepsilon_{n+1})$  pentru  $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon < \varepsilon_n$ ;  $|x_0| < \delta_0$  și  $t \geq t_0 + T_1(\varepsilon)$  implică  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon$ . Definim pe  $T^*(\varepsilon)$  liniară în  $[\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n]$  și  $T^*(\varepsilon_{n+1}) = T_1(\varepsilon_{n+2})$ ,  $T^*(\varepsilon_n) = T_1(\varepsilon_{n+1})$ . Cum  $T_1(\varepsilon_{n+1}) \geq T_1(\varepsilon_n)$  (căci  $T_1(\varepsilon_n)$  a fost definită ca margine inferioară a numerelor  $T$  cu proprietatea că  $t \geq t_0 + T$  implică  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon_n$ ) și

$T_1(\varepsilon_{n+1})$  are această proprietate) și  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_1(\varepsilon_n) = \infty$ , egalitatea  $T_1(\varepsilon_{n+1}) = T_1(\varepsilon_n)$  poate avea loc numai pe porțiuni finite ale șirului pe care le putea suprima.

Funcția  $T^*(\varepsilon)$  e monoton descrescătoare, continuă,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T^*(\varepsilon) = \infty$  și  $t \geq t_0 + T^*(\varepsilon)$  implică  $t \geq t_0 + T^*(\varepsilon_n) = t_0 + T_1(\varepsilon_{n+1})$  deci  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon$ , dacă  $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_n$ .

2° Fie  $\varepsilon(\delta)$  inversa funcției  $\delta(\varepsilon)$  și  $\eta(T)$  inversa funcției  $T(\eta)$ ; avem  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon(|x_0|)$  pentru  $t \geq t_0$ ,  $|x(t; t_0, x_0)| < \eta(t - t_0)$  pentru  $t \geq t_0$ ,  $|x_0| < \delta_0$ . De aici rezultă  $|x(t; t_0, x_0)|^2 < \varepsilon(|x_0|) \eta(t - t_0)$  pentru  $|x_0| < \delta_0$ ,  $t \geq t_0$ . Prin urmare stabilitatea asimptotică uniformă este echivalentă cu existența a două funcții  $\chi(r)$  și  $\psi(T)$ , prima monoton crescătoare, a doua monoton descrescătoare, astfel încît

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq \chi(|x_0|) \psi(t - t_0).$$

3° Dacă  $\chi(r)$  este liniară și  $|f(t, x)| \leq L(r)|x|$  pentru  $|x| < r$ , stabilitatea este exponențială, adică există constante  $\alpha > 0$ , și  $B > 0$  astfel ca

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0|.$$

Construim o funcție Liapunov cu formula

$$V(t, x) = \int_t^{t+T} |x(\tau; t, x)|^2 d\tau.$$

Avem

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq k |x_0| \psi(0),$$

deci

$$|x(\tau; t, x)| \leq k \psi(0) |x| \text{ pentru } \tau \geq t, \text{ deci}$$

$$V(t, x) \leq \int_t^{t+T} k^2 \psi^2(0) |x|^2 d\tau = Tk^2 \psi^2(0) |x|^2.$$

Mai departe,

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau; t, x) = f(\tau, x(\tau; t, x)),$$

$$(x(\tau; t, x), \frac{d}{d\tau} x(\tau; t, x)) = (x(\tau; t, x), f(\tau, x(\tau; t, x))),$$

deci

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} |x(\tau; t, x)|^2 = (x(\tau; t, x), f(\tau, x(\tau; t, x))).$$

Dacă  $|x| \leq r_1$  rezultă

$$|x(\tau; t, x)| \leq k \psi(0) r_1$$

și

$$|f(t, x(\tau; t, x))| \leq L(r_1) |x(\tau; t, x)|.$$

De aici

$$\left| \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} |x(\tau; t, x)|^2 \right| \leq L(r_1) |x(\tau; t, x)|^2,$$

$$\frac{d}{d\tau} \ln |x(\tau; t, x)|^2 \geq -2L(r_1), \quad |x(\tau; t, x)|^2 \geq e^{-2L(r_1)(\tau-t)} |x|^2.$$

Rezultă

$$V(t, x) \geq |x|^2 \int_t^{t+T} e^{-2L(r_1)(\tau-t)} d\tau = |x|^2 \int_0^T e^{-2L(r_1)s} ds.$$

În definitiv

$$\alpha(T) |x|^2 \leq V(t, x) \leq \beta(T) |x|^2.$$

Mai departe,

$$V[t, x(t; t_0, x_0)] = \int_t^{t+T} |x(\tau; t, x(t; t_0, x_0))|^2 d\tau = \int_t^{t+T} |x(\tau; t_0, x_0)|^2 d\tau,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[t, x(t; t_0, x_0)] &= |x(t+T; t_0, x_0)|^2 - |x(t; t_0, x_0)|^2 = \\ &= (|x(t+T; t, x(t; t_0, x_0))| - |x(t; t_0, x_0)|) (|x(t+T; t_0, x_0)| + |x(t; t_0, x_0)|) \leq \\ &\leq (k\psi(T) |x(t; t_0, x_0)| - |x(t; t_0, x_0)|) (|x(t+T; t_0, x_0)| + |x(t; t_0, x_0)|). \end{aligned}$$

$$\text{Alegem pe } T \text{ suficient de mare astfel ca } \psi(T) < \frac{1}{2k} \text{ deci } k\psi(T) < \frac{1}{2};$$

rezultă

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, x(t; t_0, x_0)) &\leq -\frac{1}{2} |x(t; t_0, x_0)| (|x(t+T; t_0, x_0)| + |x(t; t_0, x_0)|) \leq \\ &\leq -\frac{1}{2} |x(t; t_0, x_0)|^2. \end{aligned}$$

Din existența funcției  $V(t, x)$  cu proprietățile stabilite, rezultă imediat stabilitatea exponențială. Din

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq \beta(T) |x(t; t_0, x_0)|^2$$

rezultă

$$-|x(t; t_0, x_0)|^2 \leq -\frac{1}{\beta(T)} V[t, x(t; t_0, x_0)],$$

deci

$$\frac{d}{dt} V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq -\frac{1}{2\beta(T)} V(t, x(t; t_0, x_0)).$$

De aici

$$\begin{aligned} \alpha(T) |x(t; t_0, x_0)|^2 &\leq V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) e^{-\frac{1}{2\beta(T)}(t-t_0)} \leq \\ &\leq \beta(T) |x_0|^2 e^{-\frac{1}{2\beta(T)}(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Rezultă în definitiv

$$|x(t; t_0, x_0)|^2 \leq \frac{\beta(T)}{\alpha(T)} e^{-\frac{1}{2\beta(T)}(t-t_0)} |x_0|^2.$$

sau

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq \sqrt{\frac{\beta(T)}{\alpha(T)}} e^{-\frac{1}{4\beta(T)}(t-t_0)} |x_0|.$$

4° Din cele demonstrate la punctul precedent rezultă că dacă  $f(t, x)$  e omogenă în  $x$  de gradul întâi, atunci stabilitatea asimptotică uniformă implică stabilitatea exponențială.

Într-adevăr, dacă  $f(t, x)$  e omogenă în  $x$  de gradul întâi, rezultă că  $x(t; t_0, kx_0) = kx(t; t_0, x_0)$ ; în ambii membri ai egalității avem soluții ale ecuației și aceste soluții coincid pentru  $t=t_0$ . Într-adevăr

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} kx(t; t_0, x_0) &= k \frac{d}{dt} x(t; t_0, x_0) = \\ &= kf(t, x(t; t_0, x_0)) = f(t, kx(t; t_0, x_0)). \end{aligned}$$

Rezultă

$$|x(t; t_0, kx_0)| = |k| |x(t; t_0, x_0)| \leq k \chi(|x_0|) \psi(t - t_0),$$

deci

$$|x(t; t_0, x_0)| = |x(t; t_0, \frac{|x_0|}{\delta_0} \delta_0)| \leq \frac{1}{\delta_0} |x_0| \chi(\delta_0) \psi(t - t_0),$$

deci

$$\chi^*(r) = \frac{1}{\delta_0} \chi(\delta_0) r$$

ceea ce arată că  $\chi(r)$  poate fi luată liniară.

În particular, dacă  $f(t, x) = A(t)x$  condiția de omogeneitate e îndeplinită și obținem *teorema lui Persidski*: la sistemele liniare stabilitatea asimptotică uniformă implică stabilitatea exponențială.

5° Să arătăm că dacă  $f(t, x)$  este periodică în  $t$  cu perioadă  $\omega$ ,  $f(t + \omega, x) \equiv f(t, x)$ , stabilitatea asimptotică este întotdeauna uniformă.

Stabilitatea uniformă a fost pusă în evidență anterior. Să luăm  $\sigma(\tau) = \sup |x(t_0 + u; t_0, x_0)|$  pentru  $u \geq \tau$ ,  $0 \leq t_0 \leq \omega$ ,  $|x_0| < r$ .

Funcția  $x(t_0 + u; t_0, x_0)$  e periodică în  $t_0$ , continuă și deci marginea superioară construită este de fapt margine superioară pe toată axa  $t_0$ .

Evident,  $\sigma(\tau)$  este monoton descrescătoare; inversa ei este funcția  $T(\varepsilon)$  din definiția stabilității asimptotice uniforme.

Vom stabili acum teorema de existență a funcției Liapunov în cazul stabilității asimptotice uniforme. Există în momentul de față diferite procedee de construcție a funcției Liapunov. Printre acestea vom alege pe cel dat recent de Massera ca fiind cel mai simplu.

**TEOREMA 1.6.** *Dacă soluția banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă, există o funcție  $V(t, x)$  cu toate proprietățile din teorema 1.4.*

*Demonstrație.* Fie  $G(r)$  cu  $G(0) = 0$ ,  $G'(0) = 0$ ,  $G(r) > 0$ ,  $G''(r) > 0$  și  $\alpha > 1$ . Notăm  $g(r) = G''(r)$ . Atunci

$$G(r) = \int_0^r du \int_0^u g(v) dv; \quad G\left(\frac{r}{\alpha}\right) = \int_0^{\frac{r}{\alpha}} du \int_0^u g(v) dv.$$

Punem  $u = \frac{w}{\alpha}$ ; se capătă

$$G\left(\frac{r}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \int_0^r dw \int_0^{\frac{w}{\alpha}} g(v) dv < \frac{1}{\alpha} \int_0^r dw \int_0^w g(v) dv = \frac{1}{\alpha} G(r).$$

Alegem

$$V(t, x) = \sup_{\sigma \geq 0} G(|x(t + \sigma; t, x)|) \frac{1 + \alpha\sigma}{1 + \sigma};$$

pentru  $\sigma = 0$  se capătă  $G(|x|)$  deci  $V(t, x) \geq G(|x|)$ . Fie  $\varepsilon(\delta)$  funcția inversă a lui  $\delta(\varepsilon)$ . Avem

$$|x(t + \sigma; t, x)| < \varepsilon(|x|), \quad G(|x(t + \sigma; t, x)|) < G(\varepsilon(|x|)), \quad \frac{1 + \alpha\sigma}{1 + \sigma} < \alpha$$

deci

$$V(t, x) \leq \alpha G[\varepsilon(|x|)].$$

Pentru  $\sigma \geq T(\varepsilon)$  avem  $|x(t + \sigma; t, x)| < \varepsilon$ , deci dacă  $\sigma \geq T\left(\frac{1}{\alpha}|x|\right)$

rezultă  $|x(t + \sigma; t, x)| < \frac{1}{\alpha}|x|$ , deci  $G(|x(t + \sigma; t, x)|) < G\left(\frac{1}{\alpha}|x|\right)$  și

$$G(|x(t + \sigma; t, x)|) \frac{1 + \alpha\sigma}{1 + \sigma} < \alpha G\left(\frac{1}{\alpha}|x|\right) < G(|x|) \leq V(t, x).$$

Rezultă

$$V(t, x) = \sup_{0 \leq \sigma \leq T \left( \frac{1}{\alpha} |x| \right)} G(|x(t + \sigma; t, x)|) \frac{1 + \alpha \sigma}{1 + \sigma}$$

și deoarece funcția este continuă există un punct  $\sigma_1$  în care marginea superioară este atinsă. Putem deci scrie

$$V(t, x) = G(|x(t + \sigma_1; t, x)|) \frac{1 + \alpha \sigma_1}{1 + \sigma_1}.$$

Fie  $x = x(t; t_0, x_0)$ ,  $x^* = x(t + h; t, x)$ . Avem

$$\begin{aligned} V(t + h, x^*) &= G(|x(t + h + \sigma^*; t + h, x^*)|) \frac{1 + \alpha \sigma^*}{1 + \sigma^*} = \\ &= G(|x(t + h + \sigma^*; t, x)|) \frac{1 + \alpha \sigma^*}{1 + \sigma^*}. \end{aligned}$$

Notăm  $\sigma^* + h = \sigma$ . Avem

$$\begin{aligned} V(t + h, x^*) &= G(|x(t + \sigma; t, x)|) \frac{1 + \alpha \sigma^*}{1 + \sigma^*} = \\ &= G(|x(t + \sigma; t, x)|) \frac{1 + \alpha \sigma}{1 + \sigma} \left[ 1 - \frac{(\alpha - 1)h}{(1 + \sigma^*)(1 + \alpha \sigma)} \right]. \end{aligned}$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} &\frac{1 + \alpha \sigma}{1 + \sigma} \left( 1 - \frac{(\alpha - 1)h}{(1 + \sigma^*)(1 + \alpha \sigma)} \right) = \frac{1 + \alpha \sigma}{1 + \sigma} - \frac{\alpha h - h}{(1 + \sigma)(1 + \sigma^*)} = \\ &= \frac{1 + \sigma^* + \alpha \sigma + \alpha \sigma \sigma^* - \alpha h + h}{(1 + \sigma)(1 + \sigma^*)} = \frac{1 + \sigma^* + \alpha \sigma^* + \alpha \sigma \sigma^* + h}{(1 + \sigma)(1 + \sigma^*)} = \\ &= \frac{1 + \sigma + \alpha \sigma^* (1 + \sigma)}{(1 + \sigma)(1 + \sigma^*)} = \frac{1 + \alpha \sigma^*}{1 + \sigma^*}. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} V(t + h, x^*) &\leq V(t, x) \left[ 1 - \frac{(\alpha - 1)h}{(1 + \sigma^*)(1 + \alpha \sigma)} \right] = V(t, x) - \\ &\quad - \frac{(\alpha - 1)h V(t, x)}{(1 + \sigma^*)(1 + \alpha \sigma)} \end{aligned}$$

deci

$$\frac{V(t + h, x^*) - V(t, x)}{h} \leq - \frac{(\alpha - 1) V(t, x)}{(1 + \sigma^*)(1 + \alpha \sigma)}.$$

Avem  $0 \leq \sigma^* \leq T\left(\frac{1}{\alpha}|x|\right)$ ,  $0 < \sigma \leq T\left(\frac{1}{\alpha}|x^*|\right) + h$ , deci

$$\frac{V(t+h, x^*) - V(t, x)}{h} \leq - \frac{(\alpha - 1)V(t, x)}{\left[1 + T\left(\frac{1}{\alpha}|x^*|\right)\right]\left[1 + \alpha T\left(\frac{1}{\alpha}|x^*|\right) + \alpha h\right]}.$$

Rezultă de aici

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} &\leq \\ &\leq - \frac{(\alpha - 1)G(|x(t; t_0, x_0)|)}{\left[1 + T\left(\frac{1}{\alpha}|x(t; t_0, x_0)|\right)\right]\left[1 + \alpha T\left(\frac{1}{\alpha}|x(t; t_0, x_0)|\right)\right]}. \end{aligned}$$

Am folosit faptul că

$$x^* = x(t+h; t, x) = x(t+h; t, x(t; t_0, x_0)) = x(t+h; t_0, x_0),$$

$$V(t, x) \geq G(|x|), \quad \lim_{h \rightarrow 0} |x^*| = |x(t; t_0, x_0)| \text{ și } T(\varepsilon) \text{ e continuă.}$$

În definitiv am arătat că  $V(t, x)$  verifică toate condițiile din teorema 1.4.

În cele ce urmează vom studia proprietățile de regularitate ale funcției  $V(t, x)$ .

Vom presupune că  $f(t, x)$  are următoarea proprietate: pentru orice pereche  $x_1$  și  $x_2$  cu  $|x_1| \leq h$ ,  $|x_2| \leq h$ ,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L_h(t) |x_1 - x_2|.$$

Pe baza lemei 0.7 rezultă că pentru orice pereche de soluții  $x(t; t_0, x_1)$ ,  $x(t; t_0, x_2)$  care rămân în  $|x| \leq h$  avem

$$|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_2)| \leq |x_1 - x_2| e^{\int_{t_0}^t L_h(s) ds}$$

Am văzut mai înainte că

$$V(t, x) = G(|x(t + \sigma_1; t, x)|) \frac{1 + \alpha \sigma_1}{1 + \sigma_1}, \text{ unde } 0 \leq \sigma_1 \leq T\left(\frac{1}{\alpha}|x|\right).$$

Fie acum  $x_1$  și  $x_2$  astfel ca  $|x_1| < \delta(h)$ ,  $|x_2| < \delta(h)$ ; atunci soluțiile  $x(t; t_0, x_1)$  și  $x(t; t_0, x_2)$  rămân în  $|x| \leq h$ . Notăm

$$T_1 = T\left(\frac{1}{\alpha}|x_1|\right), \quad T_2 = T\left(\frac{1}{\alpha}|x_2|\right).$$



Avem

$$\left| G(|x(t + \sigma_1; t, x_1)|) \frac{1 + \alpha \sigma_1}{1 + \sigma_1} - G(|x(t + \sigma_1; t, x_2)|) \frac{1 + \alpha \sigma_1}{1 + \sigma_1} \right| \leq \\ \leq \alpha G'(r_0) \left| |x(t + \sigma_1; t, x_1)| - |x(t + \sigma_1; t, x_2)| \right|,$$

$r_0$  fiind cuprins între  $|x(t + \sigma_1; t, x_1)|$  și  $|x(t + \sigma_1; t, x_2)|$  deci  $0 \leq r_0 < h$ .

Cum  $G'(r)$  e monotonă, rezultă  $G'(r_0) < G'(h)$ .

Rezultă

$$\left| \{ G(|x(t + \sigma_1; t, x_1)|) - G(|x(t + \sigma_1; t, x_2)|) \} \frac{1 + \alpha \sigma_1}{1 + \sigma_1} \right| \leq \\ \leq \alpha G'(h) e^{\int_t^{t+T_1} L_h(s) ds} |x_1 - x_2|.$$

Deci

$$- \alpha G'(h) e^{\int_t^{t+T_1} L_h(s) ds} |x_1 - x_2| + G(|x(t + \sigma_1; t, x_1)|) \frac{1 + \alpha \sigma_1}{1 + \sigma_1} \leq \\ \leq G(|x(t + \sigma_1; t, x_2)|) \frac{1 + \alpha \sigma_1}{1 + \sigma_1}.$$

De aici

$$- \alpha G'(h) e^{\int_t^{t+T_1} L_h(s) ds} |x_1 - x_2| + V(t, x_1) \leq G(|x(t + \sigma_1; t, x_2)|) \frac{1 + \alpha \sigma_1}{1 + \sigma_1} \leq \\ \leq V(t, x_2).$$

Prin urmare

$$V(t, x_1) - V(t, x_2) \leq \alpha G'(h) e^{\int_t^{t+T_1} L_h(s) ds} |x_1 - x_2|.$$

Aceleași calcule dau

$$V(t, x_2) - V(t, x_1) \leq \alpha G'(h) e^{\int_t^{t+T_2} L_h(s) ds} |x_1 - x_2|.$$

Fie

$$\bar{T} = \max(T_1, T_2).$$

Rezultă

$$|V(t, x_2) - V(t, x_1)| \leq \alpha G'(h) e^{\int_t^{t+\bar{T}} L_h(s) ds} |x_1 - x_2|$$

sau

$$|V(t, x_2) - V(t, x_1)| \leq M(h, t, r) |x_1 - x_2|$$

pentru  $r \leq |x_1| < \delta(h)$ ,  $r \leq |x_2| < \delta(h)$ ,  $t \geq 0$ ,

$$M(h; t, r) = \alpha G'(h) e^{\int_t^{t+T(\frac{1}{\alpha}r)} L_h(s) ds}.$$

Dacă  $L_h$  este constantă, sau dacă are proprietatea  $\left| \int_t^{t+u} L_h(s) ds \right| \leq K|u|$ , atunci  $M$  nu depinde de  $t$ .

În cele ce urmează vom face această ipoteză. De asemenea vom presupune pe  $h$  fixat.

Alegînd pe  $G(r)$  astfel ca

$$G'(r) \leq A e^{-KT(\frac{1}{\alpha}\delta(r))}$$

putem obține

$$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq M |x_1 - x_2| \text{ pentru } |x_i| \leq h_0.$$

Într-adevăr, să notăm

$$|x(t + \sigma_1; t, x_1)| = r_1, \quad |x(t + \sigma_1; t, x_2)| = r_2.$$

Dacă  $r_2 \geq r_1$  avem  $G(r_2) \geq G(r_1)$  deci

$$\begin{aligned} V(t, x_2) &\geq G(|x(t + \sigma_1; t, x_2)|) \frac{1 + \alpha\sigma_1}{1 + \sigma_1} \geq \\ &\geq G(|x(t + \sigma_1; t, x_1)|) \frac{1 + \alpha\sigma_1}{1 + \sigma_1} = V(t, x_1). \end{aligned}$$

Dacă  $r_2 \leq r_1$  putem scrie

$$\begin{aligned} 0 &\leq G(r_1) - G(r_2) = G'(\rho)(r_1 - r_2) \leq G'(r_1)(r_1 - r_2) \leq \\ &\leq A e^{-KT(\frac{1}{\alpha}\delta(r_1))}(r_1 - r_2) \leq A e^{-KT(\frac{1}{\alpha}\delta(r_1))} |x(t + \sigma_1; t, x_1) - x(t + \\ &+ \sigma_1; t, x_2)| \leq A e^{-KT(\frac{1}{\alpha}\delta(r_1))} e^{KT(\frac{1}{\alpha}|x_1|)} |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Din

$$|x(t + \sigma_1; t, x_1)| = r_1$$

rezultă

$$|x_1| \geq \delta(r_1),$$

deci

$$T\left(\frac{1}{\alpha} |x_1|\right) \leq T\left(\frac{1}{\alpha} \delta(r_1)\right)$$

deci

$$0 \leq G(r_1) - G(r_2) \leq A |x_1 - x_2|.$$

De aici

$$0 \leq V(t, x_1) - G(|x(t + \sigma_1; t, x_2)|) \frac{1 + \alpha\sigma_1}{1 + \sigma_1} \leq \alpha A |x_1 - x_2| (*)$$

deci

$$V(t, x_2) \geq G(|x(t + \sigma_1; t, x_2)|) \frac{1 + \alpha\sigma_1}{1 + \sigma_1} \geq V(t, x_1) - \alpha A |x_1 - x_2|.$$

Rezultă astfel în toate cazurile

$$V(t, x_2) - V(t, x_1) \geq -\alpha A |x_1 - x_2|.$$

Schimbînd acum rolurile lui  $x_1$  și  $x_2$  se capătă

$$V(t, x_1) - V(t, x_2) \geq -\alpha A |x_1 - x_2|$$

deci în definitiv

$$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq \alpha A |x_1 - x_2|,$$

dacă  $|x_i| \neq 0$ .

Dacă  $x_2 = 0$ , prima inegalitate (\*) dă  $0 \leq V(t, x_1) \leq \alpha A |x_1|$ , deci relația obținută e valabilă și în acest caz. Dacă  $x_1 = x_2 = 0$  relația e banală.

Rămîne de arătat că putem alege pe  $G$  astfel încît să verifice condiția cerută. Pentru aceasta nu avem decît să luăm

$$G(r) = A \int_0^r e^{-KT\left(\frac{1}{\alpha} \delta(r)\right)} dr;$$

avem  $G(0) = 0$ ,  $G'(r) = A e^{-KT\left(\frac{1}{\alpha} \delta(r)\right)} > 0$ ,  $G'(0) = 0$ , căci  $\delta(0) = 0$ ,

$T(0) = \infty$ , și  $G'(r)$  e monoton crescătoare deci  $G''(r)$  există aproape peste tot și e pozitivă.

În definitiv putem formula:

TEOREMA 1.6'. *Dacă soluția banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă și*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L_h(t) |x_1 - x_2| \text{ pentru } |x_1| \leq h, |x_2| \leq h \text{ și}$$

$$\left| \int_t^{t+u} L_h(s) ds \right| \leq K |u|,$$

există o funcție  $V(t, x)$  cu proprietățile

$$1^\circ a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|);$$

$$2^\circ \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leq$$

$$\leq -c(|x(t; t_0, x_0)|);$$

$$3^\circ |V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq M |x_1 - x_2| \text{ pentru } |x_1| \leq \delta(\delta_0), |x_2| \leq \delta(\delta_0).$$

Această teoremă va juca un rol deosebit în ceea ce urmează. Pe baza ei vom deduce o serie de propoziții care subliniază însemnătatea stabilității asimptotice uniforme.

Să observăm în încheierea acestor considerații că dacă soluția banală este uniform asimptotic stabilă în mare,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$  deci  $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \varepsilon(\delta) = \infty$ , și cum  $a(r) = G(r)$ ,  $b(r) = \alpha G(\varepsilon(r))$  rezultă

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} b(r) = \infty.$$

De asemenea, dacă  $f$  este periodică în raport cu  $t$  de perioadă  $\omega$ ,  $V(t, x)$  este periodică pe perioada  $\omega$  și dacă în particular  $f$  nu depinde de  $t$ ,  $V$  nu depinde de  $t$ . Aceste fapte se arată la fel ca în cazul stabilității uniforme.

Vom mai da o teoremă care reprezintă o slăbire a teoremei generale 1.5 în cazul sistemelor periodice în  $t$ , respectiv independente de  $t$ .

**TEOREMA 1.5'.** Fie  $f(t, x)$  periodică în  $t$ , cu perioada  $\omega$ :  $f(t + \omega, x) \equiv f(t, x)$ . Dacă există  $V(t, x)$  periodică cu perioada  $\omega$  și cu proprietățile:

$$a) a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|), b(h_0) < a(h_1), h_0 < h_1 < h;$$

$$b) \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t, x)] - V[t, x]}{h} \leq 0 \text{ pentru } |x| \leq h$$

egalitatea din b) putînd avea loc numai în punctele unei mulțimi  $\mathfrak{M}$  care nu conține semitraectorii întregi, atunci soluția  $x = 0$  este asimptotic stabilă și sfera  $|x| < h_0$  se află în domeniul de atracție.

**Demonstrație.** Stabilitatea simplă și faptul că  $|x_0| < h_0$  implică  $|x(t; t_0, x_0)| < h_1$  rezultă din

$$a(|x(t; t_0, x_0)|) \leq V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) \leq b(|x_0|) < b(h_0) < a(h_1).$$

Presupunem că există o traiectorie și un număr pozitiv  $\eta$  astfel ca  $|x(t; t_0, x_0)| > \eta$  pentru  $t > t_0$ ,  $|x_0| \leq h_0$ . Considerăm funcția  $V^*(t) = V(t, x(t; t_0, x_0))$ . Această funcție e monoton descrescătoare, deci există  $V_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} V^*(t)$  și  $V^*(t) \geq V_0$  pentru  $t \geq t_0$ .

Considerăm șirul  $x^{(k)} = x(t_0 + k\omega; t_0, x_0)$ ; din  $|x^{(k)}| < h_1$  rezultă că se poate extrage un subșir convergent, fie  $x_0^*$  limita lui; atunci  $x_0^* \neq 0$ .

Avem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V^*(t_0 + k\omega) = V_0; V^*(t_0 + k\omega) = V(t_0 + k\omega, x^{(k)}) = V(t_0, x^{(k)}),$$

deci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V^*(t_0 + k\omega) = V(t_0, x^*).$$

Rezultă

$$V(t_0, x^*) = V_0.$$

Considerăm semitraectoria  $x(t; t_0, x_0^*)$ ; deoarece această traiectorie nu se poate afla în întregime în  $\mathfrak{M}$ , funcția  $V(t, x(t; t_0, x_0))$  nu e constantă deci există  $t^* > t_0$  astfel ca

$$V(t^*, x(t^*; t_0, x_0)) < V(t_0, x_0^*) = V_0.$$

Pentru orice  $\gamma > 0$  avem

$$|x(t^*; t_0, x_0) - x(t^*; t_0, x^{(k)})| < \gamma$$

dacă  $k > N(\gamma)$ , deci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(t^*, x(t^*, t_0, x^{(k)})) = V(t^*; x(t^*; t_0, x_0^*)) < V_0.$$

Dar

$$\begin{aligned} x(t^*; t_0, x^{(k)}) &= x(t^*; t_0, x(t_0 + k\omega; t_0, x_0)) = \\ &= x(t^* + k\omega, t_0 + k\omega, x(t_0 + k\omega; t_0, x_0)) = x(t^* + k\omega; t_0, x_0) \end{aligned}$$

și

$$V(t^*, x) = V(t^* + k\omega, x)$$

deci

$$V(t^*, x(t^*; t_0, x^{(k)})) = V(t^* + k\omega, x(t^* + k\omega; t_0, x_0)) = V^*(t^* + k\omega).$$

Rezultă

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(t^*; x(t^*; t_0, x^{(k)})) = V_0$$

ceea ce este contradictoriu.

Contradicția obținută demonstrează că pentru orice traiectorie cu

$$|x_0| < h_0 \text{ și orice } \eta > 0 \text{ există } t_1 > t_0 \text{ astfel ca } |x(t_1; t_0, x_0)| < \eta.$$

Alegem  $\eta = \delta(\varepsilon)$  și din  $|x(t_1; t_0, x_0)| < \delta(\varepsilon)$  rezultă

$$|x(t; t_1, x(t_1; t_0, x_0))| < \varepsilon,$$

deci

$$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon \text{ pentru } t > t_1(\varepsilon)$$

deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, x_0) = 0.$$

În încheierea acestui paragraf vom da criterii de stabilitate în care funcțiilor Liapunov li se cer condiții mai slabe și care se bazează toate pe lema asupra inegalităților diferențiale dată în introducere. Aceste criterii au fost stabilite de C. Corduneanu.

TEOREMA 1.5''. Fie  $\omega(t, y)$  o funcție continuă pentru  $t \geq 0$ ,  $0 \leq y < Y \leq +\infty$ ,  $\omega(t, 0) \equiv 0$ ; considerăm ecuația

$$\frac{dy}{dt} = \omega(t, y) \quad (1')$$

și presupunem că prin fiecare punct  $(t_0, y_0)$   $t_0 \geq 0$ ,  $0 \leq y_0 < Y$  trece o soluție unică. Fie  $V(t, x)$  o funcție diferențiabilă, pentru  $t \geq 0$ ,  $|x| < M$ ,

$$V'(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t+h, x+hf(t, x))}{h}; \text{ presupunem că}$$

$$V'(t, x) \leq \omega(t, V(t, x)).$$

1° Dacă soluția  $y = 0$  a ecuației (1') este stabilă și  $V(t, x) \geq a(|x|)$ , soluția  $x = 0$  a sistemului (1) este de asemenea stabilă.

2° Dacă soluția  $y = 0$  a ecuației (1') este uniform stabilă și  $a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|)$ , soluția  $x = 0$  a sistemului (1) este de asemenea uniform stabilă.

3° Dacă soluția  $y = 0$  a ecuației (1) este asimptotic stabilă și  $V(t, x) \geq a(|x|)$ , soluția  $x = 0$  a sistemului (1) este de asemenea asimptotic stabilă.

4° Dacă soluția  $y = 0$  a ecuației (1') este uniform asimptotic stabilă și  $a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|)$ , soluția  $x = 0$  a sistemului (1) este de asemenea uniform asimptotic stabilă.

Demonstrație. 1° Fie  $\varepsilon > 0$ ,  $t_0 \geq 0$ ,  $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$  astfel ca  $0 < y_0 < \eta$  să implice  $y(t; t_0, y_0) < a(\varepsilon)$  pentru  $t \geq t_0$ . Din continuitatea funcției  $V$  rezultă că există  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  astfel ca  $|x_0| < \delta$  să implice  $V(t_0, x_0) < \eta$ . Avem

$$\frac{d}{dt} V(t, x(t; t_0, x_0)) = V'(t, x(t; t_0, x_0)) \leq \omega(t, V(t, x(t; t_0, x_0))).$$

Din lema 0.3 rezultă

$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq y(t; t_0, V(t_0, x_0)) < a(\varepsilon)$ . De aici  $a(|x(t; t_0, x_0)|) < a(\varepsilon)$ , deci  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ , dacă  $|x_0| < \delta(\varepsilon, t_0)$ .

2° Din  $V(t, x) \leq b(|x|)$  rezultă că  $\delta$  poate fi ales independent de  $t_0$  și restul demonstrației decurge ca mai sus, căci și  $\eta$  poate fi ales independent de  $t_0$ .

3° Din

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq y(t; t_0, V(t_0, x_0))$$

și

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; t_0, V(t_0, x_0)) = 0,$$

rezultă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x(t; t_0, x_0)) = 0$$

deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(|x(t; t_0, x_0)|) = 0,$$

de unde se deduce

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, x_0) = 0.$$

4° Din ipoteză rezultă că există  $\eta_0 > 0$  astfel încît pentru  $\varepsilon > 0$  există  $T(\varepsilon) > 0$  cu proprietatea că din  $y_0 < \eta_0$  rezultă  $y(t; t_0, y_0) < a(\varepsilon)$  pentru  $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$ . Alegem pe  $\delta_0$  astfel ca  $b(\delta_0) < \eta_0$ . Dacă  $|x_0| < \delta_0$ , rezultă

$$V(t_0, x_0) < b(|x|) < b(\delta_0) < \eta_0,$$

deci

$$y(t; t_0, V(t_0, x_0)) < a(\varepsilon) \text{ pentru } t \geq t_0 + T(\varepsilon).$$

Din

$$V[t, x(t; t_0, x_0)] \leq y(t; t_0, V(t_0, x_0))$$

rezultă

$$a(|x(t; t_0, x_0)|) < a(\varepsilon) \text{ pentru } t \geq t_0 + T(\varepsilon),$$

deci

$$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon \text{ pentru } t \geq t_0 + T(\varepsilon), \quad |x_0| < \delta_0.$$

Teorema este demonstrată.

### § 3. SISTEME LINIARE

Vom studia acum aspectele specifice ale problemei stabilității în cazul sistemelor liniare. În legătură cu aceasta vom pune în evidență și o serie de proprietăți generale esențiale ale sistemelor liniare.

Un sistem liniar omogen se scrie sub forma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (3)$$

unde vom presupune că  $A(t)$  este o matrice pătratică ale cărei elemente sînt funcții continue de  $t$  definite pentru  $t \geq 0$ . În acest caz teorema de existență are un caracter global; soluțiile sînt prelungibile pe toată semi-axa  $t \geq 0$ .

Pentru a vedea acest lucru este suficient să arătăm că pe orice interval finit soluțiile rămîn mărginite deci nu părăsesc domeniul în care sînt verificate condițiile teoremei de existență.

Fie  $x(t; t_0, x_0)$  soluția sistemului (3) care pentru  $t = t_0$  trece prin punctul  $x_0$ . Avem, pentru valorile  $t$  pentru care soluția este prelungibilă,

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s; t_0, x_0) ds.$$

## Rezultă

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^t |A(s)| |x(s; t_0, x_0)| ds.$$

Aplicînd lema 0.6 (consecința 2), rezultă

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq |x_0| e^{\int_{t_0}^t |A(s)| ds},$$

evaluare din care rezultă că soluția rămîne mărginită pe orice interval finit.

Observăm că am folosit aici evaluarea

$$|A(s)x(s; t_0, x_0)| \leq |A(s)| |x(s; t_0, x_0)|$$

care rezultă direct din definiția normei matricii; anume  $|A| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax|$ .

Să observăm că dacă pentru vectori se folosește norma euclidiană, atunci  $|A|$  este dată de  $\sqrt{\Lambda}$ , unde  $\Lambda$  este cea mai mare valoare proprie a matricii  $A^*A$ , ( $A^*$  este matricea transpusă a lui  $A$ , cînd  $A$  este reală și conjugata lui  $A$  cînd  $A$  e complexă).

Într-adevăr, avem, conform definiției normei euclidiene  $|Ax|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) \leq \Lambda(x, x)$

deci

$$|Ax| \leq \sqrt{\Lambda} |x|,$$

deci

$$|A| \leq \sqrt{\Lambda}.$$

Pe de altă parte, ținînd seama de proprietățile extreme ale valorilor proprii ale matricilor simetrice rezultă că există un vector  $x$  cu  $|x| = 1$  astfel ca  $(A^*Ax, x) = \Lambda$  deci  $|A| = \sqrt{\Lambda}$ .

Dacă  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  sînt două soluții oarecare ale sistemului se verifică imediat că  $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$  este de asemenea soluție a sistemului ( $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  vor fi presupuse numere reale; în general în toată teoria vom lucra numai cu funcții reale, cazurile contrarii fiind subliniate special).

De aici rezultă că mulțimea soluțiilor sistemului (3) formează un spațiu liniar.

Fie  $x(t; t_0, x_0)$  soluția sistemului (3) care pentru  $t = t_0$  trece prin punctul  $x_0$ . Această soluție definește pentru  $t$  și  $t_0$  fixați o transformare a spațiului  $R^n$  în el însuși care atașează punctului  $x_0$  punctul  $x(t; t_0, x_0)$ ; vom nota această transformare cu  $C(t; t_0)$ .

PROPOZIȚIE. Transformarea  $C(t; t_0)$  este liniară.

Demonstrație. Avem

$$C(t; t_0)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = x(t; t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$



Pe de altă parte,

$$\alpha_1 C(t; t_0) x_1 + \alpha_2 C(t; t_0) x_2 = \alpha_1 x(t; t_0, x_1) + \alpha_2 x(t; t_0, x_2)$$

deci fiind o combinație liniară de soluții ale sistemului (3) este soluție a sistemului.

Avem însă

$$x(t; t_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x(t; t_0, x_1) + \alpha_2 x(t; t_0, x_2)$$

deoarece cele două soluții coincid pentru  $t = t_0$ .

Propoziția este astfel demonstrată.

Vom scrie deci  $x(t, t_0, x_0) = C(t; t_0) x_0$ . Odată fixată o bază a spațiului orice transformare liniară este dată printr-o matrice ale cărei coloane sînt imaginile prin transformarea dată ale vectorilor bazei. Vectorii

bazei au coordonatele  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , deci  $C(t; t_0)$  va corespunde

unei matrici ale cărei coloane sînt soluțiile sistemului (3) care la momentul  $t_0$  coincid cu coloanele matricii unitate. Notînd matricea unitate cu  $E$  și nefăcînd distincție între transformarea  $C(t; t_0)$  și matricea corespunzătoare, vom scrie  $C(t_0; t_0) = E$ . Vom spune că  $C(t; t_0)$  este o matrice fundamentală de soluții a sistemului (3); deoarece coloanele matricii  $C(t; t_0)$  sînt soluții ale sistemului (3) putem scrie

$$\frac{dC(t; t_0)}{dt} = A(t) C(t; t_0).$$

Relația  $x(t; t_0, x_0) = C(t; t_0) x_0$  arată că orice soluție a sistemului (3) se exprimă ca o combinație liniară a soluțiilor unui sistem fundamental.

Să punem acum în evidență cîteva proprietăți fundamentale ale matricii  $C(t; t_0)$ .

PROPOZIȚIE. *Are loc relația*

$$C(t; s) C(s; u) = C(t; u).$$

*Demonstrație.* Este suficient să arătăm că pentru orice vector  $x_0$  are loc egalitatea

$$C(t; s) C(s; u) x_0 = C(t; u) x_0.$$

Avem

$$\begin{aligned} C(s; u) x_0 &= x(s; u, x_0), \quad C(t; s) C(s; u) x_0 = x(t; s, C(s; u) x_0) = \\ &= x(t; s, x(s; u, x_0)) = x(t; u, x_0) = C(t; u) x_0 \end{aligned}$$

și relația e dovedită.

Egalitatea

$$x(t; s, x(s; u, x_0)) = x(t; u, x_0)$$

rezultă din faptul că pentru  $t = s$  cele două soluții coincid.

Din această propoziție rezultă imediat punînd  $x = t_0$ ,  $u = t$ :

$$C(t; t_0) C(t_0; t) = E.$$

Aceasta înseamnă că matricea  $C(t; t_0)$  este inversabilă și inversa ei este  $C(t_0; t)$ .

În unele probleme este util să considerăm sistemul adjuncț sistemului (3). Anume, vom numi sistem adjuncț al sistemului (3) sistemul

$$\frac{dy}{dt} = -y A(t),$$

unde  $y$  este un vector linie.

**PROPOZIȚIE.** *Dacă  $x$  este o soluție a sistemului dat iar  $y$  o soluție a sistemului adjuncț, atunci produsul  $yx$  este constant.*

*Demonstrație.* Avem

$$\frac{d}{dt} yx = \frac{dy}{dt} x + y \frac{dx}{dt} = -y A(t) x + y A(t) x = 0,$$

deci  $yx$  este constant. Propoziția e demonstrată.

Evident, întreaga teorie dezvoltată pentru sistemul (3) se transpune corespunzător pentru sistemul adjuncț (care poate fi scris de altfel și sub forma  $\frac{dy}{dt} = -A^*(t)y$ ,  $y$  fiind acum tot un vector coloană). Fie

$\tilde{C}(t; t_0)$  o matrice fundamentală de soluții a sistemului adjuncț; subliniem că de această dată liniile matricii  $\tilde{C}(t; t_0)$  sînt soluții ale sistemului adjuncț. Ținînd seama de propoziția de mai sus rezultă că matricea  $\tilde{C}(t; t_0) C(t; t_0)$  este constantă; deoarece elementele ei sînt produse ale liniilor matricii  $\tilde{C}(t; t_0)$  cu coloanele matricii  $C(t; t_0)$  deci produse dintre soluțiile sistemului adjuncț și ale sistemului (3).

Dar

$$\tilde{C}(t_0; t_0) C(t_0; t_0) = E E = E.$$

Rezultă

$$\tilde{C}(t; t_0) C(t; t_0) = E,$$

deci

$$\tilde{C}(t; t_0) = [C(t; t_0)]^{-1} = C(t_0; t).$$

Am stabilit astfel următoarea

**PROPOZIȚIE.** *Avem  $\tilde{C}(t; t_0) = C(t_0; t)$  deci liniile matricii  $C(t_0; t)$  formează un sistem fundamental de soluții ale sistemului adjuncț.*

Vom încheia aceste considerații generale asupra sistemelor liniare stabilind așa numita „formulă a variației constantelor” care se va dovedi utilă în multe împrejurări.

Să considerăm sistemul neomogen

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t).$$

Fie  $C(t; t_0)$  ca mai sus matricea fundamentală de soluții a sistemului omogen corespunzător. Facem schimbarea de variabile  $x(t) = C(t; t_0)y(t)$ . Obținem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dC(t; t_0)}{dt} y(t) + C(t; t_0) \frac{dy}{dt} = A(t)x + f(t) = \\ &= A(t)C(t; t_0)y(t) + f(t). \end{aligned}$$

Dar

$$\frac{dC(t; t_0)}{dt} = A(t)C(t; t_0);$$

rezultă

$$C(t; t_0) \frac{dy}{dt} = f(t)$$

deci

$$\frac{dy}{dt} = [C(t; t_0)]^{-1} f(t) = C(t_0; t) f(t).$$

De aici

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t C(t_0; s) f(s) ds.$$

Din relația care leagă pe  $x(t)$  de  $y(t)$  rezultă  $x(t_0) = y(t_0)$  deoarece  $C(t_0; t_0) = E$ .

În definitiv se capătă

$$x(t; t_0, x_0) = C(t; t_0) x_0 + C(t; t_0) \int_{t_0}^t C(t_0; s) f(s) ds$$

sau

$$x(t; t_0, x_0) = C(t; t_0) x_0 + \int_{t_0}^t C(t; t_0) C(t_0; s) f(s) ds$$

ceea ce dă

$$x(t; t_0, x_0) = C(t; t_0) x_0 + \int_{t_0}^t C(t; s) f(s) ds.$$

#### § 4. STABILITATEA LA SISTEMELE LINIARE

După această parte introductivă relativă la sistemele liniare putem trece la studiul problemelor de stabilitate pentru asemenea sisteme. Am văzut mai sus, ca o consecință a unei propoziții mai generale, că în cazul

sistemelor liniare pentru care matricea  $A(t)$  este mărginită, stabilitatea asimptotică uniformă este întotdeauna exponențială, adică există constantele  $B$  și  $\alpha$  astfel încît să avem

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0|.$$

Vom da o nouă demonstrație acestei propoziții.

Conform definiției stabilității asimptotice uniforme, există  $\delta_0 > 0$  și  $T(\varepsilon)$  astfel încît dacă  $|x_0| \leq \delta_0$  și  $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$  să rezulte

$$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

Dar

$$|x(t; t_0, x_0)| = |C(t; t_0) x_0|,$$

deci din  $|x_0| < \delta_0$  și  $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$  rezultă

$$|C(t; t_0) x_0| < \varepsilon.$$

În cele ce urmează fixăm pe  $0 < \varepsilon < 1$ .

Fie  $u_0$  un vector cu  $|u_0| \leq 1$ , arbitrar. Atunci  $|\delta_0 u_0| \leq \delta_0$ , deci  $|C(t; t_0) \delta_0 u_0| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$ .

Dar

$$|C(t; t_0) \delta_0 u_0| = \delta_0 |C(t; t_0) u_0|,$$

deci

$$|C(t; t_0) u_0| < \frac{\varepsilon}{\delta_0}.$$

Cum  $u_0$  este arbitrar cu  $|u_0| \leq 1$ , rezultă  $|C(t; t_0)| < \frac{\varepsilon}{\delta_0}$  pentru  $t > t_0 + T(\varepsilon)$ , sau  $|C(t; t_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0 + T_1(\varepsilon)$ , unde am notat  $T_1(\varepsilon) = T(\delta_0 \varepsilon)$ .

Din relația

$$C(t; t_0) = C(t; t_0 + T_1) C(t_0 + T_1; t_0)$$

rezultă

$$|C(t; t_0)| \leq |C(t; t_0 + T_1)| |C(t_0 + T_1; t_0)| < \varepsilon^2 \text{ pentru } t \geq t_0 + 2T_1.$$

Prin inducție se verifică imediat că  $|C(t; t_0)| < \varepsilon^m$  pentru  $t \geq t_0 + mT_1$ .

Fie acum  $t \geq t_0$ , arbitrar. Există  $m \geq 1$  astfel ca

$$t_0 + (m-1)T_1 \leq t < t_0 + mT_1.$$

Atunci  $mT_1 > t - t_0$ ;  $m > \frac{1}{T_1}(t - t_0)$ ;  $\varepsilon^m < \varepsilon^{\frac{1}{T_1}(t-t_0)}$ , căci  $\varepsilon < 1$ .

Pe de altă parte există  $\delta(\varepsilon)$  astfel ca  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  dacă  $|x_0| \leq \delta(\varepsilon)$  și  $t \geq t_0$ . De aici rezultă ca mai sus

$$|C(t; t_0) \delta(\varepsilon) u_0| < \varepsilon \text{ pentru } t \geq t_0,$$

deci

$$|C(t; t_0)| < \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \text{ pentru } t \geq t_0.$$

Din  $t \geq t_0 + (m-1)T_1$  rezultă  $|C(t; t_0)| < \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \varepsilon^{m-1}$ . Într-adevăr, dacă  $m \geq 2$ , această inegalitate rezultă din faptul că  $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$  iar pentru  $m = 1$  din faptul că  $|C(t; t_0)| < \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$  pentru toți  $t \geq t_0$ .

În definitiv, pentru orice  $t \geq t_0$  am obținut

$$|C(t; t_0)| < \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \varepsilon^m$$

deci

$$|C(t; t_0)| < \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \varepsilon^{\frac{1}{T_1}(t-t_0)}.$$

Să notăm  $\frac{1}{\delta(\varepsilon)} = \beta, \alpha = -\frac{1}{T_1} \ln \varepsilon$ . Atunci  $\beta > 0, \alpha > 0, \varepsilon =$

$= e^{-\alpha T_1}$ , și evaluarea obținută devine

$$|C(t; t_0)| < \beta e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Am demonstrat astfel din nou că stabilitatea asimptotică uniformă la sistemele liniare este întotdeauna exponențială. Observăm că în această demonstrație *nu am mai folosit ipoteza că matricea  $A(t)$  este mărginită*.

Cu ajutorul acestei proprietăți fundamentale a sistemelor liniare se demonstrează că dacă soluția banală a unui sistem liniar este uniform asimptotic stabilă, atunci există o funcție Liapunov formă pătratică.

**TEOREMA 1.6''.** *Dacă soluția banală a sistemului (3) este uniform asimptotic stabilă, atunci oricare ar fi forma pătratică  $(W(t)x, x)$ , cu*

$$\lambda_m(x, x) \leq \lambda(t)(x, x) \leq (W(t)x, x) \leq \Lambda(t)(x, x) \leq \Lambda_M(x, x)$$

*unde  $\lambda_m > 0$ , există o formă pătratică  $(V(t)x, x)$  cu*

$$\mu(x, x) \leq (V(t)x, x) \leq M(x, x), \quad \mu > 0$$

*și*

$$\frac{d}{dt} (V(t)x(t), x(t)) = -(W(t)x(t), x(t))$$

*oricare ar fi soluția  $x(t)$  a sistemului (3).*

*Demonstrație.* Definim

$$(V(t)x, x) = \int_t^\infty (W(s)C(s; t)x, C(s; t)x)ds,$$

adică matricea  $V(t)$  este dată de relația

$$V(t) = \int_t^\infty C^*(s; t)W(s)C(s; t)ds.$$

Convergența integralei este asigurată de faptul că

$|C(t; t_0)| < Be^{-\alpha(t-t_0)}$  și că  $|W| < \Lambda$ . Tot de aici rezultă

$$|V(t)| \leq \int_t^\infty Be^{-\alpha(s-t)} \Lambda Be^{-\alpha(s-t)} ds = \Lambda B^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha s} ds = \frac{\Lambda B^2}{2\alpha}.$$

Pentru orice soluție  $x(t; t_0, x_0)$  a sistemului (3) avem

$$\begin{aligned} (V(t)x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)) &= \int_t^\infty (W(s)C(s, t)x(t; t_0, x_0), C(s, t)x(t; t_0, x_0))ds = \\ &= \int_t^\infty (W(s)x(s; t_0, x_0), x(s, t_0, x_0))ds \end{aligned}$$

deci

$$\frac{d}{dt}(V(t)x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)) = -(W(t)x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)).$$

În felul acesta rămîne să demonstrăm numai faptul că

$$(V(t)x, x) \geq \mu(x, x) \text{ cu } \mu > 0.$$

Avem

$$(V(t)x, x) \geq \int_t^\infty \lambda_m(C(s; t)x, C(s; t)x)ds = \lambda_m \int_t^\infty |x(s; t, x)|^2 ds.$$

Dar

$$x(s; t, x) = x + \int_t^s A(u)x(u; t, x)du.$$

De aici, ținînd seama de faptul că  $|x(u; t, x)| \leq B|x|$  pentru  $u \geq t$ , rezultă

$$|x(s; t, x) - x| \leq B|x| \int_t^s |A(u)|du$$

*Presupunînd că matricea  $A$  are proprietatea că*

$$\int_t^s |A(u)|du < \omega(s-t), \quad \text{unde } \omega(r) \rightarrow 0 \text{ cînd } r \rightarrow 0,$$

rezultă că pentru  $t \leq s \leq t + \alpha$  vom avea

$$|x(s; t, x) - x| \leq \frac{1}{2} |x|$$

deci

$$|x(s; t, x)| \geq |x| - |x(s; t, x) - x| \geq \frac{1}{2} |x|.$$

Dar

$$(V(t)x, x) \geq \lambda_m \int_t^\infty |x(s; t, x)|^2 ds > \lambda_m \int_t^{t+\alpha} |x(s; t, x)|^2 ds \geq \frac{\lambda_m}{4} \alpha |x|^2,$$

deci putem lua

$$\mu = \frac{\lambda_m \alpha}{4}.$$

Teorema este complet demonstrată.

*Observație.* Dacă matricea  $A$  este constantă și matricea  $W$  este aleasă independentă de  $t$ , atunci matricea  $V$  nu depinde de  $t$ .

Pentru a demonstra acest lucru observăm că pentru sistemele care nu depind explicit de  $t$  are loc relația

$$x(t + t_0; t_0, x_0) = x(t; 0, x_0)$$

(am stabilit proprietatea corespunzătoare pentru sistemele periodice; dacă sistemul nu depinde de  $t$ , atunci orice  $t_0$  real poate fi considerat perioadă). Această relație se scrie în cazul sistemelor liniare sub forma

$$C(t + t_0; t_0) x_0 = C(t; 0) x_0, \text{ deci } C(t + t_0; t_0) = C(t; 0).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_t^\infty C^*(s; t) W C(s; t) ds = \int_0^\infty C^*(s + t; t) W C(s + t; t) ds = \\ &= \int_0^\infty C^*(s; 0) W C(s; 0) ds, \end{aligned}$$

deci  $V$  nu depinde de  $t$ .

## § 5. SISTEME LINIARE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

Propoziția demonstrată în cadrul observației de mai sus are în realitate un caracter pur algebric pus în evidență încă de Liapunov. Pentru a putea reproduce raționamentele lui Liapunov vom reaminti unele propoziții fundamentale relative la sistemele liniare cu coeficienți constanți și legat de aceasta, reducerea matricilor la forma normală Jordan de care vom avea nevoie și mai târziu.

Fiind dată o transformare liniară  $T$  într-un spațiu liniar  $n$ -dimensional complex și o bază  $e_1, e_2, \dots, e_n$  a spațiului, transformării  $i$  se atașează

o matrice  $A$  care are drept coloane vectorii  $Te_k$  scriși în baza  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Dacă  $y = Tx$ , atunci  $y = Ax$ ,  $x$  și  $y$  fiind scrierea vectorilor în baza  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Într-adevăr, fie

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

Avem

$$\sum_{i=1}^n y_i e_i = \sum_{k=1}^n x_k Te_k;$$

scriind

$$Te_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i$$

rezultă

$$\sum_{i=1}^n y_i e_i = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right) e_i,$$

deci

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k.$$

**PROPOZIȚIE.** Dacă în baza  $e_1, e_2, \dots, e_n$  transformării  $T$  îi corespunde matricea  $A$  iar în baza  $f_1, f_2, \dots, f_n$  îi corespunde matricea  $B$ , atunci  $B = C^{-1}AC$ , unde  $C$  este matricea corespunzătoare trecerii de la o bază la cealaltă.

*Demonstrație.* Elementele  $b_{ij}$  se capătă scriind imaginile vectorilor  $f_j$  în baza  $f_1, \dots, f_n$ . Avem

$$Tf_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} f_i.$$

Fie

$$f_j = \sum_{k=1}^n c_{kj} e_k;$$

rezultă

$$Tf_j = \sum_{k=1}^n c_{kj} Te_k.$$

Dar

$$Te_k = \sum_{l=1}^n a_{lk} e_l,$$

deci

$$Tf_j = \sum_{k=1}^n c_{kj} \sum_{l=1}^n a_{lk} e_l.$$



Pe de altă parte,

$$e_i = \sum_{i=1}^n d_{ii} f_i,$$

unde  $D$  este inversa matricii  $C$ .

Rezultă

$$Tf_j = \sum_{k=1}^n c_{kj} \sum_{l=1}^n a_{lk} \sum_{i=1}^n d_{il} f_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{l,k} d_{il} a_{lk} c_{kj} \right) f_i.$$

În definitiv

$$b_{ij} = \sum_{l,k} d_{il} a_{lk} c_{kj},$$

deci

$$B = DAC = C^{-1}AC.$$

Un vector  $u$  este vector propriu al transformării  $T$  dacă  $u$  nu este nul, și există un număr complex  $\lambda$  astfel ca  $Tu = \lambda u$ . Dacă  $e_1, e_2, \dots, e_n$  este o bază a spațiului și  $A$  matricea corespunzătoare transformării, condiția ca  $u$  să fie vector propriu se scrie  $\sum_{k=1}^n a_{ik} u_k = \lambda u_i$  și se vede că pentru ca să existe un vector  $u$  nenul care să verifice această condiție este necesar și suficient ca  $\det(A - \lambda E) = 0$ . Valorile  $\lambda$  care verifică această ecuație se numesc valorile proprii ale transformării (sau ale matricii). O consecință a propoziției precedente este următoarea: matricile  $A$  și  $C^{-1}AC$  au aceleași valori proprii.

Fie  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  valori proprii distincte ale transformării  $T$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_s$  vectori proprii corespunzători. Vectorii  $u_1, u_2, \dots, u_s$  sînt liniar independenți. Într-adevăr, să presupunem că

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_s u_s = 0.$$

Aplicăm transformarea  $T$  și obținem

$$c_1 Tu_1 + c_2 Tu_2 + \dots + c_s Tu_s = 0.$$

Dar

$$Tu_k = \lambda_k u_k$$

deci

$$c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 u_2 + \dots + c_s \lambda_s u_s = 0.$$

Din

$$\sum c_k u_k = 0$$

se capătă

$$c_s u_s = -c_1 u_1 - c_2 u_2 - \dots - c_{s-1} u_{s-1}.$$

Rezultă

$$\lambda_1 c_1 u_1 + \lambda_2 c_2 u_2 + \dots + \lambda_{s-1} c_{s-1} u_{s-1} - \lambda_s c_1 u_1 - \lambda_s c_2 u_2 - \dots - \lambda_s c_{s-1} u_{s-1} = 0$$

sau

$$(\lambda_1 - \lambda_s) c_1 u_1 + (\lambda_2 - \lambda_s) c_2 u_2 + \dots + (\lambda_{s-1} - \lambda_s) c_{s-1} u_{s-1} = 0.$$

Dacă  $u_1, u_2, \dots, u_{s-1}$  sînt liniar independenți, rezultă

$$(\lambda_k - \lambda_s)c_k = 0, \quad (k = 1, \dots, s-1).$$

Dar prin ipoteză  $\lambda_k - \lambda_s \neq 0$ , deci  $c_k = 0$  pentru  $k = 1, \dots, s-1$ . Dar atunci  $c_s u_s = 0$ , deci  $c_s = 0$ .

Prin urmare independența liniară a sistemului de  $s$  vectori va rezulta prin inducție (pentru  $s = 1$  rezultă din faptul că  $u_1 \neq 0$ ).

Rezultă de aici că dacă transformarea  $T$  admite  $n$  valori proprii distincte, atunci ea admite  $n$  vectori proprii independenți.

Luînd acești vectori  $u_1, u_2, \dots, u_n$  drept bază a spațiului, relațiile  $Tu_k = \lambda_k u_k$  arată că în această bază matricea transformării este diagonală și are pe diagonală elementele  $\lambda_k$ .

Ținînd seama de cele stabilite mai sus rezultă: dacă rădăcinile ecuației  $\det(A - \lambda E) = 0$  sînt distincte, există o matrice  $C$  astfel încît matricea  $C^{-1}AC$  să aibă forma diagonală, elementele diagonale fiind rădăcinile ecuației.

*Aplicație.* Considerăm sistemul  $\frac{dx}{dt} = Ax$ . Presupunem că ecuația

$\det(A - \lambda E) = 0$  pe care o numim ecuația caracteristică a sistemului are rădăcinile distincte.

Conform celor de mai sus există o matrice  $C$  astfel încît  $C^{-1}AC$  să fie diagonală și să aibă pe diagonală elementele  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Facem în sistem schimbarea de variabile  $x = Cy$ ,  $y = C^{-1}x$ . Căpătăm

$$\frac{dy}{dt} = C^{-1} \frac{dx}{dt} = C^{-1} Ax = C^{-1} ACy.$$

Rezultă că sistemul în  $y$  se scrie

$$\frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k.$$

O matrice fundamentală de soluții a sistemului are forma

$$Y = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Rezultă că matricea fundamentală de soluții a sistemului dat se scrie  $X = CY$ .

Matricea  $C$  are drept coloane vectori proprii ai matricii  $A$ .

Rămîne deci de cercetat cazul cînd transformarea  $T$  nu admite  $n$  vectori proprii liniar independenți. Să presupunem că  $e_1, f_1, \dots, h_1$  sînt vectorii proprii liniar independenți.

Vom arăta că se poate alege o bază a spațiului formată din  $k$  grupuri de vectori

$$e_1, \dots, e_p; f_1, \dots, f_q; \dots; h_1, \dots, h_s$$

în care transformarea  $T$  să aibă forma

$$Te_1 = \lambda_1 e_1, \quad Te_2 = e_1 + \lambda_1 e_2, \dots, \quad Te_p = e_{p-1} + \lambda_1 e_p,$$

$$Tf_1 = \lambda_2 f_1, \quad Tf_2 = f_1 + \lambda_2 f_2, \dots, \quad Tf_q = f_{q-1} + \lambda_2 f_q,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Th_1 = \lambda_k h_1, \quad Th_2 = h_1 + \lambda_k h_2, \dots, \quad Th_s = h_{s-1} + \lambda_k h_s.$$

În această bază matricea corespunzătoare transformării va avea forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \\ & & & \lambda_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & \lambda_2 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_s \end{pmatrix}$$

Această formă se numește forma normală Jordan a matricii.

Teorema corespunzătoare se formulează astfel :

*Pentru orice matrice  $A$  există o matrice  $C$  astfel încît matricea  $C^{-1}AC$  să aibă forma normală Jordan.*

În cazul particular cînd există  $n$  vectori proprii liniar independenți, forma normală Jordan se reduce la forma diagonală. Fără ca forma normală să fie diagonală se poate întîmpla ca unele celule jordaniene să fie de ordinul întîi. Forma diagonală corespunde cazului cînd toate celulele sînt de ordinul întîi.

O celulă jordaniană se scrie  $A_1 = \lambda_1 E + I$ . Dacă celula e de ordinul  $p$  avem :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

$$\dots \quad I^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I^p = I^{p+1} = \dots = 0.$$

Un polinom  $P(t)$  se scrie cu ajutorul formulei lui Taylor sub forma :

$$P(t) = P(\lambda_1) + (t - \lambda_1) P'(\lambda_1) + \frac{(t - \lambda_1)^2}{2} P''(\lambda_1) + \dots + \frac{(t - \lambda_1)^n}{n!} P^{(n)}(\lambda_1).$$

Rezultă

$$P(A_1) = P(\lambda_1)E + (A_1 - \lambda_1 E) P'(\lambda_1) + \frac{(A_1 - \lambda_1 E)^2}{2!} P''(\lambda_1) + \dots + \frac{(A_1 - \lambda_1 E)^n}{n!} P^{(n)}(\lambda_1)$$

deci

$$P(A_1) = P(\lambda_1)E + I P'(\lambda_1) + \frac{P''(\lambda_1)}{2!} I^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(\lambda_1)}{n!} I^n$$

sau

$$P(A_1) = P(\lambda_1)E + \frac{P'(\lambda_1)}{1!} I + \frac{P''(\lambda_1)}{2!} I^2 + \dots + \frac{P^{(p-1)}(\lambda_1)}{(p-1)!} I^{p-1}.$$

În definitiv

$$P(A_1) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) \frac{P'(\lambda_1)}{1!} \frac{P''(\lambda_1)}{2!} \dots \frac{P^{(p-1)}(\lambda_1)}{(p-1)!} \\ 0 & P(\lambda_1) \frac{P'(\lambda_1)}{1!} \dots \frac{P^{(p-2)}(\lambda_1)}{(p-1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

Demonstrația existenței bazei de forma dorită o vom face prin inducție în raport cu  $n$ . Dacă  $T$  acționează într-un spațiu unidimensional, matricea corespunzătoare are un singur element și corespunde deci forme normale. Vom presupune teorema adevărată în spații  $n$ -dimensionale și vom demonstra că e adevărată și pentru spații cu  $n+1$  dimensiuni. Un rol fundamental îl va juca în această demonstrație prin inducție următoarea :

LEMĂ. Orice transformare liniară  $T$  într-un spațiu complex  $n$ -dimensional admite cel puțin un subspațiu  $(n-1)$ -dimensional invariant.

Demonstrație. Reamintim că un subspațiu  $R'$  al spațiului liniar  $R$  se numește invariant în raport cu transformarea liniară  $T$  dacă pentru orice  $x \in R'$  avem  $Tx \in R'$ .

Considerăm o bază  $e_1, \dots, e_n$  oarecare; fie  $A = (a_{ij})$  matricea atașată transformării în această bază. Considerăm matricea  $A'$  obținută din  $A$  prin transpunere; fie  $u$  un vector propriu al acestei matrici. Avem deci relația  $\sum a_{ji} u_j = \lambda u_i$ . Considerăm relația  $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0$ . Deoarece  $u \neq 0$ , mulțimea soluțiilor acestei ecuații formează un subspațiu liniar



deci

$$\begin{aligned}
 Te' = & \tau e' + \tau \chi_1 e_1 + \dots + \tau \chi_p e_p + \tau \mu_1 f_1 + \dots + \tau \mu_q f_q + \dots + \tau \omega_1 h_1 + \\
 & + \dots + \tau \omega_s h_s + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_q f_q + \dots + \delta_1 h_1 + \\
 & + \dots + \delta_s h_s - (\lambda_1 \chi_1 + \chi_2) e_1 - \dots - \chi_p \lambda_1 e_p - (\lambda_2 \mu_1 + \mu_2) f_1 - \dots - \\
 & - \lambda_2 \mu_q f_q - \dots - (\lambda_k \omega_1 + \omega_2) h_1 - \dots - \lambda_k \omega_s h_s = \tau e' + [\alpha_1 + \chi_1(\tau - \\
 & - \lambda_1) - \chi_2] e_1 + \dots + [\alpha_p + \chi_p(\tau - \lambda_1)] e_p + [\beta_1 + \mu_1(\tau - \lambda_2) - \mu_2] f_1 + \\
 & + \dots + [\beta_q + \mu_q(\tau - \lambda_2)] f_q + \dots \\
 & + [\delta_1 + \omega_1(\tau - \lambda_k) - \omega_2] h_1 + \dots + [\delta_s + \omega_s(\tau - \lambda_k)] h_s.
 \end{aligned}$$

Dacă  $\tau$  e diferit de  $\lambda_j$  se pot determina pe rînd coeficienții  $\chi, \mu, \dots, \omega$  astfel încît să rămînă  $Te' = \tau e'$  și se vede că adăugînd pe  $e'$  la baza din  $R'$  obținem o bază normală în  $R$ . Dacă  $\tau$  e diferit de unele din valorile  $\lambda_j$  putem alege coeficienții corespunzători acestor valori.

Pentru simplificare să presupunem că  $\tau = \lambda_1, \tau = \lambda_2, \tau \neq \lambda_j, j > 2$ .  
Rămîne

$$Te' = \tau e' + (\alpha_1 - \chi_2) e_1 + \dots + \alpha_p e_p + (\beta_1 - \mu_2) f_1 + \dots + \beta_q f_q.$$

Alegem  $\chi_2 = \alpha_1, \dots, \mu_2 = \beta_1, \dots$  și rămîne

$$Te' = \tau e' + \alpha_p e_p + \beta_q f_q.$$

Presupunem  $p > q$ .

Alegem acum baza canonică în  $R$  în modul următor : punem

$$e'_{p+1} = e', e'_p = Te'_{p+1} - \tau e'_{p+1}, e'_{p-1} = Te'_p - \tau e'_p, \dots, e'_1 = Te'_2 - \tau e'_2.$$

Luăm prima grupă formată din vectorii  $e'_1, \dots, e'_{p+1}$  iar celelalte grupe rămîn  $f_1 \dots f_q, \dots, h_1 \dots h_s$ . Pentru a arăta că avem de-a face cu o bază canonică rămîne de verificat că  $e'_1 \dots e'_{p+1}$  se comportă ca o parte a unei baze canonice.

Avem

$$Te'_2 = e'_1 + \tau e'_2, \dots, Te'_p = e'_{p-1} + \tau e'_p, Te'_{p+1} = e'_p + \tau e'_{p+1}$$

deci ne mai rămîne de verificat numai faptul că  $Te'_1 = \tau e'_s$ .

$$\begin{aligned}
 e'_p = & Te' - \tau e' = \alpha_p e_p + \beta_q f_q, e'_{p-1} = \alpha_p Te_p + \beta_q Tf_q - \tau \alpha_p e_p - \tau \beta_q f_q = \\
 = & \alpha_p (e_{p-1} + \tau e_p) + \beta_q (f_{q-1} + \tau f_q) - \tau \alpha_p e_p - \tau \beta_q f_q = \alpha_p e_{p-1} + \beta_q f_{q-1}.
 \end{aligned}$$

Continuînd,  $e'_{p-q} = \alpha_p e_{p-q}, \dots, e'_1 = \alpha_p e_1$ , deci  $Te'_1 = \alpha_p Te_1 = \tau \alpha_p e_1 = \tau e'_1$ . Teorema este astfel demonstrată.



Notăm, prin analogie,

$$E + \frac{1}{1!} A(t-t_0) + \frac{1}{2!} A^2(t-t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} A^n(t-t_0)^n + \dots = e^{A(t-t_0)}.$$

Cu această notație soluția sistemului se scrie

$$x(t; t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)} x_0.$$

Să observăm că seriile de puteri corespunzătoare seriei matriciale pot fi derivate termen cu termen și avem

$$\frac{d}{dt} e^{A(t-t_0)} = A e^{A(t-t_0)};$$

cu  $e^{A(t_0-t_0)} = E$ , rezultă că  $e^{A(t-t_0)}$  reprezintă un sistem fundamental de soluții.

Dacă  $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ , atunci  $A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & 0 \\ 0 & A_2^n \end{pmatrix}$ , deci

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_k t} \end{pmatrix},$$

$J_1, \dots, J_k$  fiind celulele jordaniene din care e formată matricea  $B$ .

Rămâne deci de precizat structura unei matrici  $e^{Jt}$ , unde  $J$  e o celulă jordaniană.

Avem

$$e^{Jt} = E + \frac{t}{1!} J + \frac{t^2}{2!} J^2 + \dots + \frac{t^n}{n!} J^n + \dots$$

Dar

$$J = \lambda E + I,$$

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k \frac{k\lambda^{k-1}}{1!} & \frac{k(k-1)\lambda^{k-2}}{2!} & \dots & \frac{k(k-1)\dots(k-p+2)}{(p-1)!} \lambda^{k-p+1} \\ 0 & \lambda^k & \frac{k\lambda^{k-1}}{1!} & \dots & \frac{k(k-1)\dots(k-p+3)}{(p-2)!} \lambda^{k-p+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^k \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 e^{Jt} &= E + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \frac{\lambda^{k-1} t^k}{(k-1)!} & \frac{\lambda^{k-2} t^k}{2!(k-2)!} & \cdots & \frac{\lambda^{k-p+1} t^k}{(p-1)!(k-p+1)!} \\ 0 & \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \frac{\lambda^{k-1} t^k}{(k-1)!} & \cdots & \frac{\lambda^{k-p+2} t^k}{(p-2)!(k-p+2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\lambda^k t^k}{k!} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{t^2}{2!} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2} t^{k-2}}{(k-2)!} & \cdots \\ 0 & 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \frac{t}{1!} e^{\lambda t} \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} \cdots \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \frac{t}{1!} e^{\lambda t} \cdots \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}
 \end{aligned}$$

În acest fel structura soluțiilor sistemelor liniare cu coeficienți constanți este complet determinată. Comportarea soluțiilor depinde de structura formei normale a matricii  $A$ . Numerele  $\lambda_k$ , valorile proprii ale matricii  $A$ , joacă rolul esențial. Anume, dacă  $\Re \lambda_k < 0$ , atunci toate soluțiile tind către zero când  $t \rightarrow \infty$ ; acesta este cazul oscilațiilor amortizate. Dacă  $\lambda_k$  sînt reale avem așa-numitul caz de comportare aperiodică; dacă  $\lambda_k$  au părți imaginare nenule apar termeni oscilatori. Dacă cel puțin pentru

un  $k$  avem  $\Re \lambda_k > 0$ , apar oscilații a căror amplitudine crește când  $t \rightarrow \infty$ . Dacă toți  $\lambda_k$  au părți reale nule sau negative avem oscilații stabile (mărginite) cu condiția că dacă  $\Re \lambda_k = 0$  celula jordaniană respectivă să fie de dimensiune 1; dacă există o rădăcină cu parte reală nulă pentru care celula jordaniană are dimensiune mai mare decât 1 apar termeni în  $t$  care fac ca soluția să fie nemărginită; acești termeni sînt numiți uneori termeni seculari. Dacă toate rădăcinile au părți reale nule și forma normală e diagonală soluțiile sînt mărginite pe toată axa. În acest caz soluțiile sînt în general funcții aproape-periodice.

### § 6. FUNCȚIA LIAPUNOV LA SISTEME LINIARE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

Să considerăm o formă liniară  $(\alpha, x)$  și să vedem ce condiții trebuie să verifice vectorul  $\alpha$  pentru ca  $\frac{d}{dt}(\alpha, x) = \lambda(\alpha, x)$ ,  $x$  fiind soluție a sistemului (3) cu matrice  $A$  constantă.

Avem

$$\frac{d}{dt}(\alpha, x) = \left( \alpha, \frac{dx}{dt} \right) = (\alpha, Ax) = (A^* \alpha, x) = (\lambda \alpha, x).$$

Dacă  $A^* \alpha = \lambda \alpha$  deci dacă  $\alpha$  este vector propriu al matricii conjugate a matricii  $A$  și  $\lambda$  este valoare proprie a matricii  $A$ , atunci relația este sigur verificată.

Să vedem acum în ce condiție există o formă pătratică  $V$  de forma  $V = (\alpha, x)(\beta, x)$  cu  $\frac{dV}{dt} = \lambda V$ . Avem,  $x$  fiind soluție a sistemului,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \left( \alpha, \frac{dx}{dt} \right) (\beta, x) + (\alpha, x) \left( \beta, \frac{dx}{dt} \right) = (\alpha, Ax) (\beta, x) + (\alpha, x) (\beta, Ax) = \\ &= \lambda(\alpha, x)(\beta, x). \end{aligned}$$

Această egalitate este verificată dacă  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ , unde  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  sînt valori proprii ale lui  $A$  iar  $\alpha$  și  $\beta$  sînt vectori proprii pentru  $A^*$ . Să vedem acum cum se exprimă condiția generală ca să existe o formă pătratică  $V = (Bx, x)$  astfel ca  $\frac{dV}{dt} = \lambda V$ .

Avem

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \left( B \frac{dx}{dt}, x \right) + \left( Bx, \frac{dx}{dt} \right) = (BAx, x) + (Bx, Ax) = (BAx, x) + \\ &+ (A^* Bx, x) = ((BA + A^* B)x, x). \end{aligned}$$

Condiția

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V$$

devine

$$((BA + A^*B)x, x) = (\lambda Bx, x)$$

și deci

$$BA + A^*B = \lambda B,$$

sau

$$BA + A^*B - \lambda B = 0.$$

Această ecuație poate fi considerată ca un sistem liniar în elementele matricii  $B$ ; sistemul admite soluție nebanală dacă și numai dacă determinantul  $D(\lambda)$  este egal cu zero.

Am văzut însă că dacă  $\lambda$  e de forma  $\lambda_1 + \lambda_2$ , unde  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  sînt valori proprii ale matricii  $A$  există forme  $V$  cu proprietatea dorită. Dar gradul ecuației  $D(\lambda) = 0$  este egal cu numărul valorilor de forma  $\lambda_1 + \lambda_2$  și este egal cu  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Rezultă de aici că valorile de forma  $\lambda_1 + \lambda_2$  reprezintă

toate rădăcinile ecuației  $D(\lambda) = 0$ , dacă sînt distincte. Dacă aceste numere nu sînt distincte raționăm în felul următor. Fie  $\lambda^*$  o rădăcină a ecuației  $D(\lambda) = 0$  care nu este de forma  $\lambda_1 + \lambda_2$ ,  $\alpha$  cea mai mică distanță de la  $\lambda^*$  la numerele de forma  $\lambda_1 + \lambda_2$ ; printr-o modificare suficient de mică a matricii  $A$  putem face ca numerele  $\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2$  să fie distincte și să difere de numerele  $\lambda_1 + \lambda_2$  cu mai puțin decît  $\frac{\alpha}{4}$  iar  $\tilde{\lambda}^*$  să difere de  $\lambda^*$  cu mai puțin de  $\frac{\alpha}{4}$ .

Rezultă că  $\tilde{\lambda}^*$  coincide cu unul din numerele  $\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2$ ; avem

$$\begin{aligned} \alpha = |\lambda^* - (\lambda_1 + \lambda_2)| &\leq |\lambda^* - \tilde{\lambda}^*| + |\tilde{\lambda}^* - (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2)| + |(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2) - \\ &- (\lambda_1 + \lambda_2)| < \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

ceea ce este contradictoriu. Prin urmare în toate cazurile rădăcinile ecuației  $D(\lambda) = 0$  sînt toate de forma  $\lambda_1 + \lambda_2$ ; rezultă că dacă rădăcinile  $\lambda_i$  ale ecuației caracteristice a matricii  $A$  sînt nenule și toate sumele  $\lambda_i + \lambda_j$  sînt diferite de zero vom avea  $D(0) \neq 0$ . Dar de aici va rezulta că pentru orice formă pătratică  $(Cx, x)$  există o formă pătratică  $(Bx, x)$  astfel ca

$$\frac{d}{dt}(Bx, x) = (Cx, x). \text{ Într-adevăr, } \frac{d}{dt}(Bx, x) = ((BA + A^*B)x, x)$$

și obținem condiția  $BA + A^*B = C$ . Considerat ca un sistem liniar în elementele matricii  $B$ , acest sistem are soluții oricare ar fi  $C$  dacă și numai dacă determinantul sistemului este diferit de zero; dar acest determinant este chiar  $D(0)$  care în condițiile noastre este diferit de zero. Se vede acum că forma  $B$  rezultă în acest caz unic determinată.

Din forma generală a soluției sistemelor liniare cu coeficienți constanți se vede că soluția banală a sistemelor liniare cu coeficienți constanți este asimptotic stabilă dacă și numai dacă rădăcinile ecuației caracteristice a matricii  $A$  au părți reale negative. În acest caz condiția formulată mai sus ca  $D(0) \neq 0$  este evident îndeplinită, deci forma  $(Bx, x)$  există, oricare ar fi  $(Cx, x)$ . Să arătăm că dacă  $(Cx, x)$  este o formă pătratică negativ definită, atunci forma pătratică  $(Bx, x)$  este pozitiv definită. Într-adevăr, fie  $x_0 \neq 0$  astfel ca  $(Bx_0, x_0) \leq 0$ . Din

$$\frac{d}{dt}(Bx(t; 0, x_0), x(t; 0, x_0)) = (Cx(t; 0, x_0), x(t; 0, x_0)) < 0$$

rezultă că pentru  $t_0 > 0$  avem

$$(Bx(t_0; 0, x_0), x(t_0; 0, x_0)) < 0.$$

Pe baza teoremei de nestabilitate soluția banală a sistemului (3) ar rezulta instabilă, ceea ce contrazice ipoteza.

Prin urmare, am stabilit, cu mijloace nealgebrice, următorul fapt algebric: *Dacă valorile proprii ale matricii  $A$  au părți reale negative, oricare ar fi matricea  $C$  negativ definită, există o matrice  $B$  pozitiv definită unică astfel ca*

$$BA + A^*B = C.$$

Prezintă interes demonstrația pur algebrică a acestei propoziții. Asemenea demonstrație a fost dată în 1956 de W. Hahn folosind forma canonică a matricilor.

## § 7. TEORIA STABILITĂȚII DUPĂ PRIMA APROXIMAȚIE

Una din problemele centrale ale teoriei stabilității este următoarea.

Presupunem că avem de studiat stabilitatea soluției  $x_0(t)$  a sistemului (1). Conform procedurii descris încă de la început trecem la sistemul de ecuații al mișcării perturbate. Punem

$$y = x - x_0(t)$$

și obținem

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt} = f(t, x) - f(t, x_0) = f(t, y + x_0(t)) - f(t, x_0(t)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t)) y + o(|y|) \end{aligned}$$

Am notat cu  $\frac{\partial f}{\partial x}$  matricea  $\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}$ .

În mod firesc se pune problema neglijării termenilor de forma  $o(|y|)$ ; practic, așa se și procedează în majoritatea cazurilor. Justificarea

acestui procedeu este dată de teoria stabilității după prima aproximație. Teorema fundamentală a acestei teorii arată că dacă soluția banală a sistemului liniar de primă aproximație este uniform asimptotic stabilă, neglijarea termenilor de grad superior în studiul stabilității este admisă.

TEOREMA 1.7. *Considerăm sistemul :*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + Y(t, y), \quad (4)$$

unde  $A(t)$  este mărginită (sau mai general  $\int_s^t |A(u)| du = \omega(t-s)$ ) și  $|Y(t, y)| < c|y|$  pentru  $|y| < h$ ,  $c$  fiind o constantă suficient de mică. Dacă soluția banală a sistemului liniar de primă aproximație este uniform asimptotic stabilă, atunci soluția banală a sistemului (4) este uniform asimptotic stabilă.

*Demonstrație.* Fie  $y(t; t_0, y_0)$  o soluție a sistemului (4).

Fie  $(V(t)x, x)$  forma pătratică construită pentru sistemul (3) pe baza teoremei 1.6'', cu  $W(t) = E$ . Vom demonstra că această funcție îndeplinește în raport cu sistemul (4) toate condițiile din teorema 1.5. Pentru aceasta avem de dovedit numai că

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{(V(t)y(t+h; t_0, y_0), y(t+h; t_0, y_0)) - (V(t)y(t; t_0, y_0), y(t; t_0, y_0))}{h} \leq -c(|y(t; t_0, y_0)|).$$

Fie

$$V^*(t) = (V(t)y(t; t_0, y_0), y(t; t_0, y_0)).$$

Funcția  $V^*(t)$  este chiar derivabilă și avem

$$\begin{aligned} \frac{dV^*(t)}{dt} &= 2 \left( V(t)y(t; t_0, y_0), \frac{dy(t; t_0, y_0)}{dt} \right) + \left( \frac{dV}{dt} y(t; t_0, y_0), y(t; t_0, y_0) \right) = \\ &= 2(V(t)y(t; t_0, y_0), A(t)y(t; t_0, y_0)) + 2(V(t)y(t; t_0, y_0), Y(t, y(t; t_0, y_0))) + \\ &\quad + \left( \frac{dV}{dt} y(t; t_0, y_0), y(t; t_0, y_0) \right). \end{aligned}$$

Considerăm soluția  $x(u; t, y(t; t_0, y_0))$  a sistemului (3) și fie

$$V^{**}(u) = (V(u)x(u; t, y(t; t_0, y_0)), x(u; t, y(t; t_0, y_0)))$$

Conform celor stabilite în teorema 1.6'' avem

$$\frac{dV^{**}(u)}{du} = -|x(u; t, y(t; t_0, y_0))|^2.$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} \frac{dV^{**}(u)}{du} &= 2(V(u)x(u; t, y(t; t_0, y_0)), A(u)x(u; t, y(t; t_0, y_0))) + \\ &\quad + \frac{dV}{du} x(u; t, y(t; t_0, y_0)), x(u; t, y(t; t_0, y_0)). \end{aligned}$$

Rezultă

$$2(V(u)x(u; t, y(t; t_0, y_0)), A(u)x(u; t, y(t; t_0, y_0))) + \\ + \left( \frac{dV}{du} x(u; t, y(t; t_0, y_0)), x(u; t, y(t; t_0, y_0)) \right) = - |x(u; t, y(t; t_0, y_0))|^2.$$

Această egalitate devine pentru  $u = t$

$$2(V(t)y(t; t_0, y_0), A(t)y(t; t_0, y_0)) + \left( \frac{dV}{dt} y(t; t_0, y_0), y(t; t_0, y_0) \right) = \\ = - |y(t; t_0, y_0)|^2.$$

Folosind acest rezultat, deducem

$$\frac{dV^*}{dt} = - |y(t; t_0, y_0)|^2 + 2(V(t)y(t; t_0, y_0), Y(t, y(t; t_0, y_0))).$$

Avem

$$|V(t)y(t; t_0, y_0), Y(t, y(t; t_0, y_0))| \leq M |y(t; t_0, y_0)| |Y(t, y(t; t_0, y_0))|.$$

Presupunem  $c < \frac{1}{4M}$  și  $|y_0| < \sqrt{\frac{\mu}{M}} h$ . Atunci, pentru valori  $t \geq t_0$  destul de apropiate de  $t_0$ , va rezulta  $|y(t; t_0, y_0)| < h$ ; pentru valorile  $t$  pentru care  $|y(t; t_0, y_0)| < h$ ,

$$|V(t)y(t; t_0, y_0), Y(t, y(t; t_0, y_0))| \leq Mc |y(t; t_0, y_0)|^2 < \frac{1}{4} |y(t; t_0, y_0)|^2,$$

deci

$$\frac{dV^*}{dt} < -\frac{1}{2} |y(t; t_0, y_0)|^2.$$

De aici rezultă însă că  $V^*(t)$  descrește, deci

$$V^*(t) < V^*(t_0) = (V(t_0)y_0, y_0) < M |y_0|^2 < \mu h^2$$

și din

$$V^*(t) > \mu |y(t; t_0, y_0)|^2$$

rezultă

$$|y(t; t_0, y_0)|^2 < h^2.$$

Fie  $T$  astfel ca

$$|y(T; t_0, y_0)| = h, \quad |y(t; t_0, y_0)| < h \quad \text{pentru } t_0 \leq t < T;$$

din calculele de mai sus rezultă

$$|y(T; t_0, y_0)|^2 < h^2,$$

deci existența lui  $T$  este contradictorie. Rezultă că pentru orice  $t \geq t_0$

avem  $|y(t; t_0, y_0)| < h$  deci  $\frac{dV^*}{dt} < -\frac{1}{2}|y(t; t_0, y_0)|^2$ . Teorema este demonstrată.

Teorema 1.7 poate fi demonstrată și prin altă metodă, mai simplă, care nu folosește metoda funcției lui Liapunov, ci se bazează pe unele considerente specifice din teoria sistemelor liniare. Fie  $y(t; t_0, y_0)$  o soluție a sistemului (4). Avem

$$\frac{dy(t; t_0, y_0)}{dt} = A(t)y(t; t_0, y_0) + Y(t, y(t; t_0, y_0)).$$

Considerînd pe  $Y(t, y(t; t_0, y_0))$  ca o funcție dată de  $t$ , aplicăm „formula variației constantelor” stabilită în § 3. Rezultă

$$y(t; t_0, y_0) = C(t; t_0)y_0 + \int_{t_0}^t C(t; s)Y(s, y(s; t_0, y_0))ds,$$

Deoarece prin ipoteză soluția banală a sistemului (3) este uniform asimptotic stabilă, ea rezultă exponențial stabilă, deci

$$|C(t; t_0)| \leq Be^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Rezultă

$$|y(t; t_0, y_0)| \leq Be^{-\alpha(t-t_0)}|y_0| + \int_{t_0}^t Be^{-\alpha(t-s)}|Y(s, y(s; t_0, y_0))|ds.$$

Pentru toate valorile  $t$  cu proprietatea că  $t_0 \leq s \leq t$  implică  $|y(s; t_0, y_0)| < h$ , rezultă

$$|y(t; t_0, y_0)| \leq Be^{-\alpha(t-t_0)}|y_0| + Be^{-\alpha t} \int_{t_0}^t c e^{\alpha s}|y(s; t_0, y_0)|ds.$$

Fie

$$u(t) = e^{\alpha t}|y(t; t_0, y_0)|.$$

Avem

$$u(t) \leq Bu(t_0) + Bc \int_{t_0}^t u(s)ds.$$

Pe baza lemei 0.6 (consecința 2) rezultă

$$u(t) \leq Bu(t_0)e^{Bc(t-t_0)},$$

deci

$$e^{\alpha t}|y(t; t_0, y_0)| \leq Be^{\alpha t_0}e^{Bc(t-t_0)}|y_0|.$$

De aici rezultă

$$|y(t; t_0, y_0)| \leq Be^{-(\alpha - Bc)(t-t_0)}|y_0|$$

Dacă  $c < \frac{\alpha}{B}$  rezultă în orice caz

$$|y(t; t_0, y_0)| < B|y_0|$$

deci dacă  $|y_0| < \frac{h}{B}$  (vom presupune  $B > 1$ ) relația

$$|y(t; t_0, y_0)| < h$$

va rezulta adevărată pentru orice  $t \geq t_0$ .

Dar atunci, pentru orice  $t \geq t_0$ , rezultă  $|y(t; t_0, y_0)| \geq Be^{-\alpha_1(t-t_0)} |y_0|$  cu  $\alpha_1 = \alpha - Bc > 0$  și deci soluția banală a sistemului (4) este exponențial stabilă.

Să observăm că în această demonstrație nu se mai folosește faptul că

$$\int_s^t |A(u)| du \leq \omega(t-s);$$

în demonstrația precedentă acest fapt intervine pentru stabilirea proprietăților funcției  $(V(t), x, x)$  din teorema 1.6''.

Vom pune acum în evidență unele generalizări ale teoremei 1.7. Am văzut în treacăt în § 2 că dacă

$$|f(t, x)| \leq L(r) |x| \text{ pentru } |x| < r$$

și dacă soluția banală a sistemului (1) este uniform asimptotic stabilă și în plus

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq \psi(t - t_0) |x_0|,$$

stabilitatea este exponențială. Demonstrația s-a făcut cu ajutorul construirii unei funcții Liapunov de forma

$$V(t, x) = \int_t^{t+T} |x(\tau; t, x)|^2 d\tau.$$

Prin urmare, dacă  $f$  îndeplinește condiția de mai sus și soluția banală este exponențial stabilă, există o funcție  $V$  cu proprietățile

$$\mu |x|^2 \leq V(t, x) \leq M |x|^2, \quad \frac{d}{dt} V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq -\frac{1}{2} |x(t; t_0, x_0)|^2.$$

Vom presupune în plus că

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L(r) |x_1 - x_2| \text{ pentru } |x_1| < r, |x_2| < r$$

și vom arăta că în acest caz există o constantă  $K$  astfel încît

$$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq K(|x_1| + |x_2|) |x_1 - x_2| \text{ pentru } |x_1| < \delta_0, |x_2| < \delta_0.$$

Avem

$$x(u; t, x_1) = x_1 + \int_t^u f(s, x(s; t, x_1)) ds;$$

dacă  $|x_1| \leq \delta(r)$  rezultă

$$|x(s; t, x_1)| < r$$

deci

$$|f(s, x(s; t, x_1))| < L(r) |x(s; t, x_1)|.$$



Rezultă, pentru  $|x_1| \leq \delta(r)$ ,

$$|x(u; t, x_1)| \leq |x_1| + \int_t^u L(r) |x(s; t, x_1)| ds.$$

Conform lemei 0.6 (consecința 2) rezultă

$$|x(u; t, x_1)| \leq |x_1| e^{L(r)(u-t)},$$

deci

$$|x(u; t, x_1)| \leq |x_1| e^{TL(r)}$$

pentru  $t \leq u \leq t + T$ ,  $|x_1| \leq \delta(r)$ .

Mai departe

$$|x(u; t, x_1) - x(u; t, x_2)| \leq \int_t^u L(r) |x(s; t, x_1) - x(s; t, x_2)| ds + |x_1 - x_2|$$

dacă

$$|x_1| < \delta(r), |x_2| < \delta(r),$$

deci

$$|x(u; t, x_1) - x(u; t, x_2)| \leq |x_1 - x_2| e^{TL(r)} \text{ pentru } t \leq u \leq t + T.$$

Folosind aceste evaluări, deducem pentru  $|x_1| < \delta(r)$ ,  $|x_2| < \delta(r)$

$$\begin{aligned} |V(t, x_1) - V(t, x_2)| &= \left| \int_t^{t+T} |x(u; t, x_1)|^2 du - \int_t^{t+T} |x(u; t, x_2)|^2 du \right| = \\ &= \int_t^{t+T} (|x(u; t, x_1)| + |x(u; t, x_2)|) (|x(u; t, x_1)| - |x(u; t, x_2)|) du \leq \\ &\leq \int_t^{t+T} (|x(u; t, x_1)| + |x(u; t, x_2)|) |x(u; t, x_1) - x(u; t, x_2)| du \leq \\ &\leq \int_t^{t+T} (|x_1| e^{TL(r)} + |x_2| e^{TL(r)}) |x_1 - x_2| e^{TL(r)} du = \\ &= Te^{2TL(r)} (|x_1| + |x_2|) |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Punînd

$$K = Te^{2TL(r)}$$

rezultă

$$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| < K (|x_1| + |x_2|) |x_1 - x_2|.$$

Putem demonstra acum

**TEOREMĂ 1.7'.** Dacă  $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| < L(r) |y_1 - y_2|$  pentru  $|y_1| < r, |y_2| < r$  și  $|g(t, y)| < L_1(r) |y|$  pentru  $|y| < r$  și dacă  $L_1(r)$  este suficient de mică, atunci din stabilitatea exponențială a soluției banale a sistemului (1) rezultă stabilitatea asimptotică exponențială a soluției banale a sistemului

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) + g(t, y). \quad (5)$$

*Demonstrație.* Fie  $y(v; t, y)$  o soluție a sistemului (5) cu  $|y| \leq \frac{r}{2}$ .

Avem

$$y(v; t, y) = y + \int_t^v f[u, y(u; t, y)] du + \int_t^v g[u, y(u; t, y)] du,$$

deci

$$|y(v; t, y)| \leq |y| + \int_t^v L(r) |y(u; t, y)| du + \int_t^v L_1(r) |y(u; t, y)| du$$

pentru toate valorile  $t \leq v$  astfel încât dacă  $t \leq u \leq v$  să avem  $|y(u; t, y)| < r$ . Rezultă

$$|y(v; t, y)| \leq |y| e^{h(L(r)+L_1(r))} \text{ pentru } t \leq v \leq t+h.$$

De aici rezultă că dacă  $|y| \leq \frac{r}{2}$  și  $h$  e suficient de mic,  $|y(u; t, y)| < r$

pentru toți  $t \leq u \leq v$  și inegalitatea e adevărată pentru orice  $v$  cu  $t \leq v \leq t+h$ .

Fie  $x(v; t, y)$  o soluție a sistemului (1). Avem

$$y(v; t, y) - x(v; t, y) = \int_t^v [f(u, y(u; t, y)) - f(u, x(u; t, y))] du + \int_t^v g(u, y(u; t, y)) du$$

deci

$$\begin{aligned} |y(v; t, y) - x(v; t, y)| &\leq \int_t^v L_1(r) |y(u; t, y)| du + \\ &+ \int_t^v L(r) |y(u; t, y) - x(u; t, y)| du \leq hL_1(r) e^{h(L(r)+L_1(r))} |y| + \\ &+ \int_t^v L(r) |y(u; t, y) - x(u; t, y)| du. \end{aligned}$$

Rezultă

$$|y(v; t, y) - x(v; t, y)| \leq hL_1(r) e^{h(L_1(r)+L(r))} e^{hL(r)} |y|$$

pentru  $t \leq v \leq t+h$ .

Ținând seama de aceste evaluări deducem

$$\begin{aligned} |V(t+h, y(t+h; t, y)) - V(t+h, x(t+h; t, y))| &\leq \\ &\leq K(e^{h(L(r)+L_1(r))} |y| + e^{hL(r)} |y|) hL_1(r) e^{2hL(r)+hL_1(r)} |y| \end{aligned}$$

deci

$$|V(t+h, y(t+h; t, y)) - V(t+h, x(t+h; t, y))| \leq 2KL_1(r) e^{th(L(r)+L_1(r))} |y|^2.$$

De aici rezultă

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y)] - V[t+h, x(t+h; t, y)]}{h} \leq 2KL_1(r) |y|^2.$$

Avem

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t_0, y_0)] - V[t, y(t; t_0, y_0)]}{h} = \\
 & = \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y(t; t_0, y_0))] - V[t, y(t; t_0, y_0)]}{h} \leq \\
 & \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y(t; t_0, y_0))] - V[t+h, x(t+h; t, y(t; t_0, y_0))]}{h} + \\
 & + \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t, y(t; t_0, y_0))] - V[t, y(t; t_0, y_0)]}{h} \leq \\
 & \leq 2KL_1(r) |y(t; t_0, y_0)|^2 - \frac{1}{2} |y(t; t_0, y_0)|^2
 \end{aligned}$$

dacă  $|y(t; t_0, y_0)| \leq \frac{r}{2}$ . Fie  $L_1(r)$  suficient de mic pentru ca

$$L_1(r) < \frac{1}{8K};$$

rezultă

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t_0, y_0)] - V[t, y(t; t_0, y_0)]}{h} < -\frac{1}{4} |y(t; t_0, y_0)|^2$$

dacă  $|y(t; t_0, y_0)| < \frac{r}{2}$ . Rezultă de aici că  $V[t, y(t; t_0, y)]$  este descrescătoare deci

$$\mu |y(t; t_0, y_0)|^2 \leq V[t, y(t; t_0, y_0)] \leq V(t_0, y_0) < M |y_0|^2$$

deci dacă  $|y_0| < \sqrt{\frac{M}{\mu}} \frac{r}{2}$  rezultă că pentru orice  $t \geq t_0$  vom avea  $|y(t; t_0, y_0)| \leq \frac{r}{2}$ , deci funcția  $V(t, x)$  construită pentru sistemul (1) pe baza prop

prietății de stabilitate exponențială verifică pentru sistemul (5) toate condițiile din teorema 1.5. În acest fel teorema 1.7' este demonstrată.

Vom da și pentru această teoremă încă o demonstrație, bazată pe o idee principal nouă, datorită lui Barbașin. Vom presupune că

$$|g(t, y_2) - g(t, y_1)| \leq L(r) |y_1 - y_2| \text{ pentru } |y_1| < r, |y_2| < r.$$

Ca mai sus vom scrie

$$\begin{aligned}
 y(t; t_0, y_0) - x(t; t_0, y_0) &= \int_{t_0}^t \{f[u, y(u; t_0, y_0)] - f[u, x(u; t_0, y_0)]\} du + \\
 &+ \int_{t_0}^t g[u, y(u; t_0, y_0)] du = \int_{t_0}^t \{f[u, y(u; t_0, y_0)] - f[u, x(u; t_0, y_0)]\} du + \\
 &+ \int_{t_0}^t \{g[u, y(u; t_0, y_0)] - g[u, x(u; t_0, y_0)]\} du + \int_{t_0}^t g[u, x(u; t_0, y_0)] du.
 \end{aligned}$$

**Rezultă**

$$|y(t; t_0, y_0) - x(t; t_0, y_0)| \leq L_1(r) B \int_{t_0}^t e^{-\alpha(u-t_0)} |y_0| du + \\ + \int_{t_0}^t 2L(r) |y(u; t_0, y_0) - x(u; t_0, y_0)| du$$

**deci**

$$|y(t; t_0, y_0) - x(t; t_0, y_0)| \leq \frac{L_1(r) B}{\alpha} e^{2L(r)(t-t_0)} |y_0|$$

pentru toți  $t \geq t_0$  pentru care

$$|y(u; t_0, y_0)| \leq \frac{r}{2}, \quad |x(u; t_0, y_0)| \leq \frac{r}{2}, \quad \text{dacă } t_0 \leq u \leq t.$$

Fie  $\varepsilon > 0$ ,  $|y_0| < \frac{\varepsilon}{2B}$ ,  $T = \frac{1}{\alpha} \ln 4B$  și  $L_1(r)$  astfel ca  $\frac{L_1(r) B}{\alpha} e^{2TL(r)} < \frac{1}{4}$ .

**Avem**

$$|x(u; t_0, y_0)| \leq B e^{-\alpha(u-t_0)} |y_0| < B |y_0| < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{r}{4} \quad \text{dacă } \varepsilon \leq \frac{r}{2}.$$

Mai departe, pentru acei  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$  pentru care

$$|y(u; t_0, y_0)| \leq \frac{r}{2}, \quad t_0 \leq u \leq t$$

**rezultă**

$$|y(u; t_0, y_0) - x(u; t_0, y_0)| \leq \frac{L_1(r) B}{\alpha} e^{2TL(r)} |y_0| < \frac{1}{4} |y_0| < \frac{\varepsilon}{8B},$$

**deci**

$$|y(u; t_0, y_0)| \leq |x(u; t_0, y_0)| + |y(u; t_0, y_0) - x(u; t_0, y_0)| \leq \\ \leq B e^{-\alpha(u-t_0)} |y_0| + \frac{\varepsilon}{8B} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{8B} < \varepsilon \leq \frac{r}{2}.$$

**Rezultă** că  $|y(u; t_0, y_0)| \leq \frac{r}{2}$  pentru  $t_0 \leq u \leq t_0 + T$  și în plus

$$|y(u; t_0, y_0)| < \varepsilon \text{ pentru } t_0 \leq u \leq t_0 + T.$$

**Mai departe**

$$|y(t_0 + T; t_0, y_0)| \leq B e^{-\alpha T} \frac{\varepsilon}{2B} + \frac{\varepsilon}{8B} = \frac{\varepsilon}{8B} + \frac{\varepsilon}{8B} = \frac{\varepsilon}{4B}.$$

Considerăm acum intervalul  $t_0 + T \leq t \leq t_0 + 2T$ ; în loc de  $y_0$  vom pleca cu valoarea  $y(t_0 + T; t_0, y_0)$  pentru care am stabilit evaluarea  $|y(t_0 + T; t_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{4B}$ . Aceleași calcule ca mai sus (în care rolul lui  $\varepsilon$  este luat de  $\frac{\varepsilon}{2}$ ) conduc la  $|y(t; t_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  pentru  $t_0 + T \leq t \leq t_0 + 2T$  și  $|y(t_0 + 2T; t_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{8B}$ . Continuînd în același mod se capătă pentru  $t_0 + nT \leq t \leq t_0 + (n+1)T$  evaluarea  $|y(t; t_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ .

Rezultă în orice caz că dacă  $|y_0| < \frac{\varepsilon}{2B}$  avem  $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru orice  $t \geq t_0$ . Dacă  $|y_0| < \frac{r}{4B}$  rezultă  $|y(t; t_0, y_0)| < \frac{r}{2^{n+2}}$  pentru  $t_0 + nT \leq t \leq t_0 + (n+1)T$ . Fie  $t \geq t_0$ ; există  $m \geq 1$  astfel ca  $t_0 + (m-1)T \leq t < t_0 + mT$ ; atunci  $mT > t - t_0$ ,  $m > \frac{1}{T}(t - t_0)$ ,  $2^m > 2^{\frac{1}{T}(t - t_0)}$ ,  $\frac{1}{2^m} < 2^{-\frac{1}{T}(t - t_0)}$ . Din  $t \geq t_0 + (m-1)T$  rezultă

$$|y(t; t_0, y_0)| < \frac{r}{2} \frac{1}{2^m} < \frac{r}{2} 2^{-\frac{1}{T}(t - t_0)};$$

luînd  $\alpha_1 = \frac{1}{T} \ln 2$  avem  $2 = e^{\alpha_1 T}$ , deci  $|y(t; t_0, y_0)| < \frac{r}{2} e^{-\alpha_1(t - t_0)}$ , ceea

ce dovedește că soluția banală a sistemului (5) este exponențial stabilă.

Vom demonstra acum o teoremă de stabilitate după prima aproximație, valabilă numai în cazul cînd sistemul de primă aproximație nu depinde explicit de  $t$ ; extinderea ei în cazul general este încă o problemă deschisă. Teorema a fost demonstrată pentru prima dată în 1951 de I. G. Malkin. Alte demonstrații au fost date de J. L. Massera și N. N. Krasovski. Aici vom da o nouă demonstrație bazată pe unele rezultate subliniate mai înainte.

TEOREMA 1.7''. Considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + R(t, x), \quad (6)$$

unde  $X(kx) = k^m X(x)$ ,  $|R(t, x)| \leq \gamma |x|^m$ ,  $\gamma$  fiind o constantă suficient de mică. Dacă soluția banală a sistemului  $\frac{dx}{dt} = X(x)$  este asimptotic stabilă, atunci soluția banală a sistemului (6) este uniform asimptotic stabilă.

*Demonstrație.* Considerăm sistemul

$$\frac{dz}{d\tau} = \begin{cases} \frac{X(z)}{|z|^{m-1}} & \text{pentru } |z| \neq 0, \\ 0 & \text{pentru } |z| = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Fie  $z(\tau; \tau_0, x_0)$  o soluție a sistemului (7),

$$t(\tau) = \int_0^\tau \frac{1}{|z(u; \tau_0, x_0)|^{m-1}} du,$$

$\tau(t)$  funcția inversă corespunzătoare.

Fie

$$y(t) = z[\tau(t); \tau_0, x_0].$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= \frac{d}{d\tau} z(\tau(t); \tau_0, x_0) \frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{X[z(\tau(t); \tau_0, x_0)]}{|z(\tau(t); \tau_0, x_0)|^{m-1}} \cdot \frac{1}{\frac{dt(\tau)}{d\tau}} = \\ &= X[z(\tau(t); \tau_0, x_0)] \end{aligned}$$

deci

$$\frac{dy(t)}{dt} = X(y(t));$$

în plus  $y(t_0) = x_0$ , unde  $t_0 = t(\tau_0)$ .

Deoarece am presupus că soluția sistemului omogen este asimptotic stabilă putem scrie

$$|y(t)| \leq \chi(|x_0|) \psi(t - t_0),$$

deci

$$|z(\tau(t); \tau_0, x_0)| \leq \chi(|x_0|) \psi(t - t_0).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} |z(\tau; \tau_0, x_0)| &\leq \chi(|x_0|) \psi(t(\tau) - t(\tau_0)) = \\ &= \chi(|x_0|) \psi\left(\int_{\tau_0}^\tau \frac{1}{|z(u; \tau_0, x_0)|^{m-1}} du\right). \end{aligned}$$

Dar deoarece  $z(u; \tau_0, x_0)$  e mărginită, rezultă că

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z(u; \tau_0, x_0)|^{m-1}} &\geq l > 0, \text{ deci } |z(\tau; \tau_0, x_0)| \leq \chi(|x_0|) \psi(l(\tau - \tau_0)) = \\ &= \chi(|x_0|) \psi^*(\tau - \tau_0), \end{aligned}$$

unde  $\psi^*(r)$  este monoton descrescătoare și

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi^*(r) = 0.$$

Din această evaluare rezultă că soluția banală a sistemului (7) este uniform asimptotic stabilă, deci pe baza unei observații din §2 este expo-

nențial stabilă. Fie acum  $x(t; t_0, x_0)$  o soluție a sistemului (6). Punem

$$\tau(t) = \int_0^t |x(u; t_0, x_0)|^{m-1} du;$$

fie  $t(\tau)$  inversa acestei funcții și

$$y(\tau) = x(t(\tau); t_0, x_0).$$

Avem

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= \frac{d}{dt} x(t(\tau); t_0, x_0) \frac{dt(\tau)}{d\tau} = \\ &= (X[x(t(\tau); t_0, x_0)] + R[t(\tau), x(t(\tau); t_0, x_0)]) \frac{1}{\frac{d\tau}{dt}(t)} = \\ &= (X[x(t(\tau); t_0, x_0)] + R[t(\tau), x(t(\tau); t_0, x_0)]) \frac{1}{|x(t(\tau); t_0, x_0)|^{m-1}} = \\ &= \frac{X[y(\tau)]}{|y(\tau)|^{m-1}} + \frac{R[t(\tau), y(\tau)]}{|y(\tau)|^{m-1}}. \end{aligned}$$

Rezultă că  $y(\tau)$  verifică sistemul

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= \frac{X(y)}{|y|^{m-1}} + \frac{R(t(\tau), y)}{|y|^{m-1}} \text{ dacă } |y| \neq 0, \\ \frac{dy}{d\tau} &= 0 \text{ dacă } |y| = 0. \end{aligned}$$

Din

$$|R(t, y)| \leq \gamma |y|^m$$

rezultă

$$\left| \frac{R(t(\tau), y)}{|y|^{m-1}} \right| \leq \gamma |y|.$$

Deoarece soluția banală a sistemului de primă aproximație (7) este exponențial stabilă, putem aplica teorema 1.7' și rezultă că soluția banală a sistemului în  $y$  este exponențial stabilă, deci

$$|y(\tau)| \leq B e^{-\alpha(\tau - \tau_0)} |x_0|, \tau_0 = \tau(t_0).$$

Rezultă

$$|x(t(\tau); t_0, x_0)| \leq B e^{-\alpha(\tau - \tau_0)} |x_0|$$

sau

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq B e^{-\alpha(t - t_0)} |x_0|$$

deci

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq B e^{-\alpha \int_{t_0}^t |x(u; t_0, x_0)|^{m-1} du} |x_0|.$$

Dacă pentru  $t \rightarrow \infty$ ,  $\tau(t) \rightarrow \tau_\infty < \infty$ , atunci soluția

$$y(\tau) = x(t(\tau); t_0, x_0)$$

nu ar fi prelungibilă dincolo de  $\tau_\infty$  deoarece pentru  $\tau \rightarrow \tau_\infty$  avem  $t \rightarrow \infty$ . Dar soluția  $y(\tau)$  este prelungibilă pentru orice  $\tau$ , deci obligatoriu  $\tau_\infty = \infty$ .

Rezultă că integrala este divergentă deci are loc stabilitatea asimptotică. Teorema este demonstrată.

Să punem în evidență caracterul stabilității asimptotice pentru sistemele omogene considerate. Presupunem  $m > 1$ . Pentru sistemul

$$\frac{dz}{d\tau} = \begin{cases} \frac{X(z)}{|z|^{m-1}}, & |z| \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

stabilitatea asimptotică este totdeauna exponențială, deci

$$|z(\tau; \tau_0, x_0)| \leq B e^{-\alpha(\tau - \tau_0)} |x_0|,$$

deci

$$|y(t; t_0, x_0)| \leq B e^{-\alpha[\tau(t) - \tau(t_0)]} |x_0|.$$

Să evaluăm pe  $|z(\tau; \tau_0, x_0)|$ . Avem  $\frac{d}{d\tau} z(\tau; \tau_0, x_0) = Z(z(\tau; \tau_0, x_0))$ , unde am notat

$$Z(z) = \begin{cases} \frac{X(z)}{|z|^{m-1}}, & |z| \neq 0 \\ 0 & z = 0; \end{cases}$$

$$(z(\tau; \tau_0, x_0), \frac{d}{d\tau} z(\tau; \tau_0, x_0)) = (z(\tau; \tau_0, x_0), Z(z(\tau; \tau_0, x_0))).$$

Dar  $Z(z)$  e omogenă de gradul întâi deci  $|Z(z)| \leq L|z|$ , unde  $L = \sup_{|z| \leq 1} |Z(z)|$ .

Rezultă

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} |z(\tau; \tau_0, x_0)|^2 \leq L |z(\tau; \tau_0, x_0)|^2,$$

deci

$$\left| \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \ln |z(\tau; \tau_0, x_0)|^2 \right| \leq L, \quad \frac{d}{d\tau} \ln |z(\tau; \tau_0, x_0)|^2 \geq -2L,$$

$\ln |z(\tau; \tau_0, x_0)|^2 \geq -2L(\tau - \tau_0) + \ln |x_0|^2$ ,  $|z(\tau; \tau_0, x_0)|^2 \geq e^{-2L(\tau - \tau_0)} |x_0|^2$ ,  
deci

$$|z(\tau; \tau_0, x_0)| \geq e^{-L(\tau - \tau_0)} |x_0|, \quad |z(\tau; \tau_0, x_0)|^{m-1} \geq e^{-L(m-1)(\tau - \tau_0)} |x_0|^{m-1},$$

$$\frac{1}{|z(\tau; \tau_0, x_0)|^{m-1}} \leq \frac{1}{|x_0|^{m-1}} e^{(m-1)L(\tau - \tau_0)}$$



Rezultă

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} \leq \frac{1}{|x_0|^{m-1}} e^{(m-1)L(\tau-\tau_0)}$$

deci

$$\begin{aligned} t(\tau) - t_0 &\leq \frac{1}{|x_0|^{m-1}} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{(m-1)L(\tau-\tau_0)} d\tau = \\ &= \frac{1}{|x_0|^{m-1}} \int_0^{\tau-\tau_0} e^{(m-1)L\sigma} d\sigma = \frac{1}{(m-1)L|x_0|^{m-1}} (e^{(m-1)L(\tau-\tau_0)} - 1). \end{aligned}$$

De aici

$$\begin{aligned} 1 + (m-1)L|x_0|^{m-1}(t-t_0) &\leq e^{(m-1)L(\tau-\tau_0)} \\ [1 + (m-1)L|x_0|^{m-1}(t-t_0)]^{\frac{1}{L}} &\leq e^{(m-1)(\tau-\tau_0)} \\ [1 + (m-1)L|x_0|^{m-1}(t-t_0)]^{\frac{\alpha}{L}} &\leq e^{(m-1)\alpha(\tau-\tau_0)} \end{aligned}$$

deci

$$e^{-(m-1)\alpha(\tau-\tau_0)} \leq \frac{1}{[1 + (m-1)L|x_0|^{m-1}(t-t_0)]^{\frac{\alpha}{L}}}$$

Rezultă

$$|y(t; t_0, x_0)| \leq B^{m-1} e^{-(m-1)\alpha(\tau-\tau_0)} |x_0|^{m-1} \leq \frac{B^{m-1} |x_0|^{m-1}}{[1 + (m-1)L|x_0|^{m-1}(t-t_0)]^{\frac{\alpha}{L}}}$$

sau

$$\begin{aligned} |y(t; t_0, x_0)| &\leq B[1 + (m-1)L|x_0|^{m-1}(t-t_0)]^{-\frac{\alpha}{L(m-1)}} |x_0| = \\ &= B[|x_0|^{-(m-1)} + (m-1)L(t-t_0)]^{-\frac{\alpha}{L(m-1)}} |x_0|^{1-\frac{\alpha}{L}}. \end{aligned}$$

Krasovski a demonstrat că dacă soluția banală a sistemului

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y)$$

verifică o evaluare de acest tip, atunci se poate demonstra o teoremă de stabilitate după prima aproximație de tipul teoremei 1.7''. Este însă o problemă deschisă dacă o asemenea evaluare are loc întotdeauna pentru sistemele omogene.

Vom stabili acum unele teoreme de stabilitate după prima aproximație cu caracter mai puțin general, dar care se pot dovedi efective în diferite cazuri concrete.

PROPOZIȚIA 1. Considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + X(x, t),$$

unde  $|X(x, t)| \leq \beta^2(t)|x|$ , pentru  $|x| \leq c$ .

Dacă există o matrice  $G(t)$  autoadjunctă și pozitivă (adică astfel încât forma ermitică  $(Gx, x)$  să fie pozitiv definită) astfel încât

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[ q_M(t) + 2\beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} \right] dt = -\infty,$$

atunci soluția banală a sistemului este asimptotic stabilă.

Aici  $q_M$  este cea mai mare valoare proprie a matricii  $A + G^{-1} \dot{G} + G^{-1} A^* G$ , iar  $\lambda$  și  $\Lambda$  sînt respectiv cea mai mică și cea mai mare valoare proprie pentru matricea  $G$ .

*Demonstrație.* Fie

$$\xi(t) = (G(t) x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)).$$

Avem

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \left( \frac{dG}{dt} x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0) \right) + (G(t) \frac{d}{dt} x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)) + \\ &+ \left( G(t) x(t; t_0, x_0), \frac{d}{dt} x(t; t_0, x_0) \right) = \left( \frac{dG}{dt} x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0) \right) + \\ &+ (G(t) A(t) x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)) + (G(t) X(x(t; t_0, x_0), t), x(t; t_0, x_0)) + \\ &+ (G(t) x(t; t_0, x_0), A(t) x(t; t_0, x_0)) + (G(t) x(t; t_0, x_0), X(x(t; t_0, x_0), t)) = \\ &= \left( \frac{dG}{dt} x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0) \right) + (G(t) A(t) x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)) + \\ &+ (A^*(t) G(t) x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)) + (G(t) X(x(t; t_0, x_0), t), x(t; t_0, x_0)) + \\ &+ (G(t) x(t; t_0, x_0), X(x(t; t_0, x_0), t)) = (Q(t) x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)) + \\ &+ (G(t) X(x(t; t_0, x_0), t), x(t; t_0, x_0)) + (G(t) x(t; t_0, x_0), X(x(t; t_0, x_0), t)), \end{aligned}$$

unde am notat

$$Q(t) = \frac{dG}{dt} + GA + A^* G.$$

Avem

$$G^{-1}(t) Q(t) = G^{-1} \frac{dG}{dt} + A + G^{-1} A^* G,$$

deci  $q_M$  este cea mai mare valoare proprie a matricii  $G^{-1} Q$ . Avem

$$(Qx, x) \leq q_M (Gx, x)^*.$$

\*) Într-adevăr, să considerăm funcția  $(Qx, x)$  dată pe  $(Gx, x) = 1$ ; deoarece  $(Gx, x) = 1$  e compactă, există  $\lambda_M = \sup_{(Gx, x)=1} (Qx, x)$ . Conform teoriei generale a extremelor cu legături, punctele

de maxim verifică relația  $\frac{\partial}{\partial x} \{(Qx, x) - (\lambda Gx, x)\} = 0$  deci  $(Q - \lambda G)x = 0$ ; această ecuație are soluții nenule numai dacă  $\det(Q - \lambda G) = 0$ . Dar

$$\det(Q - \lambda G) = \det G \det(G^{-1} Q - \lambda E),$$

deci  $\lambda$  verifică ecuația  $\det(G^{-1} Q - \lambda E) = 0$  deci e valoare proprie a matricii  $G^{-1} Q$ .

De asemenea, se demonstrează imediat inegalitatea

$$(Gx, y) + (Gy, x) \leq 2 \sqrt{(Gx, x)(Gy, y)}.$$

Ținând seama de aceste inegalități rezultă

$$\frac{d\xi}{dt} \leq q_M \xi + 2 \sqrt{\xi(GX, X)}.$$

Dar

$$(GX, X) \leq \Lambda(X, X) \leq \Lambda \beta^2(x, x) = \frac{\Lambda}{\lambda} \beta^2 \lambda(x, x) \leq \frac{\Lambda}{\lambda} \beta^2(Gx, x).$$

Prin urmare

$$\frac{d\xi}{dt} \leq q_M \xi + 2 \xi \beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}},$$

deci

$$\frac{d\xi}{dt} \leq \left( q_M + 2\beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} \right) \xi.$$

Rezultă

$$\xi(t) \leq (Gx_0, x_0) e^{\int_{t_0}^t \left( q_M + 2\beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} \right) dt}.$$

Pe de altă parte,

$$\xi(t) = (G(t)x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)) \geq \lambda |x(t; t_0, x_0)|^2.$$

Rezultă

$$\lambda(t) |x(t; t_0, x_0)|^2 \leq \Lambda(t_0) |x_0|^2 e^{\int_{t_0}^t \left( q_M + 2\beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} \right) dt},$$

deci

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq \sqrt{\frac{\Lambda(t_0)}{\lambda(t)}} e^{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left( q_M + 2\beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} \right) dt} |x_0|.$$

Dacă  $\lambda(t) \geq \lambda_0 > 0$  și dacă  $\int_{t_0}^t \left( q_M + 2\beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} \right) dt \rightarrow -\infty$  când  $t \rightarrow \infty$ ,

soluția banală rezultă asimptotic stabilă. Dacă în plus

$$\int_{t_0}^t \left( q_M + 2\beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} \right) dt < -\alpha(t - t_0)$$

stabilitatea este chiar exponențială. Teorema este demonstrată.

Să considerăm un caz particular important. Presupunem că  $A$  e

Dacă  $x_0$  e punctul de maxim,  $x_0$  este vector propriu pentru  $G^{-1}Q$ , deci  $(Qx_0, x_0) - \lambda(Gx_0, x_0) = 0$ ; cum  $(Gx_0, x_0) = 1$  rezultă  $(Qx_0, x_0) = \lambda$ , deci  $\lambda_M$  este valoarea proprie a lui  $G^{-1}Q$  corespunzătoare lui  $x_0$ . Cum valoarea  $(Qx_0, x_0)$  este maximă, rezultă  $\lambda_M = q_M$ . De aici rezultă imediat evaluarea scrisă.

constantă și că forma normală Jordan corespunzătoare este diagonală. Fie  $C$  matricea care aduce pe  $A$  la forma normală Jordan  $G = C^*C$ .

$$\text{Atunci } G^{-1}Q = A + G^{-1}A^*G = A + C^{-1}C^{*-1}A^*C^*C$$

și

$$C G^{-1}Q C^{-1} = C A C^{-1} + C^{*-1}A^*C^* = C A C^{-1} + (C A C^{-1})^*.$$

Rezultă că valorile proprii ale matricii  $C G^{-1}Q C^{-1}$  care coincid cu cele ale matricii  $G^{-1}Q$  sînt tocmai dublul părților reale ale valorilor proprii ale matricii  $A$ . Presupunînd că părțile reale ale valorilor proprii ale matricii  $A$  sînt negative și notînd cu  $-d$  pe cea mai mare dintre ele, condiția din teoremă devine

$$\int_{t_0}^{\infty} \left( -d + \beta \sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}} \right) dt = -\infty.$$

Semnificația acestui rezultat este următoarea. Se știe că dacă matricea  $A$  are valorile proprii cu părți reale negative, soluția banală a sistemului liniar de primă aproximație este uniform asimptotic stabilă, deci funcționează teorema de stabilitate după prima aproximație. Rezultatul de mai sus permite evaluarea lui  $\beta$  astfel încît stabilitatea să se păstreze; de exemplu, presupunînd că  $\beta$  este constant, obținem evaluarea  $\beta < d \sqrt{\frac{\lambda}{\Lambda}}$ .

În sfîrșit, să observăm, că metoda folosită ne-a condus nu numai la o teoremă de stabilitate după prima aproximație ci și la o evaluare a soluțiilor. Alegînd convenabil matricea  $G$  se pot obține formule tot mai precise de evaluare a soluțiilor.

**PROPOZIȚIA 2.** *Considerăm din nou sistemul din propoziția precedentă și presupunem*

$$\int_{t_0}^{\infty} \beta^2(t) dt < \infty.$$

*Dacă soluția banală a sistemului*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y$$

*este uniform stabilă, atunci soluția banală a sistemului dat este uniform-stabilă. Dacă soluția banală a sistemului*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y$$

*este uniform asimptotic stabilă, atunci soluția banală a sistemului dat este uniform asimptotic stabilă. Aici se presupune că*

$$\int_{t_0}^t |A(u)| du \leq \omega(t - t_0).$$

**Demonstrație.** Vom demonstra această propoziție în două feluri. Prima demonstrație se bazează pe construcția unei funcții Liapunov.

Din ipoteza de stabilitate uniformă rezultă  $|C(t, s)| \leq M$ , deci  $|y(t; t_0, x_0)| \leq M|x_0|$  pentru toate soluțiile sistemului liniar de primă aproximație. Fie  $V(t, x) = \sup_{\sigma \geq 0} |y(t + \sigma; t, x)|$ .

Avem  $V(t, x) \geq |x|$ ,  $V(t, x) \leq M|x|$ . Mai departe

$$||y(t - \sigma; t, x_1)| - |y(t + \sigma; t, x_2)|| \leq |y(t + \sigma; t, x_1 - x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

(am folosit liniaritatea sistemului de primă aproximație).

Rezultă

$$|y(t + \sigma; t, x_1)| \leq |y(t + \sigma; t, x_2)| + M|x_1 - x_2|,$$

deci

$$V(t, x_1) \leq V(t, x_2) + M|x_1 - x_2|.$$

La fel

$$V(t, x_2) \leq V(t, x_1) + M|x_1 - x_2|$$

deci

$$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq M|x_1 - x_2|.$$

Funcția

$$V^*(t) = V(t, y(t; t_0, x_0))$$

este monoton descrescătoare (vezi teorema 1.2').

Avem

$$x(v; t, x_0) = x_0 + \int_t^v \{A(u)x(u; t, x_0) + X(x(u; t, x_0), u)\} du$$

Pentru  $|x_0| < \frac{c}{2}$  rezultă, dacă  $t \leq v \leq t + h$  și  $h$  e suficient de mic,

$$|x(v; t, x_0)| \leq |x_0| + \int_t^v \{|A(u)||x(u; t, x_0)| + \beta^2(u)|x(u; t, x_0)|\} du$$

deci

$$|x(v; t, x_0)| \leq |x_0| e^{\int_t^{t+h} \{|A(u)| + \beta^2(u)\} du}$$

Mai departe

$$\begin{aligned} x(v; t, x_0) - y(v; t, x_0) &= \int_t^v A(u)[x(u; t, x_0) - y(u; t, x_0)] du + \\ &+ \int_t^v X(x(u; t, x_0), u) du. \end{aligned}$$

**Rezultă**

$$|x(v; t, x_0) - y(v; t, x_0)| \leq |x_0| e^{\int_t^{t+h} (|A(u)| + \beta^2(u)) du} \int_t^{t+h} \beta^2(u) du + \\ + \int_t^v |A(u)| |x(u; t, x_0) - y(u; t, x_0)| du$$

deci

$$|x(v; t, x_0) - y(v; t, x_0)| \leq |x_0| \int_t^{t+h} \beta^2(u) du e^{\int_t^{t+h} \{2|A(u)| + \beta^2(u)\} du}$$

pentru  $t \leq v \leq t+h$ .

Ținând seama de această evaluare deducem

$$|V[t+h, x(t+h; t, x)] - V[t+h, y(t+h; t, x)]| \leq \\ \leq M \int_t^{t+h} \beta^2(u) du e^{\int_t^{t+h} \{2|A(u)| + \beta^2(u)\} du}$$

deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h, t, x)] - V[t+h, y(t+h; t, x)]}{h} \leq M \beta^2(t) |x|.$$

De aici, cu ajutorul unui calcul pe care l-am mai făcut (vezi de exemplu teorema 1.7'), rezultă

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x, (t+h; t, x)] - V[t, x]}{h} \leq M \beta^2(t) |x| \leq M \beta^2(t) V(t, x).$$

Notînd

$$V^{**}(t) = V[t, x(t, t_0, x_0)],$$

deducem

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^{**}(t+h) - V^{**}(t)}{h} \leq M \beta^2(t) V^{**}(t)$$

deci

$$V^{**}(t) \leq V^{**}(t_0) e^{M \int_{t_0}^t \beta^2(u) du},$$

sau

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq V[t, x(t; t_0, x_0)] \leq V(t_0, x_0) e^{M \int_{t_0}^t \beta^2(u) du} \leq M |x_0| e^{M \int_{t_0}^t \beta^2(u) du}$$

ceea ce împreună cu  $\int_t^\infty \beta^2(u) du < K$  atrage  $|x(t; t_0, x_0)| \leq M e^{MK} |x_0|$

și prima afirmație a propoziției e demonstrată.

Pentru cea de-a doua afirmație, procedînd ca în teorema 1.7, alegem funcția  $(V(t, x, x))$  dată de teorema 1.6'' și notînd

$$V^*(t) = (V(t) x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)),$$

deducem

$$\begin{aligned} \frac{dV^*}{dt} &= -|x(t; t_0, x_0)|^2 + 2(V(t)x(t; t_0, x_0), X(x(t; t_0, x_0), t)) \leq \\ &\leq -|x(t; t_0, x_0)|^2 + 2M\beta^2|x(t; t_0, x_0)|^2 \leq -\frac{(1-2M\beta^2)}{M}V^*(t) \end{aligned}$$

deci

$$\frac{d \ln V^*}{dt} \leq -\frac{1}{M} + 2M\beta^2;$$

de aici deducem

$$\ln V^*(t) - \ln V^*(t_0) \leq -\frac{1}{M}(t - t_0) + 2M \int_{t_0}^t \beta^2(u) du$$

deci

$$V^*(t) \leq V^*(t_0) e^{-\frac{1}{M}(t-t_0)} e^{2M \int_{t_0}^t \beta^2(u) du} \leq M|x_0|^2 e^{2MK - \frac{1}{M}(t-t_0)}$$

de unde se capătă în definitiv

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq \sqrt{\frac{M}{\mu}} e^{MK} e^{-\frac{1}{2M}(t-t_0)} |x_0|$$

și propoziția e demonstrată.

Cea de-a doua demonstrație folosește formula variației constantelor

$$x(t; t_0, x_0) = C(t; t_0)x_0 + \int_{t_0}^t C(t; s)X(x(s; t_0, x_0), s)ds.$$

Rezultă

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq M|x_0| + \int_{t_0}^t M\beta^2(s)|x(s; t_0, x_0)|ds.$$

De aici se capătă

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq M|x_0| e^{M \int_{t_0}^t \beta^2(s) ds}$$

și prima afirmație a propoziției e demonstrată.

În sfârșit, dacă soluția banală a sistemului liniar de primă aproximație este uniform asimptotic stabilă deducem

$$|C(t; s)| \leq Be^{-\alpha(t-s)}$$

deci

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq Be^{-\alpha(t-t_0)}|x_0| + \int_{t_0}^t Be^{-\alpha(t-s)}\beta^2(s)|x(s; t_0, x_0)|ds$$

deci notînd

$$u(t) = |x(t; t_0, x_0)|e^{\alpha t}$$

deducem

$$u(t) \leq Bu(t_0) + B \int_{t_0}^t \beta^3(s) u(s) ds,$$

deci

$$u(t) \leq B u(t_0) e^{B \int_{t_0}^t \beta^2(s) ds}$$

de unde deducem

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0| e^{B \int_{t_0}^t \beta^2(s) ds} < B e^{KB} e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0|$$

și propoziția e complet demonstrată.

PROPOZIȚIA 3. *Considerăm sistemul*

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + Y(t, x, y),$$

unde  $|X(t, x, y)| \leq K |y|^\beta$ ,  $\beta > 0$ ,  $|Y(t, x, y)| \leq k |y|$  pentru  $|x| \leq \alpha_0$ ,  $|y| \leq \alpha_0$ ,

$k$  suficient de mic.

*Presupunem că soluția banală a sistemului liniar*

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z$$

*este uniform asimptotic stabilă. Atunci soluția banală a sistemului dat este uniform stabilă și în plus pentru orice soluție pentru care valorile inițiale sînt suficient de mici avem*

$$y(t) \rightarrow 0, \quad x(t) \rightarrow l \quad \text{pentru } t \rightarrow \infty.$$

*Demonstrație.* Vom da și pentru această teoremă două demonstrații, prima bazată pe construcția unei funcții Liapunov, iar a doua pe formula variației constantelor. Fie  $V(t)$  matricea construită ca în teorema 1.6'' pentru sistemul în  $z$ . Notînd

$$V^*(t) = (V(t)y(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))$$

obținem ca în teorema 1.7

$$\frac{dV^*}{dt} = -|y(t; t_0, x_0, y_0)|^2 +$$

$$+ 2(V(t)y(t; t_0, x_0, y_0), Y(t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0)))$$



deci

$$\frac{dV^*}{dt} \leq -|y(t; t_0, x_0, y_0)|^2 + 2Mk|y(t; t_0, x_0, y_0)|^2.$$

Mai departe, ca în teorema 1.7, deducem

$$\frac{dV^*}{dt} \leq -\frac{1}{2}|y(t; t_0, x_0, y_0)|^2 \leq -\frac{1}{2M}V^*(t)$$

deci

$$\mu|y(t; t_0, x_0, y_0)|^2 \leq V^*(t) \leq M|y_0|^2 e^{-\frac{1}{2M}(t-t_0)}$$

deci

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| \leq \sqrt{\frac{M}{\mu}} e^{-\frac{1}{4M}(t-t_0)} |y_0|.$$

Din

$$x(t; t_0, x_0, y_0) = x_0 + \int_{t_0}^t X[u, x(u; t_0, x_0, y_0), y(u; t_0, x_0, y_0)] du$$

rezultă

$$\begin{aligned} |x(t; t_0, x_0, y_0)| &\leq |x_0| + \int_{t_0}^t K \left( \sqrt{\frac{M}{\mu}} \right)^\beta e^{-\frac{\beta}{4M}(u-t_0)} du |y_0|^\beta = \\ &= |x_0| + K \left( \sqrt{\frac{M}{\mu}} \right)^\beta \int_{t_0}^t e^{-\frac{\beta}{4M}u} du |y_0|^\beta \leq |x_0| + K \left( \sqrt{\frac{M}{\mu}} \right)^\beta \frac{4M}{\beta} |y_0|^\beta \end{aligned}$$

ceea ce arată stabilitatea uniformă.

În plus,  $\int_{t_0}^t X[u, x(u; t_0, x_0, y_0), y(u; t_0, x_0, y_0)] du$  rezultă convergentă, deci  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, x_0, y_0)$  există. Propoziția este demonstrată.

Trecem la cea de-a doua demonstrație. Fie  $C(t, s)$  matricea fundamentală de soluții pentru sistemul în  $z$ ; avem

$$|C(t, s)| \leq B e^{-\alpha(t-s)}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} y(t; t_0, x_0, y_0) &= C(t; t_0) y_0 + \\ &+ \int_{t_0}^t C(t, s) Y(s; x(s; t_0, x_0, y_0), y(s; t_0, x_0, y_0)) ds, \end{aligned}$$

deci

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)} |y_0| + Bk \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} |y(s; t_0, x_0, y_0)| ds.$$

Notînd

$$u(t) = e^{\alpha t} |y(t; t_0, x_0, y_0)|,$$

obținem

$$u(t) \leq Bu(t_0) + Bk \int_{t_0}^t u(s) ds,$$

deci

$$u(t) \leq Bu(t_0) e^{Bk(t-t_0)}.$$

Rezultă

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| \leq Be^{-\alpha(t-t_0)} e^{Bk(t-t_0)} |y_0|.$$

Dacă avem  $k < \frac{\alpha}{B}$ , rezultă evaluarea exponențială pentru

$|y(t; t_0, x_0, y_0)|$  și demonstrația continuă ca mai sus.

Cu ajutorul propoziției 3 vom stabili un criteriu de stabilitate de tip special relativ la sistemele de ordinul al doilea.

**PROPOZIȚIA 4.** *Considerăm sistemul de ordinul al doilea  $\frac{dy}{dt} = Y(y, t)$ , unde  $Y$  depinde analitic de  $y$  și are dezvoltarea în serie cu coeficienți mărginiți pentru  $t \geq 0$ . Fie  $\varphi(t, h)$  o familie de soluții mărginite pentru  $t \geq 0$  ale sistemului depinzînd analitic de  $h$  și cu proprietatea că funcțiile  $\varphi_h^{(k)}(t, 0)$  sînt mărginite pentru  $t \geq 0$ . Dacă*

$$|\varphi'_h(t, 0)| \geq \gamma > 0$$

și

$\int_{t_0}^t \left\{ \text{Sp} \frac{\partial Y}{\partial y} [\varphi(t, 0), t] \right\} dt \leq -\nu(t - t_0) + \chi(t)$ , unde  $\chi(t)$  este o funcție mărginită, atunci soluția  $y = \varphi(t, 0)$  este uniform stabilă.

*Observație.* Dacă  $Y$  nu depinde explicit de  $t$  și sistemul admite o soluție mărginită  $y = \varphi(t)$ , atunci există și soluțiile  $\varphi(t + h)$ ; în acest caz  $\varphi'_h(t, 0) = \dot{\varphi}(t)$  și în general

$$\varphi_h^{(k)}(t, 0) = \frac{d^k}{dt^k} \varphi(t),$$

deci condiția ca aceste derivate să fie mărginite este verificată automat. Pentru cazul cînd  $Y$  nu depinde explicit de  $t$  și soluția  $\varphi(t)$  este periodică, rezultatul a fost stabilit de Poincaré.

*Demonstrație.* Fie  $\varphi(t, 0) = \varphi(t)$ . Facem schimbarea de variabile  $x = y - \varphi(t)$  și obținem

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + X(t, x),$$

unde

$$A(t) = \frac{\partial Y}{\partial y}(\varphi(t), t)$$

iar dezvoltarea în serie în raport cu  $x$  a lui  $X(t, x)$  începe cu termeni

de grad mai mare sau egal cu doi. Atît  $A(t)$ , cît și  $X(t, x)$  sînt mărginite ca funcții de  $t$  pentru  $t \geq 0$ . Sistemul în  $x$  admite familia de soluții

$$x = \varphi(t, h) - \varphi(t, 0) = h \varphi'_h(t, 0) + \frac{1}{2} h^2 \varphi''_{h^2}(t, 0) + \dots$$

Înlocuind în sistem se constată că  $\varphi'_h(t, 0)$  este o soluție a sistemului liniar  $\frac{dz}{dt} = A(t)z$ . Conform ipotezelor această soluție este mărginită. Vom nota în cele ce urmează cu  $\psi_1, \psi_2$  componentele vectorului  $\varphi'_h(t, 0)$ . Avem prin ipoteză  $\psi_1^2 + \psi_2^2 \geq \gamma^2 > 0$ . Fie  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2 \\ \psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}$ . Rezultă  $\det \Psi = \psi_1^2 + \psi_2^2$ ,

$$\Psi^{-1} = \frac{1}{\psi_1^2 + \psi_2^2} \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ -\psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\Psi} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 & -\dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_2 & \dot{\psi}_1 \end{pmatrix}$$

și se vede că pe baza ipotezelor teoremei,  $\Psi, \Psi^{-1}, \dot{\Psi}$  sînt mărginite. Facem schimbarea de variabile  $x = \Psi x^*$ . Sistemul devine

$$\frac{dx^*}{dt} = \left( \Psi^{-1} A \Psi - \Psi^{-1} \frac{d\Psi}{dt} \right) x^* + \Psi^{-1} X(t, \Psi x^*).$$

Sistemul liniar

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z$$

devine prin schimbarea de variabile  $z = \Psi z^*$ ,

$$\frac{dz^*}{dt} = \left( \Psi^{-1} A \Psi - \Psi^{-1} \frac{d\Psi}{dt} \right) z^*.$$

Acest sistem va admite soluția  $z_1^* = 1, z_2^* = 0$  care corespunde soluției  $z_1 = \psi_1, z_2 = \psi_2$ .

De aici rezultă că matricea  $\Psi^{-1} A \Psi - \Psi^{-1} \frac{d\Psi}{dt}$  are prima coloană nulă; fie  $a(t), b(t)$  elementele celei de-a doua coloane. Avem

$$\begin{aligned} b(t) &= \text{Sp} \left[ \Psi^{-1} A \Psi - \Psi^{-1} \frac{d\Psi}{dt} \right] = \text{Sp} \Psi^{-1} A \Psi - \text{Sp} \Psi^{-1} \frac{d\Psi}{dt} = \\ &= \text{Sp} A - \text{Sp} \Psi^{-1} \frac{d\Psi}{dt} = \text{Sp} A - \frac{d}{dt} \ln \det \Psi = \text{Sp} A - \frac{d}{dt} \ln (\psi_1^2 + \psi_2^2). \end{aligned}$$

Sistemul în  $x^*$  are deci forma

$$\begin{aligned}\frac{dx_1^*}{dt} &= a(t) x_2^* + X_1^*(t, x_1^*, x_2^*), \\ \frac{dx_2^*}{dt} &= b(t) x_2^* + X_2^*(t, x_1^*, x_2^*),\end{aligned}$$

unde  $X^*$  are aceleași proprietăți ca și  $X$ .

Din  $x^* = \Psi^{-1} x$  rezultă că acest sistem admite familia de soluții mărginite

$$x^* = h\Psi^{-1} \varphi_h(t, 0) + \frac{1}{2}h^2\Psi^{-1} \varphi_{h^2}(t, 0) + \dots$$

Ținând seama de faptul că  $\varphi_h(t, 0)$  este prima coloană a matricii  $\Psi$  rezultă că  $\Psi^{-1} \varphi_h(t, 0)$  are componentele 1 și 0, deci

$$\begin{aligned}x_1^* &= h + h^2 \alpha_2(t) + \dots, \\ x_2^* &= h^2 \beta_2(t) + \dots,\end{aligned}$$

unde conform ipotezelor  $\alpha_k$  și  $\beta_k$  sînt funcții mărginite de  $t$  pentru  $t \geq 0$ . Efectuăm o nouă schimbare de variabile

$$\begin{aligned}x_1^* &= u + u^2 \alpha_2(t) + \dots \\ x_2^* &= v + u^2 \beta_2(t) + \dots\end{aligned}$$

În vecinătatea punctului  $x_1^* = x_2^* = 0$  se capătă

$$\begin{aligned}u &= x_1^* - x_1^{*2} \alpha_2(t) + \dots \\ v &= x_2^* - x_1^{*2} \beta_2(t) + \dots\end{aligned}$$

și proprietățile de stabilitate pentru sistemul în  $(u, v)$  conduc la proprietăți de stabilitate pentru sistemul în  $x^*$ . După ultima transformare sistemul devine

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= a(t) v + U(t, u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= b(t) v + V(t, u, v),\end{aligned}$$

unde  $U$  și  $V$  sînt mărginite ca funcții de  $t$  pentru  $t \geq 0$  și au dezvoltări în serie după puterile lui  $u$  și  $v$  începînd cu termenii de grad  $\geq 2$ . Acest sistem admite familia de soluții  $u = h, v = 0$ , ceea ce impune ca  $U(t, u, 0) \equiv 0$   $V(t, u, 0) \equiv 0$ . De aici rezultă că pentru  $|u| \leq u_0, |v| \leq v_0$  avem  $|U(t, u, v)| < \alpha |v|, |V(t, u, v)| \leq \beta |v|$ , unde  $\alpha$  și  $\beta$  pot fi aleși oricît de mici, cu condiția ca  $u_0$  și  $v_0$  să fie suficient de mici.

Pe de altă parte, din

$$b(t) = \operatorname{Sp} A - \frac{d}{dt} \ln(\psi_1^2 + \psi_2^2)$$

rezultă

$$\int_{t_0}^t b(s) ds = \int_{t_0}^t (\operatorname{Sp} A) ds - \ln \frac{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)}{\psi_1^2(t_0) + \psi_2^2(t_0)}.$$

Soluția generală a ecuației  $\frac{dw}{dt} = b(t) w$

se scrie

$$\begin{aligned} w(t) &= w(t_0) e^{\int_{t_0}^t b(s) ds} = w(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{Sp} A ds} e^{-\ln \frac{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)}{\psi_1^2(t_0) + \psi_2^2(t_0)}} = \\ &= w(t_0) \frac{\psi_1^2(t_0) + \psi_2^2(t_0)}{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)} e^{\int_{t_0}^t \operatorname{Sp} A ds}. \end{aligned}$$

Conform ipotezelor din enunț,  $|w(t)| \leq |w(t_0)| \cdot \frac{|\varphi'_h(t_0, 0)|^2}{\gamma^2} e^{-\nu(t-t_0)} e^{\chi(t)}$ ,

ceea ce arată că soluția banală a ecuației în  $w$  este uniform asimptotic stabilă. Putem aplica propoziția 3, deci soluția banală a sistemului în  $(u, v)$  este uniform stabilă, ceea ce atrage stabilitatea uniformă a soluției banale pentru sistemul în  $x^*$ , deci pentru sistemul în  $x$ , deci stabilitatea uniformă a soluției  $\varphi(t)$ . În plus pentru  $u(t_0), v(t_0)$  suficient de mici avem  $u(t) \rightarrow h, v(t) \rightarrow 0$ , deci  $x_1^*(t) - (h + h^2 \alpha_2(t) + \dots) \rightarrow 0, x_2^*(t) - (h^2 \beta_2(t) + \dots) \rightarrow 0$  deci soluțiile  $x(t)$  tind către una din soluțiile  $\varphi(t, h) - \varphi(t)$  deci pentru orice soluție  $y(t)$  din vecinătatea lui  $\varphi(t)$  există  $h$  astfel ca

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \varphi(t, h)) = 0.$$

## § 8. STABILITATEA ÎN RAPORT CU PERTURBAȚII PERMANENTE

În cele ce urmează vom stabili o serie de teoreme care pun în evidență faptul că dacă o soluție este uniform asimptotic stabilă ea prezintă anumite proprietăți de stabilitate și în raport cu diferite clase de perturbații permanente.

Ca și pînă acum, va fi vorba numai despre cazul stabilității soluției banale, deoarece prin procedeul cunoscut, studiul stabilității oricărei soluții se reduce la acesta.

**DEFINIȚIE.** *Soluția banală a sistemului (1) se numește stabilă în raport cu perturbații permanente dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_1(\varepsilon)$  și  $\delta_2(\varepsilon)$  cu proprietatea ca oricare ar fi funcția  $R(t, x)$  cu  $|R(t, x)| < \delta_2$  pentru*

$|x| \leq \varepsilon$ ,  $t \geq t_0$  și oricare ar fi  $y_0$  cu  $|y_0| < \delta_1$ , soluția  $y(t; t_0, y_0)$  a sistemului

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) + R(t, y) \quad (8)$$

verifică inegalitatea  $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .

**TEOREMA 1.8.** Dacă soluția banală a sistemului (1) este uniform asimptotic stabilă, atunci ea este stabilă și în raport cu perturbații permanente.

Se presupune că  $f$  îndeplinește condiția  $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L(t)|x_1 - x_2|$  pentru  $|x_1| \leq \alpha_0$ ,  $|x_2| \leq \alpha_0$  și  $\left| \int_t^{t+u} L(s) ds \right| < K|u|$ .

*Demonstrație.* Conform teoremei 1.6', din stabilitatea asimptotică uniformă a sistemului (1) rezultă că există o funcție  $V(t, x)$  cu proprietățile:

$$a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|),$$

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leq -c(|x(t; t_0, x_0)|),$$

$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$  pentru  $|x_1| \leq \delta(\delta_0)$ ,  $|x_2| \leq \delta(\delta_0)$ , unde  $\delta(\varepsilon)$  și  $\delta_0$  apar în definiția stabilității asimptotice uniforme. Fie  $y_0$  cu  $|y_0| < \frac{1}{2}\alpha_0$ ; considerăm soluția  $y(v; t, y_0)$  a sistemului (8). Din

$$y(v; t, y_0) = y_0 + \int_t^v \{f(u, y(u; t, y_0)) + R(u, y(u; t, y_0))\} du,$$

rezultă

$$|y(v; t, y_0)| \leq |y_0| + \int_t^v L(u)|y(u; t, y_0)| du + h\eta,$$

unde  $\eta = \sup_{t \geq 0, |y| \leq \alpha_0} |R(t, y)|$ . Inegalitatea are loc pentru  $t \leq v \leq t+h$  astfel încât  $|y(u; t, y_0)| \leq \alpha_0$ . Rezultă

$$|y(v; t, y_0)| \leq (|y_0| + h\eta) e^{Kh},$$

deci pentru  $h$  suficient de mic vom avea în orice caz  $|y(u; t, y_0)| \leq \alpha_0$  și inegalitatea este adevărată pentru orice  $t \leq v \leq t+h$  cu  $h$  suficient de mic.

Fie mai departe  $x(v; t, y_0)$  soluția sistemului (1). Avem

$$\begin{aligned} y(v; t, y_0) - x(v; t, y_0) &= \int_t^v \{f(u, y(u; t, y_0)) - f(u, x(u; t, y_0))\} du + \\ &+ \int_t^v R(u, y(u; t, y_0)) du. \end{aligned}$$

Fie  $\varepsilon > 0$ ,  $l < \min \left\{ a(\varepsilon), a\left(\frac{1}{2} \alpha_0\right) \right\}$ ,  $\delta_1(\varepsilon) = b^{-1}(l)$ ,  $\delta_2(\varepsilon) = \frac{c[b^{-1}(l)]}{M}$ .

Alegem  $|y_0| < \delta_1$  (vom avea în orice caz  $|y_0| < \frac{1}{2} \alpha_0$ ).

Dacă  $R(t, x)$  este astfel încît  $|R(t, x)| < \delta_2$  pentru  $|x| \leq \varepsilon$ ,  $t \geq t_0$ , vom avea  $\eta_1 = \sup_{t \geq 0, |y| \leq \varepsilon} |R(t, y)| < \delta_2$ . Ca mai sus se vede că dacă  $|y_0| < \delta_1$ , atunci pentru  $h$  suficient de mic vom avea  $|y(u; t, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \leq u \leq t + h$ .

Rezultă că putem scrie evaluarea

$$|y(v; t, y_0) - x(v; t, y_0)| \leq h\eta_1 + \int_t^v L(u) |y(u; t, y_0) - x(u; t, y_0)| du$$

de unde

$$|y(v; t, y_0) - x(v; t, y_0)| \leq h\eta_1 e^{Kh},$$

valabilă în orice caz pentru  $h$  suficient de mic. Pe de altă parte, avem

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y)] - V[t, y]}{h} &\leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t, y)] - V[t, y]}{h} + \\ &+ \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y)] - V[t+h, x(t+h; t, y)]}{h}. \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned} |V(t+h, y(t+h; t, y)) - V[t+h, x(t+h; t, y)]| &< \\ &< M |y(t+h; t, y) - x(t+h; t, y)| \end{aligned}$$

dacă

$$|x(t+h; t, y)| < \delta(\delta_0), |y(t+h; t, y)| < \delta(\delta_0).$$

Dacă

$$|y| < \min \left\{ \frac{1}{2} \delta(\delta_0), \frac{1}{2} \alpha_0, \varepsilon \right\},$$

se vede ca mai sus că pentru  $h$  suficient de mic are loc evaluarea

$$|y(t+h; t, y) - x(t+h; t, y)| < h\eta_1 e^{Kh},$$

deci

$$|V[t+h, y(t+h; t, y)] - V[t+h, x(t+h; t, y)]| < M h \eta_1 e^{Kh}$$

De aici rezultă

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y)] - V[t+h, x(t+h; t, y)]}{h} \leq M \eta_1.$$

Deducem

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y)] - V[t, y]}{h} \leq -c(|y|) + M \eta_1 <$$

$$< -c(|y|) + M\delta_2 = -c(|y|) + c[b^{-1}(l)]$$

dacă  $|y| < \varepsilon$  cu  $\varepsilon$  suficient de mic.

Putem acum demonstra că  $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .

Dacă proprietatea nu are loc există  $t_1 > t_0$  astfel ca  $|y(t_1; t_0, y_0)| \geq \varepsilon$ ; există atunci  $t_0 < t_2 \leq t_1$  astfel ca  $|y(t_2; t_0, y_0)| = \varepsilon$  și  $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t_0 \leq t < t_2$ . Fie  $V^*(t) = V[t, y(t; t_0, y_0)]$ . Avem

$$V^*(t_2) = V[t_2, y(t_2; t_0, y_0)] \geq a(|y(t_2; t_0, y_0)|) = a(\varepsilon) > l,$$

$$V^*(t_0) = V(t_0, y_0) \leq b(|y_0|) < b(\delta_1) = b[b^{-1}(l)] = l.$$

Rezultă că există  $t_0 < t_3 < t_2$  astfel ca  $V^*(t_3) = l$ ,  $V^*(t) > l$  pentru  $t_3 < t \leq t_2$ . Avem

$$a(|y(t_3; t_0, y_0)|) \leq V[t_3, y(t_3; t_0, y_0)] = V^*(t_3) = l \leq b(|y(t_3; t_0, y_0)|).$$

Rezultă

$$b^{-1}(l) \leq |y(t_3; t_0, y_0)| \leq a^{-1}(l) < \varepsilon.$$

Putem deci scrie

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t_3+h, y(t_3+h; t_3, y(t_3; t_0, y_0))] - V[t_3, y(t_3; t_0, y_0)]}{h} = \\ = \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t_3+h) - V^*(t_3)}{h} < -c(|y(t_3; t_0, y_0)|) + c[b^{-1}(l)] < \\ < -c[b^{-1}(l)] + c[b^{-1}(l)] = 0 \end{aligned}$$

deci  $V^*(t) < V^*(t_3) = l$  pentru  $t > t_3$  ceea ce este contradictoriu. Teorema a fost astfel complet demonstrată.

Vom da acum unele aplicații ale acestei teoreme.

*Aplicații.* 1° Să presupunem că sistemul (1) conține un număr de parametri; vom nota cu  $\alpha$  un punct în spațiul parametrilor.

Sistemul (1) se scrie

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \alpha).$$

Mulțimea punctelor pentru care soluția banală este uniform asimptotic stabilă formează în spațiul parametrilor domeniul de stabilitate al sistemului; fie  $G$  acest domeniu. Considerăm un punct  $\alpha_0 \in \text{fr } G$ ; *punctul se va numi punct nepericulos al frontierei domeniului de stabilitate dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_1(\varepsilon) > 0$  și  $\delta_2(\varepsilon) > 0$  cu proprietatea că dacă  $|x_0| < \delta_1(\varepsilon)$  și  $\rho(\alpha, \alpha_0) < \delta_2(\varepsilon)$ , atunci  $|x(t; t_0, x_0; \alpha)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .* Am notat aici cu  $\rho(\alpha, \alpha_0)$  distanța dintre  $\alpha$  și  $\alpha_0$  în spațiul parametrilor.

Semnificația acestei definiții este următoarea. Dacă  $\alpha_0$  este un punct al frontierei domeniului de stabilitate, oricât de aproape de el se află puncte din afara acestui domeniu, deci puncte  $\alpha$  pentru care soluția banală încetează să mai fie stabilă; faptul că  $\alpha_0$  este un punct nepericulos al frontierei înseamnă că dacă  $\alpha$  este destul de apropiat de  $\alpha_0$ , chiar dacă se află în



afara domeniului de stabilitate, soluția  $x(t; t_0, x_0, \alpha)$  continuă să rămână apropiată de soluția banală, deci se păstrează anumite proprietăți de stabilitate, suficiente pentru nevoile practice. Rezultă de aici că punctele nepericuloase ale frontierei domeniului de stabilitate au proprietatea că ne putem apropia oricât de mult de ele fără să riscăm ca erori sau perturbații mici să provoace pierderea stabilității. O consecință imediată a teoremei 1.8 este următoarea:

*Dacă soluția banală a sistemului*

$$\frac{dx}{dt} = f(t; x; \alpha_0)$$

*este uniform asimptotic stabilă, punctul  $\alpha_0$  este un punct nepericulos al frontierei domeniului de stabilitate.*

Într-adevăr, sistemul

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \alpha)$$

se poate scrie

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \alpha_0) + \{f(t, x; \alpha) - f(t, x; \alpha_0)\}.$$

Punînd

$$R(t, x) = f(t, x; \alpha) - f(t, x; \alpha_0),$$

rezultă că dacă presupunem că  $f$  este continuă în raport cu  $\alpha$ , uniform în raport cu  $t, x$ , atunci pentru  $\delta_3(\varepsilon) > 0$  dat există  $\delta_2(\varepsilon) > 0$  astfel ca  $\rho(\alpha_1, \alpha_0) < \delta_2, |x| \leq \varepsilon$  să implice  $|R(t, x)| < \delta_3(\varepsilon)$ . Soluția banală a sistemului

$$\frac{dx}{dt} = f(t; x; \alpha_0)$$

fiind uniform asimptotic stabilă, ea rezultă stabilă în raport cu perturbații permanente, deci există  $\delta_1(\varepsilon)$  și  $\delta_3(\varepsilon)$  astfel ca  $|x_0| < \delta_1(\varepsilon)$  și  $|R(t, x)| < \delta_3(\varepsilon)$  pentru  $|x| < \varepsilon$  să implice  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ . Dar  $\rho(\alpha, \alpha_0) < \delta_2(\varepsilon)$  implică  $|R(t, x)| < \delta_3(\varepsilon)$ , deci, dacă  $|x_0| < \delta_1(\varepsilon)$  și  $\rho(\alpha, \alpha_0) < \delta_2(\varepsilon)$  rezultă  $|x(t; t_0, x_0; \alpha)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ , ceea ce arată că  $\alpha_0$  este un punct nepericulos al frontierei.

Să observăm că din cele de mai sus decurge importanța studierii stabilității și în punctele frontierei domeniului de stabilitate. Acest studiu este de obicei mult mai dificil decît pentru punctele interioare ale domeniului de stabilitate.

2° Considerăm sistemul

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(t, x, y), \end{aligned} \tag{9}$$

unde  $x$  și  $y$  sînt vectori. Presupunem  $X(t, 0, 0) = 0$ ,  $Y(t, 0, 0) = 0$  și că soluția banală a sistemului (9) este stabilă în raport cu componentele  $x$ ; aceasta înseamnă că există  $\delta_1(\varepsilon)$  astfel ca  $|x_0| + |y_0| < \delta_1$  să implice  $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .

Presupunem în plus că soluția banală a sistemului ajutător

$$\frac{dz}{dt} = Y(t, 0, z)$$

este uniform asimptotic stabilă.

În aceste condiții, soluția banală a sistemului (9) rezultă uniform stabilă.

*Demonstrație.* Sistemul

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, x, y)$$

se poate scrie sub forma

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, 0, y) + \{Y(t, x, y) - Y(t, 0, y)\}.$$

Prin ipoteză, soluția banală a sistemului ajutător este uniform asimptotic stabilă, deci, pe baza teoremei 1.8, este stabilă în raport cu perturbații permanente. Rezultă că există  $\delta_2(\varepsilon)$  și  $\delta_3(\varepsilon)$  astfel că din  $|y_0| < \delta_2$  și  $|Y(t, x, y) - Y(t, 0, y)| < \delta_3(\varepsilon)$  pentru  $|y| < \varepsilon$ , rezultă  $|y(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ . Deoarece  $Y$  este presupusă continuă în  $x$ , rezultă că există  $\delta_4(\varepsilon)$  astfel ca  $|x| < \delta_4$  să implice  $|Y(t, x, y) - Y(t, 0, y)| < \delta_3(\varepsilon)$  pentru  $t \geq 0$ ,  $|y| < \varepsilon$ . Pe de altă parte, dacă  $|x_0| + |y_0| < \delta_1[\delta_4(\varepsilon)]$ , rezultă  $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \delta_4(\varepsilon)$ .

Fie  $\delta(\varepsilon) = \min \{\delta_1(\varepsilon), \delta_1[\delta_4(\varepsilon)]\}$ . Atunci  $|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$  implică pe de o parte

$$|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \delta_4(\varepsilon) < \varepsilon,$$

iar pe de alta

$$|Y(t, x(t; t_0, x_0, y_0), y) - Y(t, 0, y)| < \delta_2(\varepsilon) \text{ pentru } |y| < \varepsilon,$$

deci

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon \text{ pentru } t \geq t_0.$$

Propoziția e demonstrată.

Un exemplu de aplicare a acestei propoziții a fost dat de T. Hacker în studiul stabilității avionului. În cazul cînd sistemul (9) reprezintă sistemul mișcării perturbate pentru un avion, prin natura lucrurilor o parte din componente pot fi controlate de către pilot. Considerînd că acestea sînt componentele notate cu  $x$  și că sistemul (9) conține în el și acțiunea pilotului, controlul pilotului se va traduce prin faptul că soluția banală a sistemului (9) este stabilă în raport cu componentele  $x$ . Admițînd, ceea ce este firesc, că acțiunea pilotului e nulă cînd componentele  $x$  sînt nule (adică admițînd că pilotul nu acționează atunci cînd nu apar perturbații), rezultă că sistemul ajutător nu depinde de acțiunea pilotului, ci numai de parametrii constructivi ai avionului. Alegînd acești parametri în așa fel încît soluția banală a sistemului ajutător să fie uni-

form asimptotic stabilă, acțiunea pilotului asupra componentelor controlabile va fi suficientă pentru a asigura stabilitatea mișcării avionului.

Să presupunem acum că soluția banală a sistemului (9) este uniform asimptotic stabilă în raport cu componentele  $x$  și că soluția banală a sistemului ajutător este și ea uniform asimptotic stabilă. Atunci soluția banală a sistemului (9) este uniform asimptotic stabilă.

*Demonstrație.* Deoarece soluția banală a sistemului (9) este uniform asimptotic stabilă în raport cu componentele  $x$ , există  $\delta_0$  și  $T(\varepsilon)$  astfel ca  $|x_0| + |y_0| < \delta_0$  și  $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$  să implice  $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$ . Să notăm  $R(t, y) = Y(t, x(t; t_0, x_0, y_0), y) - Y(t, 0, y)$ .

Fie  $\alpha(\varepsilon) < \delta(\varepsilon)$  cu proprietatea că  $|x| < \alpha(\varepsilon), |y| < \varepsilon(\delta_0)$  implică  $|Y(t, x, y) - Y(t, 0, y)| < \frac{\gamma(\varepsilon)}{2M}$ , unde  $M$  este constanta

Lipschitz a funcției Liapunov construită pentru sistemul ajutător, iar  $\gamma(\varepsilon) = c[\delta(\varepsilon)]$ . Fie  $T_0(\varepsilon)$  astfel încât  $t \geq t_0 + T_0(\varepsilon)$  să implice  $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \alpha(\varepsilon)$ . Fie  $b_0 = b(\delta_0)$  și  $c_1$  astfel ca

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t_0, x_0, y_0)] - V[t, y(t; t_0, x_0, y_0)]}{h} \leq c_1$$

pentru  $t_0 \leq t \leq t_0 + T_0$  și  $|x_0| + |y_0| < \delta_0$ . Existența lui  $c_1$  rezultă din faptul că, la fel ca în teorema de stabilitate în raport cu perturbații permanente, avem

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t_0, x_0, y_0)] - V[t, y(t; t_0, x_0, y_0)]}{h} &\leq \\ &\leq -c(|y(t; t_0, x_0, y_0)|) + M\eta, \end{aligned}$$

unde  $\eta > |R(t, y)|$ . Or,  $|x_0| + |y_0| < \delta_0$  implică

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon(\delta_0), |x(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon(\delta_0),$$

ceea ce arată că  $\eta$  va depinde numai de  $\delta_0$  și nu de  $t_0$ , deci se poate lua  $c_1 = M\eta$ .

$$\text{Fie } T_1(\varepsilon) = \frac{2(b_0 + c_1 T_0)}{\gamma(\varepsilon)} \text{ și } T(\varepsilon) = T_0(\varepsilon) + T_1(\varepsilon).$$

În  $[t_0 + T_0, t_0 + T]$  există  $t'$  astfel ca  $|y(t'; t_0, x_0, y_0)| < \delta(\varepsilon)$ . Dacă  $t'$  n-ar exista, atunci am avea în tot intervalul

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| \geq \delta(\varepsilon) \text{ deci}$$

$$-c(|y(t; t_0, x_0, y_0)|) < -c(\delta(\varepsilon)) = -\gamma(\varepsilon);$$

rezultă

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t_0, x_0, y_0)] - V[t, y(t; t_0, x_0, y_0)]}{h} &\leq \\ &\leq -\gamma(\varepsilon) + M \frac{\gamma(\varepsilon)}{2M} = -\frac{\gamma(\varepsilon)}{2} \end{aligned}$$

căci pentru  $t \geq t_0 + T_0$  avem  $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \alpha(\varepsilon)$ , deci  $|R(t, y)| < \frac{\gamma(\varepsilon)}{2M}$ .

Notînd

$$V^*(t) = V[t, y(t; t_0, x_0, y_0)]$$

rezultă

$$\begin{aligned} V^*(t_0 + T) - V^*(t_0) &= V^*(t_0 + T) - V^*(t_0 + T_0) + V^*(t_0 + T_0) - \\ &\quad - V^*(t_0) < -\frac{\gamma}{2} T_1 + c_1 T_0, \end{aligned}$$

deci

$$V^*(t_0 + T) \leq b(\delta_0) - \frac{\gamma}{2} T_1 + c_1 T_0 = 0,$$

ceea ce este contradictoriu.

Rezultă că există  $t' \in [t_0 + T_0, t_0 + T]$  astfel ca  $|y(t'; t_0, x_0, y_0)| < \delta(\varepsilon)$  deci  $|y(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$ . Cu aceasta demonstrația e terminată.

O variantă a noțiunii de stabilitate în raport cu perturbații permanente se obține dacă în loc să cerem ca perturbațiile permanente să fie mici tot timpul, le impunem numai cererea de a fi mici în medie. Sînt astfel luate în considerație clase mai largi de perturbații permanente, deci obținem o proprietate de stabilitate mai puternică.

**DEFINIȚIE.** *Soluția banală a sistemului (1) se numește stabilă în raport cu perturbații permanente mărginite în medie dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  și  $T > 0$  există  $\delta > 0$  și  $\eta > 0$  astfel încît oricare ar fi funcția  $R(t, y)$  cu  $|R(t, y)| \leq \varphi(t)$  pentru  $|y| \leq \varepsilon$  și  $\int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(s) ds < \eta$  și oricare ar fi  $y_0$  cu  $|y_0| < \delta$ , să rezulte  $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ , unde  $y(t; t_0, y_0)$  este soluția sistemului (8).*

**TEOREMA 1.8'.** *Dacă soluția banală a sistemului (1) este uniform asimptotic stabilă, atunci ea este stabilă în raport cu perturbații permanente mărginite în medie. Sînt presupuse îndeplinite aceleași condiții ca în teorema 1.8.*

**Demonstrație.** Fie  $V(t, x)$  ca în demonstrația teoremei 1.8. Considerăm o soluție  $y(t; t_0, y_0)$  a sistemului (8),  $\tau \in [t_0, t]$  și soluția  $x(t; \tau, y(\tau; t_0, y_0))$  a sistemului (1). Vom avea

$$\begin{aligned} V[\tau + h, y(\tau + h; t_0, y_0)] - V[\tau + h, x(\tau + h; \tau, y(\tau; t_0, y_0))] &\leq \\ &\leq M |y(\tau + h; t_0, y_0) - x(\tau + h; \tau, y(\tau; t_0, y_0))|, \end{aligned}$$

dacă  $|y(\tau; t_0, y_0)|$  este suficient de mic.

Putem scrie

$$\begin{aligned} y(\tau + h; t_0, y_0) - x(\tau + h; \tau, y(\tau; t_0, y_0)) &= y(\tau + h; t_0, y_0) - y(\tau; t_0, y_0) - \\ &\quad - [x(\tau + h; \tau, y(\tau; t_0, y_0)) - y(\tau; t_0, y_0)] = \\ &= \int_{\tau}^{\tau+h} \dot{y}(t; t_0, y_0) dt - \int_{\tau}^{\tau+h} f[t, x(t; \tau, y(\tau; t_0, y_0))] dt. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} & |V[\tau + h, y(\tau + h; t_0, y_0)] - V[\tau + h, x(\tau + h; \tau, y(\tau; t_0, y_0))]| \leq \\ & \leq M \int_{\tau}^{\tau+h} |\dot{y}(t; t_0, y_0) - f[t, x(t; \tau, y(\tau; t_0, y_0))]| dt. \end{aligned}$$

De aici se capătă

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[\tau + h, y(\tau + h; t_0, y_0)] - V[\tau + h, x(\tau + h; \tau, y(\tau; t_0, y_0))]}{h} & \leq \\ & \leq M |\dot{y}(\tau; t_0, y_0) - f[\tau, y(\tau; t_0, y_0)]| \leq M \varphi(\tau) \end{aligned}$$

dacă  $|y(\tau; t_0, y_0)| < \varepsilon$ .

Deducem mai departe

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[\tau + h, y(\tau + h; t_0, y_0)] - V[\tau, y(\tau; t_0, y_0)]}{h} \leq \\ & \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[\tau + h, y(\tau + h; t_0, y_0)] - V[\tau + h, x(\tau + h; \tau, y(\tau; t_0, y_0))]}{h} + \\ & + \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[\tau + h, x(\tau + h; \tau, y(\tau; t_0, y_0))] - V[\tau, y(\tau; t_0, y_0)]}{h} \leq \\ & \leq M \varphi(\tau) - c(|y(\tau; t_0, y_0)|). \end{aligned}$$

Integrînd de la  $t_0$  la  $t$  se capătă

$$V[t, y(t; t_0, y_0)] - V(t_0, y_0) \leq M \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t c(|y(\tau; t_0, y_0)|) d\tau \quad (*)$$

Fie acum  $\varepsilon > 0$ ,  $T > 0$ . Alegem  $\delta < b^{-1} \left( \frac{1}{2} a(\varepsilon) \right)$  și

$$\eta < \min \left\{ \frac{T}{M} c \left[ b^{-1} \left( \frac{1}{2} a(\varepsilon) \right) \right], \frac{1}{2M} a(\varepsilon) \right\}. \text{ Fie } |y_0| < \delta, \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(s) ds < \eta.$$

Arătăm că  $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .

Presupunem că n-ar fi așa; atunci există  $t_1 > t_0$  astfel ca  $|y(t_1; t_0, y_0)| \geq \varepsilon$ . Rezultă că există  $t_0 < t_2 \leq t_1$  astfel ca  $|y(t_2; t_0, y_0)| = \varepsilon$  și  $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t_0 \leq t < t_2$ .

Avem

$$a(\varepsilon) = a(|y(t_2; t_0, y_0)|) \leq V[t_2, y(t_2; t_0, y_0)] = V^*(t_2)$$

$$V^*(t_0) = V[t_0, y_0] \leq b(|y_0|) < \frac{1}{2} a(\varepsilon).$$

Rezultă că există  $t_0 < t_3 < t_2$  astfel ca  $V^*(t_3) = \frac{1}{2} a(\varepsilon)$  și

$$V^*(t) > \frac{1}{2} a(\varepsilon) \text{ pentru } t_3 < t \leq t_2.$$

Rezultă, pentru  $t_3 < t \leq t_2$ , că avem

$$\frac{1}{2} a(\varepsilon) < V^*(t) = V[t, y(t; t_0, y_0)] \leq b(|y(t; t_0, y_0)|)$$

deci

$$|y(t; t_0, y_0)| > b^{-1}\left[\frac{1}{2} a(\varepsilon)\right],$$

deci

$$c(|y(t; t_0, y_0)|) > c\left[b^{-1}\left(\frac{1}{2} a(\varepsilon)\right)\right].$$

Din  $t \leq t_2$  rezultă  $|y(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon$ , deci putem aplica formula (\*) și deducem

$$\begin{aligned} V[t_2, y(t_2; t_0, y_0)] &\leq V[t_3, y(t_3; t_0, y_0)] + M \int_{t_3}^{t_2} \varphi(\tau) d\tau - \\ &- \int_{t_3}^{t_2} c(|y(\tau; t_0, y_0)|) d\tau \leq \frac{1}{2} a(\varepsilon) + M \int_{t_3}^{t_2} \varphi(\tau) d\tau - (t_2 - t_3) c\left[b^{-1}\left(\frac{1}{2} a(\varepsilon)\right)\right]. \end{aligned}$$

Fie  $(m-1)T \leq t_2 - t_3 < mT$ ; rezultă

$$\int_{t_3}^{t_2} \varphi(\tau) d\tau < \int_{t_3}^{t_3+mT} \varphi(\tau) d\tau < m\eta.$$

Dar

$$m-1 \leq \frac{1}{T} (t_2 - t_3),$$

deci

$$m \leq \frac{1}{T} (t_2 - t_3) + 1,$$

deci

$$\int_{t_3}^{t_2} \varphi(\tau) d\tau < \frac{\eta}{T} (t_2 - t_3) + \eta < \frac{1}{M} c\left[b^{-1}\left(\frac{1}{2} a(\varepsilon)\right)\right] (t_2 - t_3) + \eta.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} V[t_2, y(t_2; t_0, y_0)] &\leq \frac{1}{2} a(\varepsilon) + M\eta + \\ &+ (t_2 - t_3) \left\{ c\left[b^{-1}\left(\frac{1}{2} a(\varepsilon)\right)\right] - c\left[b^{-1}\left(\frac{1}{2} a(\varepsilon)\right)\right] \right\} \end{aligned}$$

deci

$$V[t_2, y(t_2; t_0, y_0)] \leq \frac{1}{2} a(\varepsilon) + M \eta.$$

Dar  $\eta < \frac{1}{2M} a(\varepsilon)$ , deci în definitiv  $V[t_2, y(t_2; t_0, y_0)] < a(\varepsilon)$ .

Rezultă

$$a(|y(t_2; t_0, y_0)|) \leq V[t_2, y(t_2; t_0, y_0)] < a(\varepsilon),$$

deci  $|y(t_2; t_0, y_0)| < \varepsilon$ , ceea ce contrazice alegerea lui  $t_2$ .

Teorema este demonstrată.

O variantă puțin diferită a aceluiași tip de stabilitate, bazată tot pe ideea considerării unor perturbații care pot fi în unele momente mari dar sînt mici în medie, a fost definită de Ivo Vrkoč care a numit-o stabilitate integrală.

**DEFINIȚIE.** Vom spune că soluția banală a sistemului (I) este integral stabilă dacă există  $\delta_0 > 0$  și funcția  $B(\delta) > 0$  definită pentru  $0 < \delta < \delta_0$  (pe care o presupunem monotonă și continuă) cu  $\lim_{\delta \rightarrow 0} B(\delta) = 0$  astfel ca  $|y_0| < \delta$  și  $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{|y| < B(\delta)} |R(t, y)| dt < \delta$  să implice  $|y(t; t_0, y_0)| < B(\delta)$  pentru  $t \geq t_0$ ,  $y(t; t_0, y_0)$  fiind soluție a sistemului (8).

Este ușor de văzut că această definiție este echivalentă cu următoarea

*Soluția banală a sistemului (I) este integral stabilă dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_1 > 0$  și  $\delta_2 > 0$  astfel încît  $|y_0| < \delta_1$  și  $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{|y| \leq \varepsilon} |R(t, y)| dt < \delta_2$  să implice  $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ ; dacă luăm  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  și  $B(\delta)$  ca inversă a funcției  $\delta(\varepsilon)$  cădem peste prima definiție, iar prima definiție implică pe a doua cu  $\delta_1 = \delta_2$ .*

*Soluția banală a sistemului (I) se numește asimptotic integral stabilă dacă e integral stabilă și în plus există funcțiile  $T(\delta, \varepsilon)$  și  $\gamma(\delta, \varepsilon)$  astfel ca  $|y_0| < \delta$ ,  $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{|y| < B(\delta)} |R(t, y)| dt < \gamma(\delta, \varepsilon)$ ,  $t \geq t_0 + T(\delta, \varepsilon)$  să implice  $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$ .*

În cele ce urmează vom pune în evidență o serie de condiții echivalente cu stabilitatea integrală, respectiv stabilitatea integrală asimptotică.

1) *Soluția banală a sistemului (I) este integral stabilă dacă și numai dacă există  $\delta_0 > 0$  și  $B(\delta)$  definită pe  $(0, \delta_0)$   $B(\delta) > 0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} B(\delta) = 0$ ,*

*astfel ca oricare ar fi funcția  $\varphi(t)$  continuă cu  $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \delta$  soluția  $y(t; t_0, y_0)$  a sistemului*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) + \varphi(t) \quad (10)$$

*cu  $|y_0| < \delta$  să verifice inegalitatea  $|y(t; t_0, y_0)| < B(\delta)$  pentru  $t \geq t_0$ .*

*Demonstrație.* E suficient să arătăm că dacă proprietatea din enunț are loc, soluția banală a sistemului (1) este integral stabilă. Fie  $R(t, y)$  astfel ca

$$\int_{t_0}^{\infty} \sup_{|y| \leq B(\delta)} |R(t, y)| dt < \delta,$$

unde  $B(\delta)$  e ales pe baza proprietății din enunț. Fie  $y_0$  cu  $|y_0| < \delta$  și soluția  $y(t; t_0, y_0)$  a sistemului (8). Dacă nu am avea pentru toți  $t \geq t_0$  inegalitatea  $|y(t; t_0, y_0)| < B(\delta)$  ar exista un prim punct  $t_1 > t_0$  astfel ca  $|y(t_1; t_0, y_0)| = B(\delta)$ . Pentru  $t \in [t_0, t_1]$  luăm  $\varphi(t) = R(t, y(t; t_0, y_0))$ ; avem

$$\int_{t_0}^{t_1} |\varphi(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} |R(t, y(t; t_0, y_0))| dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \sup_{|y| \leq B(\delta)} |R(t, y)| dt < \delta.$$

Prelungim pe  $\varphi(t)$  continuu pe toată semiaxa  $t \geq t_0$  astfel ca  $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \delta$ ; pentru aceasta e suficient să luăm  $t_2 > t_1$  astfel ca  $t_2 - t_1 < \frac{2(\delta - \int_{t_0}^{t_1} |\varphi(t)| dt)}{|\varphi(t_1)| + 1}$ , să punem  $\varphi(t_2) = 0$ , și să luăm pe  $\varphi(t)$  liniară pe  $[t_1, t_2]$  și nulă pentru  $t \geq t_2$ .

Fie acum  $z(t; t_0, y_0)$  soluția sistemului (10) cu  $\varphi(t)$  ales ca mai sus.

Din  $|y_0| < \delta$  și  $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \delta$  rezultă  $|z(t; t_0, y_0)| < B(\delta)$  pentru  $t \geq t_0$  deci  $|z(t_1; t_0, y_0)| < B(\delta)$ . Dar pe  $[t_0, t_1]$ ,  $z(t; t_0, y_0) \equiv y(t; t_0, y_0)$ , deci  $|y(t_1; t_0, y_0)| < B(\delta)$  ceea ce este contradictoriu.

2) *Soluția banală a sistemului (1) este asimptotic integral stabilă dacă și numai dacă e integral stabilă și în plus există  $T(\delta, \varepsilon) > 0$  și  $\gamma(\delta, \varepsilon) > 0$  definite pe  $(0, \delta_0)$ ,  $\varepsilon > 0$  astfel ca oricare ar fi  $\varphi(t)$  continuă cu  $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \gamma(\delta, \varepsilon)$ ,  $|y_0| < \delta$  și  $t \geq t_0 + T(\delta, \varepsilon)$  să rezulte  $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$ ,  $y(t; t_0, y_0)$  fiind soluția sistemului (10).*

*Demonstrație.* Din nou e suficient să arătăm că cererea din enunț implică stabilitatea integrală asimptotică. Dacă nu ar fi așa ar exista  $\delta' < \delta_0$  și  $\varepsilon' > 0$  astfel încât oricare ar fi  $T > 0$  și  $\gamma > 0$  să existe  $y_0$  cu  $|y_0| < \delta'$ ,  $R(t, y)$  cu  $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{|y| \leq B(\delta)} |R(t, y)| dt < \gamma$  și  $t_1 > t_0 + T$  astfel ca  $|y(t_1; t_0, y_0)| \geq \varepsilon'$ ,  $y(t_1; t_0, y_0)$  fiind soluția sistemului (8). Fie  $T(\delta', \varepsilon')$ ,  $\gamma(\delta', \varepsilon')$  construite pe baza proprietății din enunț,  $y_0$ ,  $R(t, y)$  și  $t_1$  corespunzătoare pe baza ipotezei raționamentului prin absurd. Fie  $\varphi(t) = R(t, y(t; t_0, y_0))$  pentru  $t \in [t_0, t_1]$ ; avem

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} |\varphi(t)| dt &= \int_{t_0}^{t_1} |R(t, y(t; t_0, y_0))| dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \sup_{|y| \leq B(\delta)} |R(t, y)| dt \leq \\ &\leq \int_{t_0}^{\infty} \sup_{|y| \leq B(\delta)} |R(t, y)| dt < \gamma(\delta', \varepsilon'). \end{aligned}$$



Ca în cazul precedent prelungim continuu pe  $\varphi(t)$  pe toată axa cu păstrarea acestei inegalități și luăm soluția  $z(t; t_0, y_0)$  a sistemului (10) cu  $\varphi(t)$  astfel ales. Din  $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \gamma(\delta', \varepsilon')$ ,  $|y_0| < \delta'$  și  $t_1 > t_0 + T(\delta', \varepsilon')$  rezultă  $|z(t_1; t_0, y_0)| < \varepsilon'$ . Dar pe  $[t_0, t_1]$  avem  $z(t; t_0, y_0) \equiv y(t; t_0, y_0)$ , deci  $|y(t_1; t_0, y_0)| < \varepsilon'$  ceea ce este contradictoriu.

3) *Soluția banală a sistemului (1) este integral stabilă dacă și numai dacă pentru orice  $0 < \delta < \delta_0$  există  $B(\delta) > 0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} B(\delta) = 0$  (monotonă și continuă), astfel ca oricare ar fi  $y(t)$  cu derivată continuă pe  $[t_0, t_1]$  cu  $|y(t_0)| < \delta$ ,  $\int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(t) - f(t, y(t))| dt < \delta$ , să rezulte  $|y(t)| < B(\delta)$  pentru  $t \in [t_0, t_1]$ .*

*Demonstrație.* Să presupunem soluția banală integral stabilă și fie  $B(\delta)$  construit conform proprietății de stabilitate integrală,  $y(t)$  ca în enunț. Fie  $\varphi(t)$  continuă pentru  $t \geq t_0$  astfel ca  $\varphi(t) = \dot{y}(t) - f(t, y(t))$  pe  $[t_0, t_1]$ ,  $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \delta$ ; asemenea funcție se construiește ca la punctul 1).

Considerăm sistemul (10) cu  $\varphi(t)$  astfel ales și soluția  $z(t; t_0, y(t_0))$ .

Conform celor stabilite la punctul 1) rezultă  $|z(t; t_0, y(t_0))| < B(\delta)$  pentru  $t \geq t_0$  și cum pe  $[t_0, t_1]$  avem  $z(t; t_0, y(t_0)) \equiv y(t)$ , rezultă  $|y(t)| < B(\delta)$  pe  $[t_0, t_1]$ .

Fie acum  $B(\delta)$  ca în enunț și  $\varphi(t)$  continuă pentru  $t \geq t_0$  cu  $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \delta$ . Soluția  $y(t; t_0, y_0)$  cu  $|y_0| < \delta$  a sistemului (10) verifică pentru orice  $t_1$  condiția din enunț, deci pentru orice  $t_1 > t_0$  avem  $|y(t; t_0, y_0)| < B(\delta)$  pe  $[t_0, t_1]$ , deci condiția de la punctul 1) e îndeplinită și soluția banală a sistemului (1) e integral stabilă.

Propri tat a 3) arată că noțiunea de stabilitate integrală definită de Ivo Vrkoč este echivalentă cu noțiunea de stabilitate tare definită de Okamura și reluată recent de Kyuzo Hayashi.

4) *Soluția banală a sistemului (1) este asimptotic integral stabilă dacă și numai dacă e integral stabilă și în plus pentru orice  $0 < \delta < \delta_0$ ,  $\varepsilon > 0$ , există  $T(\delta, \varepsilon) > 0$ ,  $\gamma(\delta, \varepsilon) > 0$  cu proprietatea că pentru oricare  $y(t)$  cu derivată continuă pe  $[t_0, t_1]$ ,  $t_1 > t_0 + T$  și astfel ca  $|y(t_0)| < \delta$ ,  $\int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(t) - f(t, y(t))| dt < \gamma(\delta, \varepsilon)$  rezultă  $|y(t)| < \varepsilon$  pe  $[t_0 + T, t_1]$ .*

*Demonstrație.* Presupunem soluția banală a sistemului (1) asimptotic integral stabilă și fie  $T(\delta, \varepsilon)$ ,  $\gamma(\delta, \varepsilon)$  ca la punctul 2)  $y(t)$  ca în enunț. Definim pentru  $t \geq t_0$  funcția  $\varphi(t)$  punînd  $\varphi(t) = \dot{y}(t) - f(t, y(t))$  pentru  $t_0 \leq t \leq t_1$  și cerînd  $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \gamma(\delta, \varepsilon)$ .

Considerăm soluția  $z(t; t_0, y(t_0))$  a sistemului (10). Rezultă  $|z(t; t_0, y(t_0))| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0 + T$  și cum pe  $[t_0, t_1]$  avem  $z(t; t_0, y(t_0)) \equiv y(t)$ , rezultă  $|y(t)| < \varepsilon$  pe  $[t_0 + T, t_1]$ .

Reciproc, fie  $T(\delta, \varepsilon)$  și  $\gamma(\delta, \varepsilon)$  ca în enunț și  $\varphi(t)$  continuă cu  $\int_{t_0}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \gamma(\delta, \varepsilon)$ ; atunci soluția  $y(t; t_0, y_0)$  a sistemului (10) cu

$|y_0| < \delta$  verifică pentru orice  $t_1 > t_0$  condiția din enunț, deci  $|y(t; t_0, y_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0 + T$ .

LEMĂ. Dacă  $V(t, x)$  are proprietățile :

1°.  $V(t, x)$  e continuă ;

2°.  $|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$  pentru  $|x_i| \leq \delta_0$  ;

3°  $\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leq$

$\leq \Phi[x(t; t_0, x_0)],$

unde  $x(t; t_0, x_0)$  e soluția sistemului (1) iar  $\Phi$  e continuă, atunci

$$V(t, y(t)) \leq V(t_0, y(t_0)) + M \int_{t_0}^t |\dot{y}(t) - f(t, y(t))| dt + \int_{t_0}^t \Phi(y(t)) dt$$

pentru orice funcție  $y(t)$  cu derivată continuă pe  $[t_0, t]$ .

Demonstrație. Fie  $\tau \in [t_0, t]$  ; considerăm soluția  $x(t; \tau, y(\tau))$  a sistemului (1). Avem

$$\begin{aligned} & |V[\tau+h, y(\tau+h)] - V[\tau+h, x(\tau+h; \tau, y(\tau))]| \leq M |y(\tau+h) - \\ & - x(\tau+h; \tau, y(\tau))| = M |y(\tau+h) - y(\tau) - \int_{\tau}^{\tau+h} f[t, x(t; \tau, y(\tau))] dt| = \\ & = Mh \left| \frac{1}{h} \int_{\tau}^{\tau+h} \dot{y}(t) dt - \frac{1}{h} \int_{\tau}^{\tau+h} f[t, x(t; \tau, y(\tau))] dt \right| \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[\tau+h, y(\tau+h)] - V[\tau+h, x(\tau+h; \tau, y(\tau))]}{h} & \leq \\ & \leq M |\dot{y}(\tau) - f[\tau, y(\tau)]|. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[\tau+h, y(\tau+h)] - V[\tau, y(\tau)]}{h} & \leq \\ \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[\tau+h, y(\tau+h)] - V[\tau+h, x(\tau+h; \tau, y(\tau))]}{h} + \\ + \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[\tau+h, x(\tau+h; \tau, y(\tau))] - V[\tau, y(\tau)]}{h} & \leq \\ \leq M |\dot{y}(\tau) - f[\tau, y(\tau)]| + \Phi(y(\tau)). \end{aligned}$$

Integrând, se capătă inegalitatea din enunț.

LEMĂ. Dacă există o funcție continuă  $V(t, x)$  definită pentru  $t \geq 0$ ,  $|x| \leq \delta_0$  cu proprietățile :

1°.  $V(t, x) \geq a(|x|)$ ,  $V(t, 0) \equiv 0$  ;

2°.  $|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$  ;

$$3^\circ. \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leqslant \\ \leqslant g(t) V[t, x(t; t_0, x_0)]$$

cu  $\int_0^\infty g(t) dt < \infty$ ,  $g(t) \geqslant 0$ ,  $x(t; t_0, x_0)$  soluție a sistemului (1), atunci soluția banală a sistemului (1) este integral stabilă.

*Demonstrație.* Avem ca în lema precedentă

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[\tau+h, y(\tau+h)] - V[\tau, y(\tau)]}{h} \leqslant \\ \leqslant M |\dot{y}(\tau) - f[\tau, y(\tau)]| + g(\tau) V[\tau, y(\tau)].$$

De aici se capătă prin integrare

$$V[t, y(t)] \leqslant V[t_0, y(t_0)] e^{\int_{t_0}^t g(u) du} + \\ + M e^{\int_{t_0}^t g(u) du} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^\tau g(u) du} |\dot{y}(\tau) - f[\tau, y(\tau)]| d\tau.$$

Dacă

$$|y(t_0)| < \delta, \int_{t_0}^\infty g(t) dt = k, \int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(\tau) - f[\tau, y(\tau)]| d\tau < \delta,$$

rezultă

$$a(|y(t)|) \leqslant V[t, y(t)] < M e^k \delta + M e^k \delta = 2M e^k \delta,$$

deci

$$|y(t)| \leqslant a^{-1}(2M e^k \delta) = B(\delta).$$

Pe baza proprietății 3) rezultă stabilitatea integrală.

LEMĂ. Dacă există  $V(t, x)$  definită pentru  $t \geqslant 0$ ,  $|x| \leqslant \delta_0$  cu proprietățile:

a)  $V(t, x) \geqslant a(|x|)$ ,  $V(t, 0) \equiv 0$ ;

b)  $|V(t, x_1) - V(t, x_2)| < M |x_1 - x_2|$ ;

c)  $\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t_0, x_0)] - V[t, x(t; t_0, x_0)]}{h} \leqslant$

$\leqslant -c(|x(t; t_0, x_0)|)$ , atunci soluția banală a sistemului (1) este asimptotic integral stabilă.

*Demonstrație.* Pe baza lemei precedente soluția banală a sistemului (1) e integral stabilă. Pentru  $\varepsilon > 0$  alegem  $\gamma_1 > 0$  astfel încît dacă  $|y(t_2)| < \gamma_1$  și  $\int_{t_2}^{t_3} |\dot{y}(t) - f[t, y(t)]| dt < \gamma_1$  să rezulte  $|y(t)| < \varepsilon$  pentru  $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$ ; asemenea  $\gamma_1$  există pe baza proprietății 3), anume  $\gamma_1 = B^{-1}(\varepsilon)$ . Luăm apoi  $\gamma = \min(\delta, \gamma_1)$ ,  $l = c(\gamma_1)$ ,  $T(\delta, \varepsilon) = \frac{M(\delta + \gamma)}{l}$ . Fie  $y(t)$  cu de-

rivată continuă pe  $[t_0, t_1]$ ,  $t_1 > t_0 + T(\delta, \varepsilon)$ ,  $|y(t_0)| < \delta$ ,  $\int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(t) - f[t, y(t)]| dt < \gamma$ . Dacă am avea  $|y(t)| \geq \gamma$  pe  $[t_0, t_0 + T]$ , atunci

$$V[t_0 + T, y(t_0 + T)] \leq V[t_0, y(t_0)] + M \int_{t_0}^{t_0+T} |\dot{y}(t) - f[t, y(t)]| dt - \int_{t_0}^{t_0+T} c(|y(t)|) dt \leq M\delta + M\gamma - Tl = 0$$

ceea ce e contradictoriu.

Rezultă că există  $\tau \in [t_0, t_0 + T]$  astfel ca  $|y(\tau)| < \gamma \leq \gamma_1$ .

Cum

$$\int_{\tau}^{t_1} |\dot{y}(t) - f(t, y(t))| dt \leq \int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(t) - f(t, y(t))| dt < \gamma \leq \gamma_1$$

rezultă conform alegerii lui  $\gamma_1$  că  $|y(t)| < \varepsilon$  pentru  $\tau \leq t \leq t_1$ , deci în orice caz pe  $[t_0 + T, t_1]$ . Conform proprietății 4) rezultă imediat stabilitatea asimptotică integrală.

Din această leamnă rezultă imediat:

**TEOREMA 1.8''.** *Dacă soluția banală a sistemului (1) este uniform asimptotic stabilă ea este și integral asimptotic stabilă.*

Am văzut în acest paragraf că stabilitatea asimptotică uniformă implică stabilitatea în raport cu perturbații permanente, stabilitatea în raport cu perturbații permanente mărginite în medie, stabilitatea asimptotică integrală. În încheierea acestui paragraf vom arăta că ea se conservă și în cazul unor perturbații permanente care însă tind către zero când  $t \rightarrow \infty$ . Pentru aceasta vom avea nevoie de o leamnă, cu interes în sine, care dă o slăbire a condițiilor din teorema 1.5.

**LEMĂ.** *Presupunem că există o funcție  $V(t, x)$  cu proprietățile:*

1°  $a(t, |x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|)$

2°  $\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h; t, x)] - V[t, x]}{h} \leq -c(t, |x|)$

unde  $b(r)$  e continuă, monoton crescătoare,  $b(0) = 0$ , iar  $a(t, r)$ ,  $c(t, r)$  sînt continue și astfel încît pentru orice pereche  $0 < \alpha \leq \beta < H$  există  $\theta(\alpha, \beta) \geq 0$ ,  $k(\alpha, \beta) > 0$  astfel încît  $a(t, r) > k(\alpha, \beta)$ ,  $c(t, r) > k(\alpha, \beta)$  pentru  $\alpha \leq r \leq \beta$ ,  $t \geq \theta(\alpha, \beta)$ . Atunci soluția banală a sistemului (1) este uniform asimptotic stabilă.

**Demonstrație.** Fie  $\varepsilon > 0$ ,  $\theta_1 = \theta(\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $k_1 = k(\varepsilon, \varepsilon)$ . Avem  $a(t, \varepsilon) > k_1$  pentru  $t \geq \theta_1$ . Fie  $\eta_1(\varepsilon) \leq b^{-1}[k(\varepsilon, \varepsilon)]$ . Vom avea  $V(t, x) \geq a(t, |x|) > k_1$  dacă  $|x| = \varepsilon$ ,  $t \geq \theta_1$ , și  $V(t, x) \leq b(|x|) \leq k_1$ , dacă  $|x| < \eta_1(\varepsilon)$ .

Fie  $\theta_2 = \theta[\eta_1(\varepsilon), \varepsilon]$ . Atunci pentru  $t \geq \theta_2$ ,  $\eta_1 \leq r \leq \varepsilon$  vom avea  $c(t, r) > 0$ .

Fie acum  $\theta = \max(\theta_1, \theta_2)$  și  $\eta(\varepsilon)$  ales astfel încît  $|x_0| < \eta$  și  $0 \leq t_0 \leq \theta$  să implice  $|x(t; t_0, x_0)| < \eta_1$  pentru  $t_0 \leq t \leq \theta$ . Alegerea lui  $\eta(\varepsilon)$  este posibilă pe baza lemei 0,7, conform căreia avem

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq |x_0| e^{\int_{t_0}^t L(u) du} \leq |x_0| e^{K\theta}.$$

Condiția  $|x_0| < \eta_1(\varepsilon) e^{-K\theta(\varepsilon)}$  implică  $|x(t; t_0, x_0)| < \eta_1$  pentru  $t_0 \leq t \leq \theta$ , deci putem lua  $\eta(\varepsilon) = \eta_1(\varepsilon) e^{-K\theta(\varepsilon)}$ . Dacă  $|x_0| < \eta(\varepsilon)$ , vom avea în particular  $|x(\theta; t_0, x_0)| < \eta_1$  pentru  $0 \leq t_0 < \theta$ .

Dacă există  $t > \theta$  astfel ca  $|x(t; t_0, x_0)| \geq \varepsilon$ , există  $t_1 > \theta$  astfel ca  $|x(t_1; t_0, x_0)| = \varepsilon$  și  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru  $\theta \leq t < t_1$ .

Deoarece  $t_1 > \theta \geq \theta_1$  și  $|x(t_1; t_0, x_0)| = \varepsilon$ , rezultă

$$V[t_1, x(t_1; t_0, x_0)] > k_1;$$

pe de altă parte,

$$V[\theta, x(\theta; t_0, x_0)] < k_1.$$

Rezultă că va exista  $\theta < t_2 < t_1$  astfel ca  $V[t_2, x(t_2; t_0, x_0)] = k_1$  și  $V[t, x(t; t_0, x_0)] \geq k_1$ , pentru  $t_2 \leq t \leq t_1$ . Rezultă deci  $|x(t_2; t_0, x_0)| \geq \eta_1$ . Din  $\eta_1 \leq |x(t_2; t_0, x_0)| \leq \varepsilon$  și  $t \geq \theta > \theta_2$  rezultă  $c(t_2, |x(t_2; t_0, x_0)|) > 0$ , deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t_2 + h, x(t_2 + h; t_0, x_0)] - V[t_2, x(t_2; t_0, x_0)]}{h} < -c[t_2, |x(t_2; t_0, x_0)|] < 0.$$

Dar din

$$V[t_2, x(t_2; t_0, x_0)] = k_1, \quad V[t, x(t; t_0, x_0)] \geq k_1 \text{ pentru } t_2 \leq t,$$

rezultă

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t_2 + h, x(t_2 + h; t_0, x_0)] - V[t_2, x(t_2; t_0, x_0)]}{h} \geq 0.$$

Am obținut o contradicție, deci  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru toți  $t \geq \theta$  dacă  $|x_0| < \eta(\varepsilon)$ . Cum pentru  $t_0 \leq t \leq \theta$  avem  $|x(t; t_0, x_0)| < \eta_1(\varepsilon) < \varepsilon$ , rezultă că  $|x_0| < \eta(\varepsilon)$  implică  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru toți  $t \geq t_0$ .

Pentru  $t_0 > \theta$  și  $|x_0| < \eta < \eta_1$  rezultă  $V(t_0, x_0) < k_1$ . Dacă există  $t > t_0$  astfel ca  $|x(t; t_0, x_0)| \geq \varepsilon$ , atunci există  $t_1 > t_0 > \theta$  astfel ca  $|x(t_1; t_0, x_0)| = \varepsilon$  și  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru  $t_0 \leq t < t_1$ .

Din  $t_1 > \theta$  rezultă  $V[t_1, x(t_1; t_0, x_0)] > k_1$ . Mai departe demonstrația decurge ca mai sus și rezultă și în acest caz  $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .

În definitiv, oricare ar fi  $t_0$ , dacă  $|x_0| < \eta(\varepsilon)$  rezultă

$$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon \text{ pentru } t \geq t_0.$$

Fie acum  $h > 0$ ,  $\eta(h)$  găsit ca mai sus,  $0 < \delta < \eta(h)$ ,  $\eta(\delta)$  ca mai sus. Alegem  $\theta_1 = \theta(\eta, h)$ ,  $k_1 = k(\eta, h)$ ,  $C_1 = b(h)$ ,  $C_2 = \inf c(t, r)$  pentru  $0 \leq t \leq \theta_1$ ,  $\eta \leq r \leq h$ ,  $T_1 = \frac{C_1 + \theta_1 |C_2|}{k_1}$ ,  $T(\delta) = \theta_1 + T_1$ . Demonstrăm că dacă  $|x_0| < \eta(h)$ , există  $t' \in [t_0, t_0 + T]$  astfel ca  $|x(t'; t_0, x_0)| < \eta$ . Dacă nu ar fi așa, am avea  $\eta \leq |x(t; t_0, x_0)| \leq h$  (căci am ales pe  $x_0$  cu  $|x_0| < \eta(h)$ ) deci  $c(t, |x(t; t_0, x_0)|) \geq C_2$  pentru  $t_0 \leq t \leq \theta_1$  și  $c(t, |x(t; t_0, x_0)|) \geq k_1$  pentru  $\theta_1 \leq t \leq t_0 + T$ . Notăm

$V^*(t) = V[t, x(t; t_0, x_0)]$ . Avem  $V^*(t_0 + T) - V^*(t_0) = V^*(t_0 + T) - V^*(\theta_1) + V^*(\theta_1) - V^*(t_0) \leq -k_1 T + \theta_1 |C_2|$ ,

deci  $V^*(t_0 + T) \leq V^*(t_0) - k_1 T_1 + \theta_1 |C_2| \leq b(h) - k_1 T_1 + \theta_1 |C_2| = C_1 - k_1 T_1 + \theta_1 |C_2| = 0$ , ceea ce contrazice faptul că

$$V^*(t_0 + T) \geq a(t_0 + T, |x(t_0 + T; t_0, x_0)|) > k_1 > 0.$$

Rezultă că există  $t' \in [t_0, t_0 + T]$  astfel ca  $|x(t'; t_0, x_0)| < \eta$ , deci  $|x(t; t', x(t'; t_0, x_0))| < \delta$  pentru  $t \geq t'$  deci în orice caz

$$|x(t; t_0, x_0)| < \delta \text{ dacă } |x_0| < \eta(h), t \geq t_0 + T(\delta).$$

Cu aceasta stabilitatea asimptotică uniformă a soluției banale a sistemului e dovedită.

**TEOREMA 1.8''.** *Dacă soluția banală a sistemului (1) este uniform asimptotic stabilă și dacă  $R(t, 0) \equiv 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t, x) = 0$  uniform în raport cu  $x$  pentru  $|x| \leq \alpha_0$ , iar  $R$  este lipschitziană, atunci soluția banală a sistemului (8) este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstrație.* Considerăm aceeași funcție  $V(t, x)$  ca în teorema 1.8. Prin ipoteză  $|R(t, x)| < \Phi(t)$ , unde  $\Phi(t) \rightarrow 0$  când  $t \rightarrow \infty$  și poate fi aleasă monoton descrescătoare. Aceleași calcule ca în teorema 1.8 conduc la

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h; t, y)] - V[t, y]}{h} \leq -c(|y|) + M\Phi(t).$$

Notăm  $c(t, r) = c(r) - M\Phi(t)$ . Fie  $0 < \alpha \leq \beta < h$ ,  $k(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} c(\alpha)$ .

Din  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0$  rezultă că există  $\theta(\alpha, \beta) \geq 0$  astfel ca pentru  $t \geq \theta$  să

avem  $\Phi(t) < \frac{1}{2M} c(\alpha)$ . Rezultă că dacă  $\alpha \leq r \leq \beta$ ,  $t \geq \theta(\alpha, \beta)$ , avem

$$c(t, r) \geq c(\alpha) - \frac{1}{2} c(\alpha) > k(\alpha, \beta).$$

Sînt verificate condițiile din lemă și teorema 1.8''' rezultă astfel demonstrată.

## § 9. SISTEME LINIARE CU COEFICIENȚI PERIODICI

Vom studia acum unele probleme de stabilitate pentru sistemele liniare. Începem cu sistemele liniare cu coeficienți periodici.

Fundamentală în teoria sistemelor liniare cu coeficienți periodici este următoarea teoremă:

**TEOREMA 1.9.** *Fîind dat sistemul*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad A(t + \omega) = A(t),$$

există o matrice  $P(t)$ , periodică de perioadă  $\omega$ , nesară, astfel încât schimbarea de variabile  $x = P(t)y$  să transforme sistemul într-un sistem liniar cu coeficienți constanți.

*Demonstrație.* Ca pentru orice sistem periodic, o dată cu  $x(t)$  este soluție și  $x(t + \omega)$ . De aici rezultă pentru sistemele liniare

$$\begin{aligned} x(t + \omega; s, x_0) &= x(t; t_0, x(t_0 + \omega; s, x_0)) = \\ &= C(t; t_0) x(t_0 + \omega; s, y_0) = C(t; t_0) C(t_0 + \omega; s) x_0. \end{aligned}$$

Dar

$$x(t + \omega; s, x_0) = C(t + \omega; s) x_0.$$

Rezultă  $C(t + \omega; s) = C(t; t_0) C(t_0 + \omega; s)$

Luând aici  $s = t_0 + \omega$ , obținem

$$C(t + \omega; t_0 + \omega) = C(t; t_0).$$

Luând  $t_0 = 0$ ,  $s = 0$ , obținem

$$C(t + \omega; 0) = C(t; 0) C(\omega; 0).$$

Notînd  $C(t; 0) = U(t)$  această relație devine

$$U(t + \omega) = U(t) U(\omega).$$

Matricea  $U(\omega)$  joacă un rol esențial în teoria sistemelor liniare cu coeficienți periodici; ea se numește matrice de *monodromie* a sistemului. Matricea  $U(\omega)$  este nesară, căci pentru orice  $t, t_0$  matricea  $C(t; t_0)$  este inversabilă. Rezultă că putem găsi o matrice  $B$  astfel ca  $U(\omega) = e^{B\omega}$ . Punem prin definiție

$$P(t) = U(t) e^{-Bt};$$

\*) Într-adevăr, pentru orice matrice nesară  $A$  putem găsi o matrice  $B$  astfel ca  $e^{B\omega} = A$ . Pentru a arăta aceasta să presupunem mai întâi că  $A$  are forma normală Jordan;  $A =$

$$= \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}, J_k = \lambda_k (E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k), \lambda_k \neq 0 \text{ căci } A \text{ este nesară, } Z_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, Z_k^q =$$

$= 0$ . Seria  $\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{Z_k^l}{\lambda_k^l}$  are un număr finit de termeni nenuli, deci converge. Punem, prin definiție,

$$\ln \left( E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k \right) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(Z_k / \lambda_k)^l}{l}.$$

$P(t)$  este derivabilă și nesingulară o dată cu  $U(t)$  și  $e^{-Bt}$ . Să arătăm că  $P(t)$  este periodică. Avem  $P(t + \omega) = U(t + \omega) e^{-B(t + \omega)} = U(t) U(\omega) e^{-B\omega} e^{-Bt} = U(t) e^{-Bt} = P(t)$ .

Prin calcul formal se arată că

$$e^{\ln \left( E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k \right)} = E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k;$$

pentru aceasta se observă că se fac aceleași calcule ca în identitatea

$$1 + x = e^{\ln(1+x)} = 1 + \left( x - \frac{x^2}{2} + \dots \right) + \frac{1}{2!} \left( x - \frac{x^2}{2} + \dots \right)^2 + \dots,$$

unde seria  $\left( x - \frac{x^2}{2} + \dots \right)$  are de data aceasta un număr finit de termeni nenuli. Fie acum

$$B_k = (\ln \lambda_k) E_k + \ln \left( E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k \right).$$

Avem

$$e^{B_k} = \lambda_k \left( E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k \right)$$

și dacă luăm

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{pmatrix}$$

vom avea

$$e^B = \begin{pmatrix} e^{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{B_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix} = A.$$

Dacă  $A$  este acum o matrice nesingulară oarecare, există  $T$  astfel ca  $T^{-1} A T = \tilde{A}$ , unde  $\tilde{A}$  este jordaniană; pe baza celor de mai sus există o matrice  $\tilde{B}$  astfel ca  $e^{\tilde{B}} = \tilde{A}$ . Atunci

$$\begin{aligned} T e^{\tilde{B}} T^{-1} &= T \left( E + \frac{1}{1!} \tilde{B} + \frac{1}{2!} \tilde{B}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \tilde{B}^n + \dots \right) T^{-1} = \\ &= E + \frac{1}{1!} (T \tilde{B} T^{-1}) + \frac{1}{2!} (T \tilde{B} T^{-1})^2 + \dots + \frac{1}{n!} (T \tilde{B} T^{-1})^n + \dots = e^{T \tilde{B} T^{-1}} = A, \end{aligned}$$

deci luând  $B = T \tilde{B} T^{-1}$  vom avea  $e^B = A$ .

\*) Am folosit relația

$$e^{-B(t+\omega)} = e^{-B\omega} \cdot e^{-Bt};$$

această relație rezultă imediat din înmulțirea seriilor corespunzătoare, ca în cazul scalar. Observăm că relația

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}$$

nu e în general valabilă; ea este însă valabilă dacă matricile  $A$  și  $B$  sînt permutabile, adică dacă

$$AB = BA.$$



Să facem acum schimbarea de variabile  $x = P(t)y$ . Avem  $x(t; x_0) = U(t)x_0 = P(t)e^{tB}x_0 = P(t)y(t; x_0)$ .

Rezultă că

$$y(t; x_0) = e^{tB}x_0$$

deci

$$\frac{dy(t, x_0)}{dt} = Be^{tB}x_0 = By(t; x_0),$$

deci  $y(t; x_0)$  este soluția sistemului liniar cu coeficienți constanți

$$\frac{dy}{dt} = By.$$

Teorema este demonstrată.

Să observăm că din această teoremă rezultă structura soluțiilor sistemelor cu coeficienți periodici. Avem într-adevăr

$$x(t; t_0, x_0) = P(t)y(t; t_0, x_0) = P(t)e^{B(t-t_0)}x_0.$$

De aici se deduce că întreaga comportare a soluțiilor unui sistem liniar cu coeficienți periodici va depinde de valorile proprii ale matricii  $B$ .

Dar aceste valori proprii sînt de forma  $\frac{1}{\omega} \ln \rho_k$ , unde  $\rho_k$  sînt valorile proprii ale matricii de monodromie  $U(\omega)^*$ . Putem astfel formula următoarea teoremă:

**TEOREMA 1.10.** *Dacă valorile proprii ale matricii de monodromie se găsesc în cercul  $|z| \leq 1$  iar valorile proprii situate pe  $|z| = 1$  corespund unor celule jordanene unidimensionale, atunci soluția banală a sistemului este uniform stabilă. Dacă valorile proprii ale matricii de monodromie se găsesc în  $|z| < 1$  soluția banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstrație.* Dacă  $|\rho_k| \leq 1$  rezultă  $\operatorname{Re} \frac{1}{\omega} \ln \rho_k \leq 0$ ; dacă  $|\rho_k| = 1$  rezultă  $\operatorname{Re} \frac{1}{\omega} \ln \rho_k = 0$ , deci valorile proprii ale matricii  $B$  au părți reale negative sau nule, iar cele cu părți reale nule corespund unor celule jordanene unidimensionale. Ținînd seama de structura soluțiilor siste-

\*) În general, dacă  $B$  este construită ca în nota de la pagina precedentă se vede că matricea  $\tilde{B}_k$  are valorile proprii egale cu  $\ln \lambda_k$ , deoarece  $\ln \left( E_k + \frac{1}{\lambda_k} Z_k \right)$  are toți termenii situați deasupra diagonalei principale. Deoarece

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{B}_s \end{pmatrix},$$

rezultă că valorile proprii ale lui  $\tilde{B}$  sînt  $\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_s$ . Cum  $B = T \tilde{B} T^{-1}$  rezultă că și valorile proprii ale lui  $B$  vor fi tot  $\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_s$ .

melor liniare cu coeficienți constanți rezultă  $|e^{B(t-t_0)}| < M$  pentru  $t \geq t_0$ . Dar atunci

$$|C(t; t_0)| \leq |P(t)| |e^{B(t-t_0)}|$$

rezultă uniform mărginită, căci  $P(t)$  fiind periodică și continuă este sigur mărginită. Dacă  $|\rho_k| < 1$ , rezultă că valorile proprii ale matricii  $B$  au părți reale negative, deci

$$|e^{B(t-t_0)}| < Ke^{-\alpha(t-t_0)},$$

de unde rezultă o evaluare analogă pentru  $|C(t; t_0)|$ .

Să observăm că dacă există o valoare proprie a matricii de monodromie situată în  $|z| > 1$ , atunci soluția banală a sistemului este sigur nestabilă.

Să dăm o demonstrație teoremei 1.10 care nu folosește teorema 1.9. Din relația

$$U(t + \omega) = U(t) U(\omega)$$

rezultă

$$U(t + k\omega) = U(t) [U(\omega)]^k.$$

Deoarece pentru un  $t \geq 0$  oarecare există  $m$  natural astfel încît  $(m-1)\omega \leq t < m\omega$ , rezultă

$$U(t) = U(t') [U(\omega)]^{m-1},$$

unde  $0 \leq t' < \omega$ . Cum  $U$  este continuă, rezultă

$$|U(t)| \leq M |U(\omega)|^{m-1},$$

deci proprietățile de mărginire ale matricii  $U(t)$  vor depinde de comportarea șirului  $[U(\omega)]^k$ . Dacă pentru orice  $k \geq 0$  acest șir este mărginit, atunci  $U(t)$  este mărginită pentru  $t \geq 0$  și are loc stabilitatea. Dacă

$$|(U(\omega))^k| < q^k \text{ cu } q < 1,$$

rezultă

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [U(\omega)]^k = 0$$

deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = 0$$

și are loc stabilitatea asimptotică. Dar, dacă  $T$  este matricea care aduce pe  $U(\omega)$  la forma normală Jordan, avem

$$T^{-1} U(\omega) T = \tilde{U}, U(\omega) = T \tilde{U} T^{-1}, [U(\omega)]^k = T \tilde{U}^k T^{-1}.$$

Rezultă că proprietățile de mărginire ale șirului  $[U(\omega)]^k$  sînt identice cu cele ale șirului  $\tilde{U}^k$ . Dar

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

deci

$$\tilde{U}^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_s^k \end{pmatrix}$$

deci proprietățile de mărginire ale șirului  $\tilde{U}^k$  vor depinde de cele ale șirurilor  $J_i^k$ . Dar  $J_i^k$  au pe diagonală principală numerele  $\rho_i^k$  iar deasupra diagonalei puteri mai mici ale lui  $\rho_i$ . Rezultă de aici că necesar pentru ca  $[U(\omega)]^k$  să fie mărginit este ca șirurile  $\{\rho_i^k\}$  să fie mărginite, deci ca pentru valorile proprii  $\rho_i$  să avem  $|\rho_i| \leq 1$ . Dacă  $|\rho_i| = 1$  și celula jordaniană corespunzătoare nu e unidimensională, în matricea  $J_i^k$  apar termeni de forma  $k \rho_i^{k-1}$  care atunci cînd  $k \rightarrow \infty$  devin oricît de mari, deci matricea  $J_i^k$  nu este mărginită. Rezultă că necesar și suficient pentru ca  $[U(\omega)]^k$  să formeze un șir mărginit este ca valorile proprii  $\rho_i$  să fie în  $|\rho_i| \leq 1$  iar cele pentru care  $|\rho_i| = 1$  să corespundă unor celule jordaniene unidimensionale. Dacă  $|\rho_i| < 1$ , atunci  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_i^k = 0$  și se vede că  $\lim_{k \rightarrow \infty} [U(\omega)]^k = 0$ . Teorema este astfel demonstrată.

Valorile proprii  $\rho_i$  ale matricii de monodromie se numesc *multiplcatorii sistemului*. Denumirea se justifică prin următoarea proprietate.

**PROPOZIȚIE.** *Necesar și suficient ca să existe o soluție a sistemului pentru care  $x(t + \omega) = \rho x(t)$  este ca  $\rho$  să fie o valoare proprie a matricii  $U(\omega)$ .*

*Demonstrație.* Orice soluție  $x(t)$  se poate scrie sub forma

$$x(t) = U(t) x(0).$$

Condiția

$$x(t + \omega) = \rho x(t)$$

se scrie deci

$$U(t + \omega) x(0) = \rho U(t) x(0).$$

Dar

$$U(t + \omega) = U(t) U(\omega)$$

deci

$$U(t) U(\omega) x(0) = \rho U(t) x(0).$$

Deoarece  $U(t)$  este nesingulară, condiția devine

$$U(\omega) x(0) = \rho x(0)$$

și se vede că  $\rho$  trebuie să fie o valoare proprie a matricii  $U(\omega)$ .

Cu ajutorul teoremei 1.10 se pot obține condiții efective de stabilitate pentru sistemele liniare cu coeficienții periodici. Iată cea mai simplă condiție de acest fel:

**TEOREMA 1.11.** *Fie  $C$  o matrice constantă ale cărei valori proprii au părți reale negative,  $A(t)$  o matrice periodică de perioadă  $\omega$ . Dacă  $\int_0^\omega |A(t) - C| dt$  este suficient de mică, soluția banală a sistemului*

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x$$

*este asimptotic stabilă.*

*Demonstrație.* Dacă  $x(t; x_0)$  este soluția sistemului care pentru  $t = 0$  coincide cu  $x_0$  putem scrie

$$\frac{d}{dt} x(t; x_0) = C x(t; x_0) + [A(t) - C] x(t; x_0),$$

deci pe baza formulei variației constantelor

$$x(t; x_0) = e^{Ct} x_0 + \int_0^t e^{C(t-s)} [A(s) - C] x(s; x_0) ds.$$

Această relație se mai poate scrie

$$U(t) x_0 = e^{Ct} x_0 + \int_0^t e^{C(t-s)} [A(s) - C] U(s) x_0 ds,$$

deci

$$U(t) = e^{Ct} + \int_0^t e^{C(t-s)} [A(s) - C] U(s) ds.$$

Conform ipotezelor avem

$$|e^{Ct}| \leq K e^{-\alpha t},$$

deci

$$|U(t)| \leq K e^{-\alpha t} + \int_0^t K e^{-\alpha(t-s)} |A(s) - C| |U(s)| ds.$$

Notînd

$$v(t) = e^{\alpha t} |U(t)|,$$

obținem

$$v(t) \leq K + K \int_0^t |A(s) - C| v(s) ds,$$

de unde

$$v(t) \leq K e^{K \int_0^t |A(s) - C| ds}.$$

În particular

$$v(n_0 \omega) \leq K e^{K \int_0^{n_0 \omega} |A(s) - C| ds},$$

deci

$$|U(n_0 \omega)| \leq K e^{-\alpha n_0 \omega + K \int_0^{n_0 \omega} |A(s) - C| ds}.$$

Dacă

$$\int_0^{n_0 \omega} |A(s) - C| ds < \frac{\alpha n_0 \omega}{K} + \frac{1}{K} \ln \frac{q}{K}, \quad q < 1,$$

rezultă

$$|U(n_0 \omega)| < q < 1.$$

Dar  $n_0\omega$  este tot o perioadă a sistemului și aplicînd teorema 1.10 rezultă stabilitatea asimptotică uniformă.

Avem însă, din cauza periodicității,

$$\int_0^{n_0\omega} |A(s) - C| ds = n_0 \int_0^\omega |A(s) - C| ds,$$

deci condiția de stabilitate devine

$$\int_0^\omega |A(s) - C| ds < \frac{\alpha\omega}{K} + \frac{1}{Kn_0} \ln \frac{q}{K}.$$

Cum  $n_0$  poate fi ales arbitrar de mare, rezultă că dacă

$$\int_0^\omega |A(s) - C| ds < \frac{\alpha\omega}{K}$$

condiția de stabilitate este asigurată.

Vom stabili acum o teoremă care face să intervină unele considerații mai profunde.

**TEOREMA 1.12.** *Dacă  $B(t)$  este o matrice periodică astfel încît matricea de monodromie a sistemului*

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x$$

*are valori proprii distincte situate pe cercul unitate, iar matricea periodică  $A(t)$  are proprietatea că ecuația caracteristică a matricii de monodromie a sistemului*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

*este reciprocă și în plus  $\int_0^\omega |A(t) - B(t)| dt$  este suficient de mică, atunci soluțiile sistemului*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

*sînt mărginite pe toată axa.*

*Demonstrație.* Fie  $V(t)$  matricea fundamentală de soluții a sistemului

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x,$$

iar  $U(t)$  cea a sistemului

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x; \quad V(0) = U(0) = E.$$

Avem

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t) U(t) = B(t) U(t) + [A(t) - B(t)] U(t).$$

Pe baza formulei variației constantelor rezultă

$$U(t) = V(t) + \int_0^t V(t) V^{-1}(s) [A(s) - B(s)] U(s) ds.$$

Matricea de monodromie  $V(\omega)$  are prin ipoteză valori proprii distincte situate pe cercul unitate, deci are forma normală diagonală, elementele de pe diagonală avînd modulul 1. Rezultă de aici că șirurile  $V^n(\omega)$  și  $V^{-n}(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sînt mărginite, deci pe baza relației

$$V(t + \omega) = V(t) V(\omega)$$

rezultă că  $V(t)$  și  $V^{-1}(t)$  sînt mărginite. Într-adevăr, pentru  $t$  arbitrar există  $m$  întreg astfel încît  $(m-1)\omega \leq t < m\omega$ , deci

$$t = t' + (m-1)\omega,$$

unde  $0 \leq t' < \omega$ ; rezultă

$$V(t) = V(t') V[(m-1)\omega] = V(t') V^{m-1}(\omega),$$

deci  $V(t)$  e mărginită pe toată axa.

La fel, deoarece  $V^{-1}(t)$  este matrice de soluții pentru sistemul adjunct, care este tot un sistem cu coeficienți periodici, rezultă

$$V^{-1}(t + \omega) = V^{-1}(t) V^{-1}(\omega),$$

deci pentru orice  $t$

$$V^{-1}(t) = V^{-1}(t') V^{-(m-1)}(\omega),$$

ceea ce arată că și  $V^{-1}(t)$  este mărginită pe toată axa. Avem

$$\begin{aligned} U(t) - V(t) &= \int_0^t V(t) V^{-1}(s) [A(s) - B(s)] [U(s) - V(s)] ds + \\ &+ \int_0^t V(t) V^{-1}(s) [A(s) - B(s)] V(s) ds. \end{aligned}$$

Rezultă pentru  $0 \leq t \leq \omega$  evaluarea

$$\begin{aligned} |U(t) - V(t)| &\leq M_1 \int_0^\omega |A(s) - B(s)| ds + \\ &+ M_2 \int_0^\omega |A(s) - B(s)| |U(s) - V(s)| ds. \end{aligned}$$

De aici deducem

$$|U(\omega) - V(\omega)| \leq M_1 \int_0^\omega |A(s) - B(s)| ds e^{M_2 \int_0^\omega |A(s) - B(s)| ds}$$

ceea ce arată că dacă  $\int_0^{\omega} |A(s) - B(s)| ds$  este destul de mică, atunci matricile  $U(\omega)$  și  $V(\omega)$  diferă oricât de puțin între ele.

Considerăm valorile proprii ale matricii  $V(\omega)$ ; conform ipotezei ele sînt distincte și situate pe cercul unitate. Înconjurăm aceste valori proprii cu cercuri destul de mici pentru ca în fiecare cerc să se afle o singură valoare proprie și cercurile să nu se intersecteze. Dacă  $\int_0^{\omega} |A(s) - B(s)| ds$  este destul de mică, matricile  $U(\omega)$  și  $V(\omega)$  sînt destul de apropiate pentru ca în fiecare asemenea cerc să se afle o valoare proprie și numai una a matricii  $U(\omega)$ . Prin ipoteză, matricea  $U(\omega)$  are ecuația caracteristică reciprocă, deci o dată cu  $\rho_k$  este valoare proprie și  $\frac{1}{\rho_k}$ ;

deoarece  $U(\omega)$  este reală, atunci este valoare proprie și  $\frac{1}{\bar{\rho}_k}$ . Valorile  $\rho_k$  și  $\frac{1}{\bar{\rho}_k}$  sînt simetrice față de cercul unitate și dacă  $\rho_k$  este într-un cerc

mic cu centrul pe cercul unitate, atunci  $\frac{1}{\bar{\rho}_k}$  este în același cerc. Dar în cercurile construite se află o singură valoare proprie a matricii  $U(\omega)$ , deci  $\rho_k$  și  $\frac{1}{\bar{\rho}_k}$  coincid.

Aceasta înseamnă însă că  $\rho_k \bar{\rho}_k = 1$ , deci  $|\rho_k| = 1$ , deci valorile proprii ale matricii  $U(\omega)$  se află pe cercul unitate. Din faptul că valorile proprii ale matricii  $V(\omega)$  sînt distincte, rezultă că și cele ale matricii  $U(\omega)$  sînt distincte și teorema este demonstrată.

Vom stabili acum unele fapte care ne vor permite să dăm teoremei demonstrate un caracter mai efectiv.

Foarte adesea în problemele de mecanică se întîlnesc sistemele canonice de forma

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

În cazul cînd  $H$  este o formă pătratică în variabilele  $p_i, q_i$  cu coeficienții funcții de  $t$ , sistemul rezultă liniar.

Notînd  $p_i = x_i, q_i = x_{n+i}, H = \frac{1}{2} \sum h_{ij}(t) x_i x_j$ , sistemul canonic liniar se scrie :

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_j h_{n+i, j}(t) x_j, \quad \frac{dx_{n+i}}{dt} = - \sum_j h_{ij}(t) x_j.$$

Notînd cu  $H$  matricea  $\{h_{ij}\}$  și cu  $I$  matricea  $\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ , unde  $E_n$  este matricea unitate de ordinul  $n$ , vom avea

$$IH = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -1 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots -1 & 0 \dots 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \dots \dots h_{1n} & h_{1,n+1} & h_{1,n+2} \dots h_{1,2n} \\ h_{21} \dots \dots h_{2n} & h_{2,n+1} & h_{2,n+2} \dots h_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{n+1,1} \dots h_{n+1,n} & h_{n+1,n+1} & \dots h_{n+1,2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{2n,1} \dots h_{2n,n} & h_{2n,n+1} & \dots h_{2n,2n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} h_{n+1,1} \dots h_{n+1,n} & h_{n+1,n+1} \dots h_{n+1,2n} \\ \dots & \dots \\ -h_{11} \dots -h_{1n} & -h_{1,n+1} \dots -h_{1,2n} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

și se vede că sistemul se poate scrie sub forma

$$\frac{dx}{dt} = IH(t)x.$$

**PROPOZIȚIE.** Dacă  $U(t)$  este matricea fundamentală de soluții cu  $U(0) = E$  avem

$$U^* I U = I.$$

*Demonstrație.* Avem

$$\frac{d}{dt} [U^* I U] = \frac{dU^*}{dt} I U + U^* I \frac{dU}{dt}.$$

Dar

$$\frac{dU}{dt} = IHU, \quad \frac{dU^*}{dt} = U^* H^* I^*,$$

deci

$$\frac{d}{dt} [U^* I U] = U^* H^* I^* I U + U^* I I H U.$$

Dar

$$I^* = -I, \quad H^* = H,$$

deci

$$\frac{d}{dt} [U^* I U] = -U^* H I I U + U^* I I H U.$$

Se verifică prin calcul direct că

$$I^2 = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix} = -E_{2n}.$$



Rezultă

$$\frac{d}{dt} [U^* I U] = U^* H U - U^* H U = 0,$$

deci  $U^* I U$  este o matrice constantă. Pentru  $t = 0$ , aceasta coincide cu  $I$ , deci pentru toți  $t$  avem

$$U^* I U = I.$$

Matricile cu proprietatea  $A^* I A = I$  se numesc *simplectice*.

Propoziția demonstrată afirmă deci că pentru un sistem canonic matricea  $U(t)$  este simplectică pentru orice  $t$ .

Dacă presupunem acum că  $H(t)$  este periodică de perioadă  $\omega$ , din propoziția demonstrată rezultă că *matricea de monodromie este simplectică*.

PROPOZIȚIE. *Ecuția caracteristică a unei matrici simplectice este reciprocă.*

*Demonstrație.* Din  $A^* I A = I$  rezultă  $I^{-1} A^* I = A^{-1}$ ; dar  $A$  și  $A^*$  au aceleași valori proprii,  $A^*$  și  $I^{-1} A^* I$  au aceleași valori proprii, deci  $A$  și  $I^{-1} A^* I$  au aceleași valori proprii, deci  $A$  și  $A^{-1}$  au aceleași valori proprii. Dar dacă  $\rho_k$  este o valoare proprie a matricii  $A$ , atunci  $\frac{1}{\rho_k}$  este valoare proprie a matricii  $A^{-1}$ , deci o dată cu valoarea proprie  $\rho_k$  matricea simplectică  $A$  admite și valoarea proprie  $\frac{1}{\rho_k}$ , deci ecuația ei caracteristică este reciprocă.

Din cele două propoziții de mai sus rezultă următoarea propoziție cunoscută sub numele de teorema lui Poincaré-Liapunov:

PROPOZIȚIE. *Ecuția caracteristică a matricii de monodromie a unui sistem canonic este reciprocă.*

Din această propoziție rezultă în particular faptul că pentru sistemele canonice cu coeficienți periodici nu poate avea loc stabilitatea asimptotică deoarece dacă sistemul admite un multiplicator în interiorul cercului unitate, el admite număidecît și un multiplicator în afara cercului unitate (simetric cu primul).

Pentru sistemele canonice, ca pentru toate sistemele pentru care ecuația caracteristică a matricii de monodromie este reciprocă, poate avea loc numai mărginirea soluțiilor pe toată axa, și anume în cazul cînd multiplicatorii se află pe cercul unitate și forma normală Jordan este diagonală.

Vom pune acum în evidență încă o clasă de sisteme pentru care ecuația caracteristică a matricii de monodromie este reciprocă.

PROPOZIȚIE. *Dacă*

$$GA(-t) + A(t)G = 0,$$

unde

$$G = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

ecuația caracteristică a matricii de monodromie a sistemului

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

este reciprocă.

*Demonstrație.* Pentru sistemele considerate are loc relația

$$U(-t) = GU(t)G^{-1}.$$

Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [GU(t) - U(-t)G] &= G \frac{dU(t)}{dt} - \frac{d}{dt} U(-t)G = \\ &= GA(t)U(t) + A(-t)U(-t)G = [GA(t) + A(-t)G]U(t) + \\ &\quad + A(-t)[U(-t)G - GU(t)]; \text{ dar } G = G^{-1}, \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} GA(t) + A(-t)G &= G^{-1}A(t) + A(-t)G^{-1} = \\ &= G^{-1}[A(t)G + GA(-t)]G^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\frac{d}{dt} [GU(t) - U(-t)G] = -A(-t)[GU(t) - U(-t)G].$$

De aici se vede că matricea  $GU(t) - U(-t)G$  verifică o ecuație diferențială liniară și deoarece pentru  $t = 0$  această matrice este nulă, ea rezultă identic nulă. Dar dacă

$$GU(t) = U(-t)G$$

rezultă

$$U(-t) = GU(t)G^{-1}.$$

Pentru  $t = \omega$  se capătă

$$U(-\omega) = GU(\omega)G^{-1}.$$

Dar

$$U(-\omega) = [U(\omega)]^{-1}.$$

Rezultă că  $[U(\omega)]^{-1}$  coincide cu  $GU(\omega)G^{-1}$ , deci are aceleași valori proprii ca  $U(\omega)$ , ceea ce arată că ecuația caracteristică a matricii  $U(\omega)$  este reciprocă.

Pe baza ultimelor două propoziții vom obține imediat exemple efective de sisteme pentru care ecuația caracteristică a matricii de monodromie este reciprocă și pentru care teorema 1.12 capătă un caracter foarte efectiv.

**PROPOZIȚIE.** Considerăm sistemul de ordinul al doilea

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [C + P(t)]y = 0,$$

unde  $C$  și  $P$  sînt matrici de ordinul  $n$ . Dacă matricile  $C$  și  $P$  sînt reale și simetrice sau dacă  $C$  este reală oarecare și  $P(-t) = P(t)$ , atunci ecuația caracteristică a matricii de monodromie este reciprocă.

*Demonstrație.* Dacă  $C$  și  $P$  sînt reale și simetrice, sistemul echivalent

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = -[C + P(t)]y$$

este canonic.

Într-adevăr, matricea sistemului este de forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -C - P & 0 \end{pmatrix}$$

și se vede că este egală cu  $IH$ , unde  $H = \begin{pmatrix} C + P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ , deci  $H$  e simetrică o dată cu  $C$  și  $P$ .

Dacă  $C$  e reală oarecare și  $P(-t) = P(t)$  avem

$$A(-t) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -C - P(-t) & 0 \end{pmatrix} = A(t), \quad GA(t) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ C + P & 0 \end{pmatrix},$$

$$A(t)G = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -C - P & 0 \end{pmatrix}$$

deci

$$A(t)G + GA(t) = 0,$$

adică

$$GA(-t) + A(t)G = 0$$

și propoziția e demonstrată.

Putem acum formula:

TEOREMA 1.12'. *Considerăm sistemul*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [C + \lambda P(t)]y = 0,$$

unde

1)  $C$  este simetrică și pozitiv definită, iar  $P(t)$  e simetrică sau  $C$  este reală oarecare, cu valori proprii distincte și pozitive, iar  $P(-t) = P(t)$ ;  $P(t)$  este periodică în  $t$  de perioadă  $\omega$ ;

2) dacă  $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$  sînt valorile proprii ale lui  $C$  și  $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$ , atunci

$\omega_j \pm \omega_h = m\bar{\omega}$ .

Atunci, pentru  $|\lambda|$  suficient de mic, soluțiile sistemului sînt mărginite pe toată axa.

*Demonstrație.* Ipoteza 1) asigură că ecuația caracteristică a sistemului este reciprocă; pentru  $\lambda = 0$  se capătă sistemul

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = -Cy.$$

Fie  $B = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -C & 0 \end{pmatrix}$ ; matricea de monodromie corespunzătoare este  $e^{B\omega}$ . Valorile proprii ale matricii  $e^{B\omega}$  sînt de forma  $e^{\lambda_k \omega}$ , unde  $\lambda_k$  sînt valorile proprii ale matricii  $B$ . Aceste valori proprii sînt date de ecuația

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda E_n & E_n \\ -C & -\lambda E_n \end{pmatrix} = 0.$$

Dar

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda E_n & E_n \\ -C & -\lambda E_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -C - \lambda^2 E_n & -\lambda E_n \end{pmatrix} = \det (-C - \lambda^2 E_n).$$

Rezultă că  $-\lambda^2$  sînt valorile proprii ale matricii  $C$ , deci  $-\lambda^2 = \omega_j^2$ . Deducem de aici că valorile proprii ale matricii  $B$  sînt de forma  $\pm i\omega_j$ , deci valorile proprii ale matricii  $e^{B\omega}$  sînt de forma  $e^{\pm i\omega_j \omega}$ . Dacă  $\omega_j \pm \omega_h \neq m\omega$ , rezultă  $\omega_j \pm \omega_h \neq \frac{2m\pi}{\omega}$ , deci  $i\omega_j, \omega_j \pm i\omega_h, \omega_j \neq 2m\pi i$ , deci valorile proprii  $e^{\pm i\omega_j \omega}$  sînt distincte. Sîntem astfel în condițiile teoremei 1.12 și deducem că soluțiile sistemului sînt mărginite pe toată axa pentru  $|\lambda|$  suficient de mic.

## § 10. CONDIȚIA LUI PERRON

DEFINIȚIE. Vom spune că sistemul

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

satisface condiția lui Perron dacă pentru orice funcție continuă  $f(t)$ , mărginită pe semiaxa  $t \geq 0$ , soluția sistemului

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

cu  $x(0) = 0$  este mărginită pe semiaxa  $t \geq 0$ .

TEOREMA 1.13. Dacă  $|A(t)| \leq A_0$  și sistemul satisface condiției lui Perron, atunci soluția banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă.

Înainte de a trece la demonstrația teoremei vom stabili o serie de fapte preliminare.

LEMA 1. Există  $\delta_0 > 0$  astfel încît oricare ar fi  $t, t_0 \geq 0$  și  $|s - t_0| \leq \delta_0$  să avem

$$|X(t, s) - X(t, t_0)| \leq \frac{1}{2} |X(t, t_0)|.$$

Demonstrație. Din

$$X(t, x) = X(t, t_0) X(t_0, s)$$

rezultă

$$|X(t, s) - X(t, t_0)| \leq |X(t, t_0)| |X(t_0, s) - E|.$$

Dar

$$X(t_0, s) = Y(s, t_0)$$

și

$$\frac{dY(s, t_0)}{ds} = -Y(s, t_0)A(s),$$

deci

$$Y(s, t_0) = E - \int_{t_0}^s Y(\sigma, t_0) A(\sigma) d\sigma = E - \\ - \int_{t_0}^s [Y(\sigma, t_0) - E] A(\sigma) d\sigma + \int_{t_0}^s A(\sigma) d\sigma,$$

de unde

$$|Y(s, t_0) - E| \leq \int_{t_0}^s |A(\sigma)| d\sigma + \int_{t_0}^s |Y(\sigma, t_0) - E| |A(\sigma)| d\sigma$$

deci

$$|Y(s, t_0) - E| \leq A_0 \delta_0 e^{A_0 \delta_0}, \quad A_0 = \sup |A(t)|.$$

Dacă  $\delta_0$  e suficient de mic, rezultă

$$A_0 \delta_0 e^{A_0 \delta_0} \leq \frac{1}{2}$$

și lema e demonstrată.

CONSECINȚĂ. Există  $\delta_0 > 0$  astfel ca

$$\frac{1}{2} |X(t, t_0)| \leq |X(t, s)| \leq \frac{3}{2} |X(t, t_0)| \text{ dacă } |s - t_0| \leq \delta_0.$$

LEMA 2. Dacă  $\int_0^t |X(t, \alpha)| d\alpha < C$  pentru  $t \geq 0$ , există  $M$  astfel ca

$$|X(t, \alpha)| < M \text{ pentru } 0 \leq \alpha \leq t.$$

*Demonstrație.* Dacă afirmația nu ar fi adevărată, există  $\alpha_n$  și  $t_n$  astfel ca  $0 \leq \alpha_n \leq t_n$  și  $|X(t_n, \alpha_n)| \geq n$ . Șirul  $\{t_n\}$  este nemărginit. Într-adevăr, dacă  $t_n < T_0$  am avea  $|X(t_n, \alpha_n)| \leq e^{A_0 T_0}$ , ceea ce contrazice felul cum au fost definite  $\alpha_n$  și  $t_n$ . Dacă  $\{\alpha_n\}$  este nemărginit, avem

$$C > \int_0^{t_n} |X(t_n, \alpha)| d\alpha > \int_{\alpha_n}^{\alpha_n + \delta_0} |X(t_n, \alpha)| d\alpha > \frac{1}{2} \delta_0 |X(t_n, \alpha_n)| > \frac{1}{2} \delta_0 n$$

ceea ce este contradictoriu. Dacă  $\alpha_n$  nu este mărginit, avem

$$C > \int_0^{t_n} |X(t_n, \alpha)| d\alpha > \int_{\alpha_n - \delta_0}^{\alpha_n} |X(t_n, \alpha)| d\alpha > \frac{1}{2} \delta_0 |X(t_n, \alpha_n)|$$

ceea ce este din nou contradictoriu. Lema e demonstrată.

LEMA 3. Dacă sistemul satisface condiția lui Perron, atunci există  $C$  astfel ca

$$\int_0^t |X(t, \alpha)| d\alpha < C \text{ pentru orice } t \geq 0.$$

*Demonstrație.* Soluția cu condiția  $x(0) = 0$  a sistemului neomogen este dată de formula

$$x(t) = \int_0^t X(t, \alpha) f(\alpha) d\alpha.$$

Din condiția lui Perron rezultă că pentru orice funcție continuă și mărginită  $f$  definită pe  $t \geq 0$ , funcția  $\int_0^t X(t, \alpha) f(\alpha) d\alpha$  este mărginită. Pentru  $t$  fixat, considerăm operatorul  $U(f)$  care aplică spațiul Banach al funcțiilor vectoriale continue  $f$ , mărginite pe semiaxa  $t \geq 0$ , în spațiul vectorilor numerici, definit de

$$U(f) = \int_0^t X(t, \alpha) f(\alpha) d\alpha.$$

Fie  $\{t_k\}$  șirul numerelor raționale pozitive,

$$U_k(f) = \int_0^{t_k} X(t_k, \alpha) f(\alpha) d\alpha.$$

Deoarece pentru  $\|f\| < c_1$  funcția  $\int_0^t X(t, \alpha) f(\alpha) d\alpha$  este mărginită, rezultă

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \|U_k(f)\| < \infty.$$

Deoarece sfera  $\|f\| < c_1$  este în spațiul Banach considerat o mulțime de-a doua categorie, putem aplica lema lui Banach-Steinhaus și deducem că există  $M$  cu  $\|U_k(f)\| \leq M\|f\|$  pentru orice  $f$  din spațiu, deci

$$\left| \int_0^{t_k} X(t_k, \alpha) f(\alpha) d\alpha \right| \leq M\|f\|.$$

Pentru  $t$  real oarecare există un șir  $\{t_{n_k}\}$  de numere raționale a cărui limită este  $t$ . Din

$$\left| \int_0^{t_{n_k}} X(t_{n_k}, \alpha) f(\alpha) d\alpha \right| \leq M\|f\|$$

rezultă

$$\left| \int_0^t X(t, \alpha) f(\alpha) d\alpha \right| \leq M\|f\|$$

pentru orice  $f$  din spațiu. Fie  $x_{ik}$  elementele matricii  $X(t, \alpha)$ ; pentru  $t$  fixat considerăm vectorul  $f^k$  ale cărui componente  $f_i^k$  sînt egale cu  $\text{sign } x_{ik}$ . Vectorul  $Xf^k$  va avea componentele

$$\sum_k x_{ik} \text{sign } x_{ik} = \sum_k |x_{ik}|.$$

Fie  $f^{k,n}$  un șir de vectori, cu elementele funcții continue tinzînd către  $f^k$ . Pe baza teoremei lui Lebesgue de trecere la limită sub semnul de integrare, rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t X(t, \alpha) f^{k,n}(\alpha) d\alpha = \int_0^t X(t, \alpha) f^k(\alpha) d\alpha$$

și din

$$\left| \int_0^t X(t, \alpha) f^{k,n}(\alpha) d\alpha \right| \leq M \|f^{k,n}\|$$

rezultă pentru  $n \rightarrow \infty$

$$\left| \int_0^t X(t, \alpha) f^k(\alpha) d\alpha \right| \leq M_1$$

deci

$$\int_0^t \sum_k |x_{ik}(t, \alpha)| d\alpha \leq M_1.$$

Deoarece această relație este adevărată pentru orice  $i$  rezultă că există  $C$  astfel ca

$$\int_0^t |X(t, \alpha)| d\alpha < C$$

și lema e demonstrată.

*Demonstrația teoremei 1.13.* Din lemele 2 și 3 rezultă stabilitatea uniformă. Mai departe din  $|X(\alpha, t_0)| < M$  rezultă pe baza condiției lui Perron

$$\left| \int_0^t X(t, \alpha) X(\alpha, t_0) d\alpha \right| < C_1$$

deci

$$t |X(t, t_0)| < C_1, |X(t, t_0)| < \frac{C_1}{t}$$

ceea ce arată că are loc stabilitatea asimptotică.

Ținînd seama de lema 3 avem

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t X(t, \alpha) X(\alpha, t_0) d\alpha \right| &\leq \int_0^t |X(t, \alpha)| |X(\alpha, t_0)| d\alpha \leq \\ &\leq M \int_0^t |X(t, \alpha)| d\alpha < MC = C_1 \end{aligned}$$

deci  $C_1$  este independent de  $t_0$ . De aici rezultă că stabilitatea asimptotică e uniformă și teorema e demonstrată.

O generalizare a teoremei 1.13 datorită lui M. Reghiș se obține în felul următor. Fie  $L_a^p$  spațiul funcțiilor vectoriale definite pe semiaxa  $t \geq 0$  măsurabile și astfel ca  $\int_0^\infty |h(s)|^p e^{pas} ds < \infty$ ,  $L_a^\infty$  spațiul funcțiilor pentru care  $\sup_{s \geq 0} |h(s)| e^{as} < \infty$ . Luând în aceste spații normele

$$\|h\|_{(p,a)} = \left( \int_0^\infty |h(s)|^p e^{pas} ds \right)^{\frac{1}{p}}, p \in [1, \infty)$$

respectiv

$$\|h\|_{(\infty,a)} = \sup_{s \geq 0} |h(s)| e^{as},$$

$L_a^p$  și  $L_b^\infty$  devin spații Banach, căci operatorul linear  $\Omega_a^b: L_a^p \rightarrow L_b^p$  definit de  $\Omega_a^b h = e^{(a-b)s} h(s)$  este un izomorfism izometric între  $L_a^p$  și  $L_b^p$ , iar  $L$  este spațiu Banach.

LEMA 4. Dacă

$$Vu = \int_0^t X(t, s) u(s) ds$$

este un operator din  $L_a^p$  în  $L_b^\infty$ , atunci

$$\|Vu\|_{(\infty,b)} \leq M \|u\|_{(p,a)}.$$

*Demonstrație.* Dacă  $\{t_k\}$  e șirul numerelor raționale pozitive și

$$V_k u = e^{bt_k} \int_0^{t_k} X(t_k, s) u(s) ds,$$

avem, prin ipoteză, pentru  $u \in L_a^p$ ,  $\sup_{k \geq 1} \|V_k(u)\| < \infty$ , deci conform lemei Banach-Steinhaus  $\|V_k\| \leq M$ , deci

$$\|V_k u\| \leq M \|u\|_{(p,a)},$$

sau

$$e^{bt_k} \int_0^{t_k} X(t_k, s) u(s) ds \leq M \|u\|_{(p,a)},$$

de unde

$$e^{bt} \left| \int_0^t X(t, s) u(s) ds \right| < M \|u\|_{(p,a)}$$

și lema e demonstrată.

TEOREMA 1.13'. Dacă există  $p \in [1, +\infty)$  astfel ca pentru orice  $f \in L_a^p$  soluția cu  $x(0) = 0$  a sistemului

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f$$



să aparțină lui  $L_b^p$ ,  $a, b > 0$ , atunci există  $h > 0$  astfel ca

$$|X(t, t_0)| \leq h e^{at_0} e^{-bt},$$

pentru  $t \geq t_0 \geq 0$ .

*Demonstrație.* Fie  $\delta_0$  constanta din lema 1. Definim funcțiile

$$u_m(s) = \begin{cases} \delta_0^{-\frac{1}{p}} \frac{X(s, m\delta_0) x_0}{e^{as} |X(s, m\delta_0)|}, & s \in [m\delta_0, (m+1)\delta_0], |x_0| = 1, \\ 0 & s \notin [m\delta_0, (m+1)\delta_0], s \geq 0. \end{cases}$$

Avem  $u_m \in L_a^p$  și  $\|u_m\|_{(p,a)} \leq 1$ . Conform lemei 4,

$$\begin{aligned} M e^{-bt} &\geq \left| \int_0^t X(t, s) u_m(s) ds \right| = \delta_0^{-\frac{1}{p}} \left| \int_{m\delta_0}^{(m+1)\delta_0} X(t, s) \frac{X(s, m\delta_0) x_0}{e^{as} |X(s, m\delta_0)|} ds \right| \leq \\ &\leq \delta_0^{-\frac{1}{p}} |X(t, m\delta_0)| \int_{m\delta_0}^{(m+1)\delta_0} \frac{ds}{e^{as} |X(s, m\delta_0)|} \geq \\ &\geq \delta_0^{-\frac{1}{p}} \frac{2}{3} |X(t, m\delta_0)| \delta_0 e^{-a\delta_0} e^{-am\delta_0} \end{aligned}$$

căci  $|X(s, m\delta_0)| \leq \frac{3}{2}$  pentru  $m\delta_0 \leq s \leq (m+1)\delta_0$ .

Rezultă

$$|X(t, m\delta_0)| \leq \delta_0^{\frac{1}{p}} \frac{3}{2} M \delta_0^{-1} \cdot e^{a\delta_0} e^{am\delta_0} e^{-bt}.$$

Fie  $s \in [0, t]$  și  $m$  astfel ca  $m\delta_0 \leq s < (m+1)\delta_0$ . Rezultă

$$\begin{aligned} |X(t, s)| &\leq |X(t, m\delta_0)| |X(m\delta_0, s)| \leq \frac{3}{2} |X(t, m\delta_0)| \leq \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 M e^{a\delta_0} \delta_0^{\frac{1}{q}} e^{as} e^{-bt} = h e^{as} e^{-bt} \end{aligned}$$

și teorema e demonstrată.

Vom demonstra acum o teoremă datorită tot lui M. Reghiș relativă la existența unei funcții Liapunov pentru sistemele liniare cu proprietatea din teorema 1.13'.

**TEOREMA 1.6'''. Dacă  $|X(t, t_0)| \leq h e^{at_0} e^{-bt}$ , atunci oricare ar fi  $\delta < b$  există  $V(x, t)$  continuă, cu proprietățile**

$$1^\circ V(0, t) \equiv 0, t \geq 0, 2^\circ |V(x_1, t) - V(x_2, t)| \leq L_D(t) |x_1 - x_2|,$$

pentru  $x_i \in D$ ,  $3^\circ l e^{\delta t} |x| \leq V(x, t) \leq k(\delta) e^{(a-b+\delta)t} |x|$ ,

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[x(t+h; t, x), t+h] - V[x, t]}{h} = -e^{\delta t} |x|.$$

*Demonstrație.* Se definește

$$V(x, t) = \int_t^\infty e^{\delta\tau} \|x(\tau; t, x)\| d\tau.$$

Convergența uniformă a integralei e asigurată pentru  $0 \leq t \leq T$ ,  $|x| \leq K$  datorită ipotezei  $\delta < b$ .

$$\begin{aligned} |V(x_1, t) - V(x_2, t)| &\leq \int_t^\infty e^{\delta\tau} \left| |x(\tau; t, x_1)| - |x(\tau; t, x_2)| \right| d\tau \leq \\ &\leq \int_t^\infty e^{\delta\tau} |x(\tau; t, x_1) - x(\tau; t, x_2)| d\tau \leq \int_t^\infty e^{\delta\tau} |X(\tau, t)| d\tau |x_1 - x_2| \leq \\ &\leq L(t) |x_1 - x_2| \text{ unde } L(t) = \int_t^\infty e^{\delta\tau} |X(\tau, t)| d\tau \leq h \int_t^\infty e^{\delta\tau} e^{-b\tau} e^{at} d\tau = \\ &= \frac{h}{b-\delta} e^{(a-b+\delta)t} \end{aligned}$$

Mai departe

$$V(x, t) \leq \int_t^\infty e^{\delta\tau} |X(\tau, t)| d\tau |x| = L(t) |x| = k(\delta) e^{(a-b+\delta)t}$$

$$V(x, t) \geq e^{\delta t} \int_t^\infty |x(\tau; t, x)| d\tau \geq e^{\delta t} \int_t^{t+\alpha} |x(\tau; t, x)| d\tau \geq \frac{1}{2} \alpha e^{\delta t} |x|$$

(cu aceleași raționamente ca în teorema 1.6''). Se vede imediat că

$$V[x(t; t_0, x_0), t] = \int_t^\infty e^{\delta\tau} |x(\tau; t, x(t; t_0, x_0))| d\tau = \int_t^\infty e^{\delta\tau} |x(\tau; t_0, x_0)| d\tau$$

deci

$$\frac{d}{dt} V[x(t; t_0, x_0), t] = e^{-\delta t} |x(t; t_0, x_0)|.$$

Pentru  $t = t_0$  se capătă condiția din enunț.

Să încheiem aceste considerații cu o teoremă de stabilitate după prima aproximație.

**TEOREMA 1.7'''.** Dacă  $|X(t, t_0)| \leq h e^{at_0} e^{-bt}$ , oricare ar fi funcția  $\Phi(x, t)$  cu  $|\Phi(x, t)| \leq f(t) |x|^m$ ,  $\|x\| \leq D$ ,  $f \in L_0^p$ ,  $\|f\|_{(p,0)} \leq K$ , soluția  $x(t; t_0, x_0)$  a ecuației

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \Phi(x, t),$$

cu  $|x_0|$  suficient de mic verifică inegalitatea

$$|x(\cdot; t_0, x_0)| \leq H(h, m) e^{at_0} e^{-bt} |x_0|, \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Valoarea inițială  $x_0$  trebuie să verifice relațiile :

$$(\alpha) \quad \text{dacă} \quad a > b, m > \frac{a}{b}, p \in [1, +\infty]$$

$$|x_0| \leq [2(m-1)h^m e^{m(a-b)t_0} \|f\|_{(p,0)} \|e^{(a-mb)s}\|_{(q,0)}]^{-\frac{1}{m-1}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

$$(\beta) \quad \text{dacă} \quad a > b, m = \frac{a}{b}, p = 1$$

$$|x_0| \leq [2(m-1)h^m e^{m(a-b)t_0} \|f\|_{(1,0)}]^{-\frac{1}{m-1}};$$

$$(\gamma) \quad \text{dacă} \quad a \leq b, m > 1, p \in [1, +\infty]$$

$$|x_0| \leq [2(m-1)h^m \|f\|_{(p,0)} \|e^{(a-mb)\sigma}\|_{(q,0)}]^{-\frac{1}{m-1}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

$$(\delta) \quad \text{dacă} \quad a \leq b, m = 1, p \in [1, +\infty], \|x_0\| \leq D.$$

*Demonstrație.* Avem

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq |X(t, t_0)| |x_0| + \int_{t_0}^t |X(t, \tau)| \Phi[x(\tau), \tau] d\tau, t \geq t_0 \geq 0.$$

Punînd  $t = t_0 + s, \tau = t_0 + \sigma, |x(t_0 + s; t_0, x_0)| = \varphi(s), \varphi(0) = |x_0|$  rezultă

$$\varphi(s) \leq h e^{at_0} e^{-bt_0} e^{-bs} \varphi(0) + \int_0^s h e^{a(t_0+\sigma)} e^{-b(t_0+\sigma)} f(t_0 + \sigma) \varphi^m(\sigma) d\sigma,$$

sau

$$\varphi(s) \leq K e^{-bs} \varphi(0) + K e^{-bs} \int_0^s e^{a\sigma} f(t_0 + \sigma) \varphi^m(\sigma) d\sigma,$$

unde

$$K = \begin{cases} h e^{(a-b)t_0}, & a > b \\ h, & a \leq b \end{cases}$$

Dacă  $\psi(s)$  este definită de ecuația

$$\psi(s) = K e^{-bs} \varphi(0) + K e^{-bs} \int_0^s e^{a\sigma} f(t_0 + \sigma) \psi^m(s) ds, s \geq 0,$$

atunci

$$\varphi(s) \leq \psi(s) \text{ și } \frac{d\psi}{ds} + b\psi = Q(s) \psi^m, Q(s) = K e^{(a-b)s} f(t_0 + s).$$

În cazurile  $(\alpha), (\beta), (\gamma)$  aceasta este o ecuație de tip Bernouli și obținem

$$\psi(s) = [\psi(0)]^{1-m} e^{(m-1)bs} - (m-1)K e^{(m-1)bs} \int_0^s e^{(a-mb)\sigma} f(t_0 + \sigma) d\sigma]^{-\frac{1}{m-1}}, s \geq 0.$$

Dar  $\psi(0) = K \varphi(0)$  și  $\varphi(s) \leq \psi(s)$ , deci

$$\varphi(s) \leq K e^{-bs} \varphi(0) \left\{ 1 - (m-1) K^m [\varphi(0)]^{m-1} \int_0^s e^{(a-mb)\sigma} f(t_0 + \sigma) d\sigma \right\}^{-\frac{1}{m-1}}.$$

În cazul  $(\alpha)$ ,

$$K = h e^{(a-b)t_0}, \int_0^s f(t_0 + \sigma) e^{(a-mb)\sigma} d\sigma \leq \|f\|_{(p,0)} \|e^{(a-mb)\sigma}\|_{(q,0)}$$

și rezultă ținând seama de evaluarea pentru  $|x_0|$

$$\varphi(s) \leq 2^{\frac{1}{m-1}} h e^{(a-b)t_0} e^{-bs} \varphi(0),$$

deci

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq H e^{at_0} e^{-bt} |x_0|, H = 2^{\frac{1}{m-1}} h.$$

Celelalte cazuri se tratează la fel.

#### COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Expuneri generale asupra teoriei stabilității după Liapunov se află în [8], [9], [10]. Noțiunea de stabilitate uniformă a fost introdusă de K. P. Persidski în [11]. În legătură cu stabilitatea în raport cu o parte a variabilelor, ideile fundamentale pot fi găsite în [12]. Proprietatea 3) relativă la stabilitatea asimptotică a fost dată în [13]. Prima teoremă generală cu privire la existența funcției Liapunov în cazul stabilității asimptotice uniforme, precum și definiția stabilității asimptotice uniforme au fost date în [14]. Teorema 1.5' aparține lui N.N. Krasovski. În prima ei formă, pentru sistemele autonome, teorema a fost stabilită într-o lucrare comună a lui E. A. Barbașin și N. N. Krasovski. Această teoremă, ca și celelalte contribuții importante ale lui N. N. Krasovski în teoria stabilității, se găsesc în [15]. Rezultatele lui C. Corduneanu sînt publicate în [16]. Teorema de existență a funcției Liapunov pentru sistemele liniare a fost dată în [17]. Elementele de algebră liniară și teorema de aducere a matricilor la forma normală Jordan sînt reproduse după [18]. Demonstrația algebrică a teoremei de existență a funcției Liapunov pentru sistemele liniare cu coeficienți constanți a fost dată în [19]. Demonstrația teoremei de stabilitate după prima aproximație fără folosirea funcției Liapunov, cu ajutorul formulei variației constantilor, a fost dată de R. Bellman. Pentru ideile și metodele lui R. Bellman este caracteristică monografia [20]. Cealaltă schemă de demonstrare a teoremei de stabilitate după prima aproximație a fost dată în [21].

Teorema de stabilitate după prima aproximație, în cazul cînd prima aproximație este omogenă de grad  $m$ , se găsește cu demonstrația lui I. G. Malkin în [9], cu cea a lui J. L. Massera în [10], cu cea a lui N. N. Krasovski în [15]. Demonstrația din text e nouă și se bazează pe o idee

a lui D. Wexler. Propozițiile 1), 3), 4) de la sfârșitul § 7 sînt date în [22], [23].

Teorema 1.8 a fost dată de I. G. Malkin în [14]. Noțiunile de zonă periculoasă și nepericuloasă ale frontierei domeniului de stabilitate au fost introduse în [24]. Lucrarea lui T. Hacker a apărut în [25]. Teoremele asupra stabilității în raport cu perturbații permanente mărginite în medie au fost date în [26], iar noțiunea de stabilitate integrală și teoremele corespunzătoare în [27]. Noțiunea echivalentă de stabilitate tare definită de Okamura a fost reluată în [28].

Lema care precede teorema 1.8''' și această ultimă teoremă, au fost stabilite în forma din text de către D. Wexler. Teorema 1.8''' a fost publicată anterior într-o notă a lui I. G. Malkin.

Teorema de reductibilitate a sistemelor liniare cu coeficienți periodici a fost stabilită de A. M. Liapunov în [8]. Sub forma din text ea a fost demonstrată în [29] (vezi și [3]). Proprietățile fundamentale ale sistemelor liniare canonice cu coeficienți periodici au fost stabilite în [30], [31]. Rezultatele din text sînt reproduse după [32]. Condiția lui Perron a fost formulată în [33]. Demonstrația bazată pe teorema lui Banach-Steinhaus a fost dată de R. Bellman în [34]. Rezultatele lui M. Reghiș se găsesc în [35].

## CAPITOLUL II

### STUDIUL STABILITĂȚII ABSOLUTE LA SISTEMLILE NELINIARE DE REGLARE AUTOMATĂ

Un sistem de reglare automată constă din obiectul reglării și regulator. Regulatorul are sarcina să mențină în obiectul reglării o anumită mișcare, deci procesul reglării constă în faptul că regulatorul se opune oricărui abateri de la această mișcare.

Mișcarea sistemului de reglare considerat ca un întreg este descrisă de un anumit sistem de ecuații diferențiale ordinare  $\frac{dx}{dt} = X(t, x)$ .

De fapt se poate întâmpla să apară și ecuații cu derivate parțiale, ecuații integro-diferențiale, sau ecuații cu argument întârziat; aceasta depinde de natura elementelor cu ajutorul cărora se realizează sistemul. În cele ce urmează se vor considera numai sisteme a căror mișcare este descrisă de ecuații diferențiale ordinare. Fie  $x = x_0(t)$  mișcarea pe care dorim să o menținem. Abaterile sistemului de la această mișcare pot fi provocate fie de perturbații instantanee, care, așa cum am mai văzut, se traduc prin modificări ale condițiilor inițiale, fie de apariția unor perturbații permanente. Practic, menținerea mișcării dorite revine la faptul că mișcarea reală a sistemului se menține în apropierea mișcării dorite. Se vede deci că problema revine la asigurarea stabilității mișcării  $x = x_0(t)$  în raport cu orice abateri ale condițiilor inițiale și cu perturbații permanente. Asemenea stabilitate este asigurată, după cum am văzut, dacă soluția  $x = x_0(t)$  este uniform asimptotic stabilă în mare. Prin urmare găsirea condițiilor de stabilitate pentru sistemele de reglare automată revine la găsirea unor condiții de stabilitate asimptotică în mare. Ecuațiile sistemelor de reglare uzuale vor avea forme particulare speciale și condițiile de stabilitate vor trebui să fie pe de o parte efective, pe de altă parte suficient de largi pentru a lăsa o anumită libertate proiectantului în luarea în considerare și a altor calități care se cer sistemului.

Vom presupune că obiectul reglării este determinat de  $m$  coordonate generalizate  $\eta_1, \dots, \eta_m$ , iar regulatorul de o singură coordonată  $\mu$ . Mișcarea

obiectului reglării va fi descrisă de ecuațiile  $\frac{d\eta_k}{dt} = f_k(\eta_1, \dots, \eta_m, \mu, t)$

iar a regulatorului de o ecuație  $\frac{d^2\mu}{dt^2} = F(\eta_1, \dots, \eta_m, \mu, t)$ . Ca întotdeauna în problemele de stabilitate, se formează ecuațiile mișcării perturbate, reducînd problema la studiul stabilității soluției banale.

Pentru sistemele de reglare uzuale de care ne vom ocupa, se consideră că ecuațiile mișcării perturbate nu depind explicit de  $t$ , și se mai fac în plus unele ipoteze simplificatoare care conduc la faptul că unele ecuații rezultă liniare. Toate aceste ipoteze corespund unor scheme tehnice efective și sînt justificate pentru clase largi de sisteme.

Ecuațiile mișcării perturbate pentru obiectul reglării se presupun liniare cu coeficienți constanți:  $\dot{\eta}_k = \sum b_{kj} \eta_j + n_k \mu$ . Pentru  $\mu = 0$  se capătă mișcarea liberă a obiectului reglării, fără intervenția regulatorului. Ecuația organului regulator se presupune de forma

$$V^2 \ddot{\mu} + W \dot{\mu} + S \mu = f^*(\sigma),$$

unde  $\sigma = \sum p_i \eta_i - r \mu$  iar  $f^*(\sigma)$  este o funcție neliniară despre care se presupune în general numai că  $f^*(0) = 0$ ,  $\sigma f^*(\sigma) > 0$  pentru  $\sigma \neq 0$ ; uneori se consideră funcții mai generale cu  $f^*(\sigma) = 0$  pentru  $|\sigma| \leq \sigma_0$ ,  $\sigma f^*(\sigma) > 0$  pentru  $|\sigma| > \sigma_0$ .

Se presupune că  $a, b, p_j, r$  sînt constante. După cum se vede, în aceste ecuații singura neliniaritate este introdusă de funcția  $f^*(\sigma)$ . Acest tip de sisteme a fost în mod deosebit studiat în ultimii 15–16 ani după apariția în 1944 a unei lucrări a lui A.I. Lurie și V. N. Postnikov. În ultima vreme, din ce în ce mai mult se pune problema lărgirii clasei de sisteme considerate, atît prin introducerea mai multor organe de reglare, ceea ce revine la introducerea mai multor funcții  $f_j(\sigma_j)$ , cît și prin luarea în considerare a neliniarităților reale în ecuațiile obiectului reglării, ale regulatorilor sau în expresia mărimilor  $\sigma$ , care caracterizează interacțiunile dintre regulator și obiectul reglării. În toate aceste direcții există pînă acum rezultate puține și cu caracter de început.

Ecuațiile de mișcare se aduc la anumite forme normale prin schimbări de variabile simple. Se pune  $\xi = p \dot{\mu} + q \mu$  și ecuația regulatorului se scrie sub forma

$$\frac{V^2}{p} \ddot{\xi} - \frac{q V^2}{p^2} \dot{\xi} + \frac{V^2 q^2}{p^2} \mu + \frac{W}{p} \xi - \frac{W q}{p} \mu + S \mu = f^*(\sigma);$$

se alege coeficienții  $p$  și  $q$  astfel încît  $V^2 \left(\frac{q}{p}\right)^2 + W \left(\frac{q}{p}\right) + S = 0$ . Notînd

cu  $\rho_{m+1}$  și  $\rho_{m+2}$  valorile lui  $\frac{q}{p}$  care se obțin ca rădăcini ale acestei ecuații se obțin pentru regulator două ecuații de ordinul întâi de forma:

$$\dot{\mu} = -\rho_{m+1} \mu + \frac{1}{p} \xi, \quad \dot{\xi} = \rho_{m+1} \xi - a \xi + p f^*(\sigma).$$

Notînd  $\mu = \eta_{m+1}$  se obține, după schimbări corespunzătoare de notații, un sistem de forma

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_\alpha + h_k \xi, \quad \dot{\xi} = -\rho_{n+1} \xi + f(\sigma), \quad \sigma = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \eta_\alpha. \quad (1)$$

În cazul particular cînd  $S = 0$ , ecuațiile (1) capătă forma

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_\alpha + h_k \xi, \quad \dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = \sum p_\alpha \eta_\alpha;$$

în cazul cînd  $V^2 = 0$ , după transformări simple se obține

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^m b_{k\alpha} \eta_\alpha + n_k \mu, \quad \dot{\mu} = -\rho_{m+1} \mu + f(\sigma), \quad \sigma = \sum p_\alpha \eta_\alpha + p_{m+1} \mu;$$

în cazul cînd  $S = V^2 = 0$ , ecuațiile (1) capătă forma

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^m b_{k\alpha} \eta_\alpha + n_k \mu, \quad \dot{\mu} = f(\sigma), \quad \sigma = \sum p_\alpha \eta_\alpha + p_{m+1} \mu.$$

Aceste ecuații au fost studiate pentru prima dată de A. I. Lurie. În cele ce urmează vom arăta cum se studiază stabilitatea pentru asemenea sisteme.

### § 1. FORMA CANONICĂ ȘI FUNCȚIA LIAPUNOV CORESPUNZĂTOARE

Pentru sistemele de reglare automată se formulează următoarea problemă de stabilitate. *Se cere să se formuleze condiții relative la coeficienții care intervin în sistem astfel încît soluția banală a sistemului (1) să fie asimptotic stabilă în mare, oricare ar fi funcția  $f$  din clasa considerată ( $\sigma f(\sigma) > 0$  pentru  $\sigma \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ ).*

*Dacă soluția banală a sistemului este asimptotic stabilă în mare pentru orice funcție  $f$  din clasa considerată, spunem că sistemul este absolut stabil.*

Metoda dată de A. I. Lurie în studiul stabilității absolute se bazează pe aducerea sistemului la anumite forme canonice și pe construirea convenabilă a unei funcții Liapunov.

Se face schimbarea de variabile  $x_s = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha^{(s)} \eta_\alpha + \xi$ ; avem

$$\dot{x}_s = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha^{(s)} \dot{\eta}_\alpha + \dot{\xi} = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha^{(s)} \left[ \sum_{\beta=1}^n b_{\alpha\beta} \eta_\beta + h_\alpha \xi \right] - \rho_{n+1} \xi + f(\sigma).$$

Dacă vrem ca ecuațiile să capete forma  $\dot{x}_s = -\rho_s x_s + f(\sigma)$  trebuie

să avem  $\dot{x}_s = -\rho_s \sum_{\beta=1}^n c_\beta^{(s)} \eta_\beta - \rho_s \xi + f(\sigma)$ , deci coeficienții  $c_\alpha^{(s)}$  trebuie



aleși astfel încît

$$-\rho_s c_\beta^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha\beta} c_\alpha^{(s)}, \quad \rho_{n+1} - \rho_s = \sum_{\alpha=1}^n h_\alpha c_\alpha^{(s)}.$$

Primele ecuații arată că  $-\rho_s$  sînt valori proprii ale matricii  $(b_{\alpha\beta})$ . Dacă presupunem că matricea  $(b_{\alpha\beta})$  are formă normală diagonală, se poate alege matricea  $(c_\alpha^{(s)})$  nesingulară avînd drept linii un sistem liniar independent de vectori proprii. Ultimele ecuații servesc la determinarea completă a matricii  $c_\alpha^{(s)}$ , deoarece vectorii proprii sînt determinați pînă la un factor constant. În acest fel sistemul poate fi adus la forma

$$\dot{x}_k = -\rho_k x_k + f(\sigma), \quad k = 1, 2, \dots, n+1, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k x_k.$$

S-a notat  $\xi = x_{n+1}$ .

Pentru a vedea mai bine sensul transformării și a înțelege ce se petrece în cazul cînd matricea  $(b_{\alpha\beta})$  nu are formă normală diagonală, să reluăm calculele notînd :

$$(c_\alpha^{(s)}) = C, \quad (b_{\alpha\beta}) = B,$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \eta, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = u, \quad \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = h.$$

Sistemul (1) se scrie

$$\dot{\eta} = B \eta + h \xi, \quad \dot{\xi} = -\rho_{n+1} \xi + f(\sigma), \quad \sigma = (p, \eta),$$

unde

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Schimbarea de variabile are forma  $x = C \eta + \xi u$ . Avem

$$\dot{x} = C \dot{\eta} + \dot{\xi} u = C (B \eta + h \xi) + \dot{\xi} u = C B \eta + (C h - \rho_{n+1} u) \xi + f(\sigma) u.$$

Dar

$$\eta = C^{-1}(x - \xi u) = C^{-1}x - \xi C^{-1}u,$$

deci

$$\dot{x} = C B C^{-1} x - [(C B C^{-1} + \rho_{n+1} E) u - C h] \xi + f(\sigma) u.$$

Forma canonică se obține cerînd ca  $C B C^{-1}$  să aibă forma normală Jordan și în plus

$$(C B C^{-1} + \rho_{n+1} E) u - C h = 0.$$

Fie  $C_0$  astfel încît  $C_0 B C_0^{-1}$  are formă normală Jordan, și fie  $T$  o matrice de forma

$$\begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_s \end{pmatrix},$$

unde  $T_k$  au aceleași dimensiuni ca celulele din forma normală a matricii  $B$  și sînt de forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{l_k} \\ 0 & a_1 & \dots & a_{l_k-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{l_k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix};$$

rezultă, notînd  $C = TC_0$ , relația

$$CBC^{-1} = TC_0 BC_0^{-1} T^{-1} = TJT^{-1} = J,$$

unde  $J$  este forma normală Jordan a matricii  $B$ , (deoarece se verifică prin calcul direct că  $T_k$  e permutabilă cu celula jordaniană  $J_k$  corespunzătoare). Alegînd pe  $C$  de forma  $TC_0$ , ultima ecuație se scrie

$$(J + \rho_{n+1} E) = TC_0 h$$

și reprezintă un sistem de  $n$  ecuații pentru cele  $n$  necunoscute pe care le introduce matricea  $T$ . În general acest sistem admite soluții nenule și astfel se ajunge la forma canonică dorită.

Alături de sistemele de forma

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha} b_{k\alpha} \eta_{\alpha} + h_k \xi, \quad \dot{\xi} = -\rho_{n+1} \xi + f(\sigma),$$

într-o serie de probleme apare necesitatea considerării unor sisteme de forma generală

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha} b_{k\alpha} \eta_{\alpha} + h_k f(\sigma), \quad \sigma = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \eta_{\alpha}.$$

Această formă generală conține pe cea precedentă ca un caz particular, cum se observă imediat dacă notăm cu  $\xi$  una oarecare dintre coordonatele  $\eta_{\alpha}$ . Cu notațiile matriciale de mai sus sistemul se scrie  $\dot{\eta} = B\eta + hf(\sigma)$ . Facem schimbarea de variabile  $x = C\eta$  și obținem  $\dot{x} = C\dot{\eta} = CB\eta + Chf(\sigma)$  deci  $\dot{x} = CBC^{-1}x + Chf(\sigma)$ . Alegem pe  $C$  astfel încît  $CBC^{-1}$  să aibă forma normală Jordan și în plus  $Ch = u$ .

Formele canonice astfel obținute sînt convenabile în cazul cînd matricea  $B$  are valori proprii cu părți reale negative, așa cum se va vedea cînd vom construi funcția Liapunov corespunzătoare; acestea sînt sistemele așa-numite propriu stabile. În celelalte cazuri se folosesc alte forme canonice, asupra cărora nu ne vom mai opri.

Vom considera deci un sistem de forma

$$\dot{x}_k = -\rho_k x_k + f(\sigma), \quad k = 1, \dots, n+1, \quad \sigma = \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k x_k. \quad (2)$$

Derivînd ultima relație din (2) se capătă

$$\dot{\sigma} = \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k \dot{x}_k = \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k (-\rho_k x_k + f(\sigma)) = \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k x_k - r f(\sigma).$$

Vom presupune că  $\rho_1, \dots, \rho_s$  sînt reale și pozitive, iar  $\rho_{s+1}, \dots, \rho_{n+1}$  vor fi presupuse două cîte două complex conjugate și cu părți reale pozitive.

Constantele  $\gamma_1, \dots, \gamma_s, \beta_1, \dots, \beta_s$  vor fi reale, iar  $\gamma_{s+1}, \dots, \gamma_{n+1}, \beta_{s+1}, \dots, \beta_{n+1}$  vor fi două cîte două complex conjugate. Vom considera soluții ale sistemului astfel încît  $x_1, \dots, x_s$  sînt reale, iar  $x_{s+1}, \dots, x_{n+1}$  două cîte două complex conjugate. Toate aceste considerente revin la ipoteza că necunoscutele și coeficienții în sistemul inițial erau reale, iar elementele complexe se introduc ca rezultat al schimbării de variabilă care a adus sistemul la forma canonică. Pentru a clarifica aceste chestiuni vom face cîteva considerații generale. *Vom spune că un vector are proprietatea P dacă primele lui s componente sînt reale, iar celelalte, în ordine, sînt două cîte două complex conjugate. Vom spune că o matrice pătratică nesarădă are proprietatea P dacă are primele s linii reale și următoarele, în ordine, două cîte două complex conjugate.*

**PROPOZIȚIA 1.** *Dacă o matrice are proprietatea P, matricea formată din liniile reale și din părțile reale și cele imaginare ale liniilor complexe este nesarădă.*

*Demonstrație.* Fie  $D$  determinantul matricii date, iar  $\Delta$  determinantul matricii formate cu liniile reale și cu părțile reale și cele imaginare ale liniilor complexe. Avem

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ b_{s+1,1} + i c_{s+1,1} & \dots & b_{s+1,n} + i c_{s+1,n} \\ b_{s+1,1} - i c_{s+1,1} & \dots & b_{s+1,n} - i c_{s+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ b_{s+1,1} + i c_{s+1,1} & \dots & b_{s+1,n} + i c_{s+1,n} \\ 2 b_{s+1,1} & \dots & 2 b_{s+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\ &= 2^{\frac{1}{2}(n-s)} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ b_{s+1,1} + i c_{s+1,1} & \dots & b_{s+1,n} + i c_{s+1,n} \\ b_{s+1,1} & \dots & b_{s+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= (2i)^{\frac{1}{2}(n-s)} \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{s1} & . & . & . & . & a_{sn} \\ c_{s+1,1} & . & . & . & c_{s+1,n} \\ b_{s+1,1} & . & . & . & b_{s+1,n} \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} = (2i)^{\frac{1}{2}(n-s)} \Delta$$

și se vede că  $\Delta \neq 0$  dată cu  $D$ .

Vom spune că o funcție vectorială  $Y(y)$  are proprietatea  $P$  dacă atunci când vectorul  $y$  are proprietatea  $P$ , vectorul  $Y(y)$  are proprietatea  $P$ .

PROPOZIȚIA 2. Fie  $A$  o matrice cu proprietatea  $P$ , iar  $x$  un vector real. Atunci vectorul  $y = Ax$  are proprietatea  $P$ . Reciproc, dacă  $A$  este nesingulară și  $y$  are proprietatea  $P$ , atunci  $x$  este real.

*Demonstrație.* Prima afirmație se vede imediat, deoarece primele  $s$  elemente ale lui  $y$  rezultă din compunerea liniilor reale ale lui  $A$  cu elementele reale ale lui  $x$ , iar ultimele prin compunerea liniilor complex conjugate ale lui  $A$  cu elementele reale ale lui  $x$ . Pentru a demonstra a doua afirmație fie

$$A = \begin{pmatrix} R \\ U + iV \\ U - iV \end{pmatrix}, \quad x = u + iv.$$

Avem

$$Ax = \begin{pmatrix} Ru + iRv \\ Uu - Vv + i(Uv + Vu) \\ Uu + Vv + i(Uv - Vu) \end{pmatrix}.$$

Condiția ca  $Ax$  să aibă proprietatea  $P$  conduce la  $Rv = 0$ ,  $Vv = 0$ ,  $Uv = 0$ .

Dar dacă  $\det A \neq 0$ , rezultă, pe baza propoziției 1,  $\det \begin{pmatrix} R \\ U \\ V \end{pmatrix} \neq 0$  deci  $v = 0$ , deci  $x$  este real.

PROPOZIȚIA 3. Fie  $\frac{dx}{dt} = X(x)$  un sistem real. Prin schimbarea de variabile  $y = Ax$ , unde  $A$  este o matrice nesingulară cu proprietatea  $P$ , se obține sistemul  $\frac{dy}{dt} = Y(y)$ , unde  $Y(y)$ , are proprietatea  $P$ .

*Demonstrație.* Avem

$$\frac{dy}{dt} = A \frac{dx}{dt} = AX(x) = AX(A^{-1}y) = Y(y).$$

Dacă  $y$  are proprietatea  $P$ , pe baza propoziției 2  $A^{-1}y$  este real, deci  $X(A^{-1}y)$  este real, deci  $AX(A^{-1}y)$  are proprietatea  $P$ .

Întorcîndu-ne la sistemele de ecuații diferențiale studiate, să observăm că liniile matricii  $C$  cu care s-a făcut schimbarea de variabile pentru aducerea la forma canonică erau vectori proprii ai matricii  $B$ ; valorilor proprii reale le corespund vectori proprii reali, deci linii reale, valorilor proprii complex conjugate le corespund vectori proprii complex conjugate, deci linii două câte două complex conjugate. Rezultă că matricea  $C$  a transformării avea proprietatea  $P$ , deci sistemul obținut este ca în propoziția 3. Dacă la sistemul inițial interesau, cum este firesc, numai soluțiile reale, la sistemul transformat vor interesa numai soluțiile cu proprietatea  $P$ .

PROPOZIȚIA 4. Considerăm sistemul  $\frac{dy}{dt} = Y(y)$ , unde  $Y(y)$  are proprietatea  $P$ . Dacă  $y_0$  are proprietatea  $P$ , atunci  $y(t; y_0)$  are proprietatea  $P$  pentru orice  $t$ .

*Demonstrație.* Pornind de la  $y_0$ , construim șirul de aproximații succesive :

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \int_0^t Y(y_k(t)) dt.$$

Dacă  $y_k(t)$  are proprietatea  $P$ , atunci  $Y(y_k(t))$  are proprietatea  $P$  și se vede că  $y_{k+1}(t)$  are proprietatea  $P$ .

Soluția  $y(t; y)$  este dată de  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t)$  și se vede că ea va avea proprietatea  $P$ .

Ținînd seama de aceasta, vom putea aplica metoda funcției lui Liapunov cerînd ca funcția  $V$  să aibă proprietatea corespunzătoare numai pentru vectori cu proprietatea  $P$ ; atunci ea va avea proprietățile cerute de-a lungul tuturor soluțiilor din familia  $M$  a soluțiilor cu proprietatea  $P$ , deci vom obține concluzii de stabilitate în raport cu soluțiile din această mulțime, singurele care corespund soluțiilor reale ale sistemului inițial.

Considerăm forma pătratică  $F = \sum_{i,j} \frac{a_j a_i}{\rho_j + \rho_i} x_j x_i$ , unde  $a_1, \dots, a_s$  sînt reale, iar celelalte, două câte două complex conjugate.

Avem

$$\frac{1}{\rho_j + \rho_i} = \int_0^\infty e^{-(\rho_j + \rho_i)t} dt,$$

deci

$$F = \sum_{i,j} a_j a_i \int_0^\infty e^{-(\rho_j + \rho_i)t} dt x_j x_i = \int_0^\infty \left[ \sum_k a_k x_k e^{-\rho_k t} \right]^2 dt.$$

Dacă  $x$  este un vector cu proprietatea  $P$ , atunci pentru  $k = 1, \dots, s$ ,  $a_k x_k e^{-\rho_k t}$  este real, iar pentru celelalte valori ale lui  $k$ ,  $a_k x_k e^{-\rho_k t}$  sînt două câte două complex conjugate, deci suma lor este reală; rezultă că  $\sum a_k x_k e^{-\rho_k t}$  este reală pentru orice vector  $x$  cu proprietatea  $P$ , deci  $F$  este reală și pozitivă pentru orice vector  $x$  cu proprietatea  $P$ .

Pe de altă parte,  $\sum_k a_k x_k e^{-\rho_k t} = 0$  pentru orice  $t$ , dacă și numai dacă  $x_k = 0$  pentru orice  $k$ . Rezultă că  $F$  este o formă pătratică pozitiv definită pentru orice vector cu proprietatea  $P$ .

Fie acum

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s A_i x_i^2 + C_1 x_{s+1} x_{s+2} + \dots + C_{n-s} x_n x_{n+1}, \text{ unde } A_i, C_j \text{ sînt}$$

reale și pozitive. Pentru orice vector  $x$  cu proprietatea  $P$ , forma  $\Phi$  ia valori reale și pozitive;  $\Phi = 0$  dacă și numai dacă  $x = 0$ .

În cele ce urmează vom presupune îndeplinită condiția

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma = \infty$$

și vom alege funcția

$$V = \Phi + F + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma.$$

Se vede imediat că această funcție ia valori reale și pozitive pentru orice  $x$  cu proprietatea  $P$  și că  $V = 0$  dacă și numai dacă  $x = 0$ ,  $\sigma = 0$ . Să calculăm derivata lui  $V$  în virtutea sistemului. Avem

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \sum_{k=1}^s A_k x_k [-\rho_k x_k + f(\sigma)] + C_1 x_{s+2} [-\rho_{s+1} x_{s+1} + f(\sigma)] + \\ & + C_1 x_{s+1} [-\rho_{s+2} x_{s+2} + f(\sigma)] + \dots + \sum_{i,k} \frac{a_i a_k}{\rho_i + \rho_k} \{x_k (-\rho_i x_i + f(\sigma)) + \\ & + x_i (-\rho_k x_k + f(\sigma))\} + f(\sigma) \left[ \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k x_k - r f(\sigma) \right]. \end{aligned}$$

Dar

$$\sum_{i,k} a_i a_k x_i x_k = (\sum a_i x_i)^2, \quad \sum_{i,k} \frac{a_k a_i}{\rho_k + \rho_i} (x_k + x_i) = 2 \sum_{i,k} \frac{a_k a_i}{\rho_k + \rho_i} x_k$$

deci

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & - \sum_{k=1}^s \rho_k A_k x_k^2 - C_1 (\rho_{s+1} + \rho_{s+2}) x_{s+1} x_{s+2} - \\ & - \dots - C_{n-s} (\rho_n + \rho_{n+1}) x_n x_{n+1} - \\ & - \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k \right)^2 - [\sqrt{r} f(\sigma)]^2 - 2 \sqrt{r} f(\sigma) \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k + \\ & + f(\sigma) \sum_{k=1}^s \left[ A_k + \beta_k + 2 \sqrt{r} a_k + 2 a_k \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_k + \rho_i} \right] x_k + \\ & + f(\sigma) \sum_{\alpha=1}^{n+1-s} \left[ C_\alpha + \beta_{s+\alpha} + 2 \sqrt{r} a_{s+\alpha} + 2 a_{s+\alpha} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_{s+\alpha} + \rho_i} \right] x_{s+\alpha}. \end{aligned}$$

Pentru uniformitatea scrierii am introdus notația

$$C_1 = C_2, \quad C_3 = C_4 \dots C_{n-s} = C_{n-s+1}.$$

$\frac{dV}{dt}$  rezultă negativ definită dacă avem

$$A_k + \beta_k + 2 \sqrt{r} a_k + 2 a_k \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0, \quad (k = 1, \dots, s)$$

$$C_\alpha + \beta_{s+\alpha} + 2 \sqrt{r} a_{s+\alpha} + 2 a_{s+\alpha} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, n-s+1).$$

Dacă aceste condiții sînt îndeplinite,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & - \sum_{k=1}^s \rho_k A_k x_k^2 - \\ & - C_1 (\rho_{s+1} + \rho_{s+2}) x_{s+1} x_{s+2} - \dots - C_{n-s} (\rho_n + \rho_{n+1}) x_n x_{n+1} - \\ & - \left[ \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k + \sqrt{r} f(\sigma) \right]^2 \end{aligned}$$

și se vede că dacă  $x$  are proprietatea  $P$ , atunci  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ .

Dacă luăm  $A_k = 0$ ,  $C_k = 0$  și nu mai introducem termenul  $-2\sqrt{r}f(\sigma)\Sigma a_k x_k$ , obținem drept condiție de stabilitate existența unui vector cu proprietatea  $P$  care să verifice ecuațiile

$$\beta_k + 2 a_k \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n+1).$$

Aceste condiții sînt mai simple, dar mai restrictive.

Putem obține ușor condiții necesare ca ecuațiile de mai sus să admită soluții. Prin adunarea ecuațiilor se capătă

$$\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k + 2 \sum_k \sum_i \frac{a_k a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0,$$

deci

$$\Sigma \beta_k + 2 \int_0^\infty (\Sigma a_k e^{-\rho_k t})^2 dt = 0,$$

deci

$$\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k < 0.$$

Înmulțind fiecare ecuație cu  $\rho_k$  și adunînd se capătă,

$$\begin{aligned} \sum \beta_k \rho_k + 2 \sum_{i,k} \frac{\rho_k a_i a_k}{\rho_k + \rho_i} &= \sum_{i,k} \beta_k \rho_k + \sum_{i,k} \frac{\rho_k a_i a_k}{\rho_k + \rho_i} + \sum_{i,k} \frac{\rho_i a_i a_k}{\rho_k + \rho_i} = \\ &= \sum \beta_k \rho_k + \sum_{i,k} a_i a_k = \sum \beta_k \rho_k + (\sum a_k)^2 = 0, \end{aligned}$$

deci

$$\sum_k \rho_k \beta_k < 0.$$

Împărțind fiecare ecuație cu  $\rho_k$  și adunînd se capătă

$$\begin{aligned} \sum \frac{\beta_k}{\rho_k} + 2 \sum_k \frac{a_k}{\rho_k} \sum_i \frac{a_i}{\rho_k + \rho_i} &= \sum \frac{\beta_k}{\rho_k} + 2 \sum_{i,k} \frac{a_k}{\rho_k} \frac{a_i}{\rho_i} \frac{\rho_i}{\rho_k + \rho_i} = \sum \frac{\beta_k}{\rho_k} + \\ &+ \sum_{i,k} \frac{a_k a_i}{\rho_k \rho_i} = \sum \frac{\beta_k}{\rho_k} + \left( \sum_k \frac{a_k}{\rho_k} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

deci

$$\sum_k \frac{\beta_k}{\rho_k} < 0.$$

Să observăm că în calculele precedente noi am studiat de fapt stabilitatea soluției banale a sistemului

$$\dot{x}_k = -\rho_k x_k + f(\sigma), \quad \dot{\sigma} = \sum \beta_k x_k - r f(\sigma).$$

Stabilitatea soluției banale a acestui sistem atrage evident după sine stabilitatea soluției banale a sistemului

$$\dot{x}_k = -\rho_k x_k + f(\sigma), \quad \sigma = \sum \gamma_k x_k.$$

Într-adevăr, orice soluție a acestui sistem este soluție și pentru sistemul studiat. Dacă toate soluțiile sistemului studiat tind către zero, același lucru va fi valabil și pentru soluțiile celui de-al doilea sistem. Este însă clar că cererea de stabilitate pentru primul sistem este mai mult decît trebuie pentru stabilitatea celui de-al doilea. Pornind de la această observație se vede că are sens să căutăm asemenea alegere a funcției Liapunov care să permită să decidem direct asupra stabilității soluției banale pentru sistemul al doilea. Să alegem

$$V = \sum_{i,k} \frac{a_k a_i}{\rho_k + \rho_i} x_k x_i.$$

Obținem

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_{i,k} \frac{a_i a_k}{\rho_k + \rho_i} \{x_k [-\rho_i x_i + f(\sigma)] + x_i [-\rho_k x_k + f(\sigma)]\} = \\ &= - \sum_{i,k} a_i a_k x_i x_k + \left( \sum_{i,k} \frac{a_i a_k x_k}{\rho_k + \rho_i} + \sum_{i,k} \frac{a_i a_k x_i}{\rho_k + \rho_i} \right) f(\sigma) = \\ &= - \left( \sum_k a_k x_k \right)^2 + 2 f(\sigma) \sum_{i,k} \frac{a_i a_k}{\rho_i + \rho_k} x_k. \end{aligned}$$



Ținând seama că  $-f(\sigma) [\sigma - \sum \gamma_k x_k] \equiv 0$  putem scrie

$$\frac{dV}{dt} = - \left( \sum_k a_k x_k \right)^2 - \sigma f(\sigma) + f(\sigma) \sum_k \left[ \gamma_k + 2 a_k \sum_i \frac{a_i}{\rho_i + \rho_k} \right] x_k.$$

Presupunem că putem alege pe  $a_k$  astfel încît să fie verificate ecuațiile

$$\gamma_k + 2 a_k \sum_i \frac{a_i}{\rho_i + \rho_k} = 0.$$

Atunci

$$\frac{dV}{dt} = - \left( \sum_k a_k x_k \right)^2 - \sigma f(\sigma)$$

și soluția banală rezultă stabilă.

Să observăm că dacă alegem  $A_k = 0$ ,  $C_k = 0$  în studiul făcut mai sus,  $\frac{dV}{dt}$  se poate anula pe mulțimea  $\sum a_k x_k + \sqrt{r} f(\sigma) = 0$  iar în ultimul caz pe mulțimea  $\sum a_k x_k = 0$ ,  $\sigma = 0$ .

Pentru ca să obținem totuși stabilitatea asimptotică, este necesar să cerem în plus ca aceste mulțimi să nu conțină semitraectorii întregi (vezi teorema 1.5').

În unele cazuri, ținând seama de diferite particularități ale sistemului, se pot obține criterii simplificate.

Astfel, dacă  $\beta_1 < 0$  și  $\rho_1 > 0$  se alege funcția

$$V = \frac{1}{2} \beta_1 x_1^2 + \sum_{k,j=2}^{n+1} \frac{a_i a_j}{\rho_i + \rho_j} x_i x_j + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma.$$

Se obține

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -\beta_1 x_1 [-\rho_1 x_1 + f(\sigma)] + \sum_{i,j=2}^{n+1} \frac{a_i a_j}{\rho_i + \rho_j} \{x_i [-\rho_j x_j + f(\sigma)] + \\ & + x_j [-\rho_i x_i + f(\sigma)]\} + f(\sigma) [\beta_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n+1} \beta_j x_j - r f(\sigma)] = \beta_1 \rho_1 x_1^2 - \\ & - \left( \sum_{j=2}^{n+1} a_j x_j \right)^2 - [\sqrt{r} f(\sigma)]^2 - 2 \sqrt{r} f(\sigma) \sum_{j=2}^{n+1} a_j x_j + \\ & + f(\sigma) \sum_{j=2}^{n+1} \left( \beta_j + 2 a_j \sum_{i=2}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_i + \rho_j} + 2 \sqrt{r} a_j \right) x_j \end{aligned}$$

și deducem drept condiții de stabilitate cererea ca ecuațiile

$$\beta_j + 2 a_j \sum_{i=2}^{n+1} \frac{a_i}{\rho_i + \rho_j} + 2 \sqrt{r} a_j = 0$$

să aibă soluții. În acest fel numărul ecuațiilor s-a redus cu o unitate.

Să presupunem acum că  $\rho_k$  sînt reale și distincte. Alegem

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 + R \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma, \quad R > 0.$$

Rezultă

$$\frac{dV}{dt} = - \sum_{k=1}^{n+1} \rho_k x_k^2 - r R f^2(\sigma) + \sum_{k=1}^{n+1} (1 + R \beta_k) x_k f(\sigma).$$

Considerăm pe  $-\frac{dV}{dt}$  ca pe o formă pătratică în variabilele  $x_k$  și  $f(\sigma)$ .

Discriminantul ei este

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho_1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1+R\beta_1}{2} \\ 0 & \rho_2 & \dots & 0 & -\frac{1+R\beta_2}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_{n+1} & -\frac{1+R\beta_{n+1}}{2} \\ -\frac{1+R\beta_1}{2} & -\frac{1+R\beta_2}{2} & \dots & -\frac{1+R\beta_{n+1}}{2} & rR \end{vmatrix}.$$

Forma pătratică rezultă pozitiv definită dacă toți  $\rho_k$  sînt pozitivi și în plus  $\Delta > 0$ . Avem

$$\Delta = r R \prod_{k=1}^{n+1} \rho_k - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \rho_1 \dots \rho_{k-1} (1 + R \beta_k)^2 \rho_{k+1} \dots \rho_{n+1}.$$

Condiția  $\Delta > 0$  se scrie

$$4 r R > \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1 + R \beta_k)^2}{\rho_k}.$$

Dacă există o constantă pozitivă  $R$  care verifică această inegalitate, soluția banală a sistemului rezultă absolut stabilă.

Dacă  $\rho_1, \dots, \rho_s$  sînt reale și  $\rho_{s+1}, \dots, \rho_{n+1}$  complexe alegem

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s x_k^2 + \sum_{\alpha=1, \text{impar}}^{n-s} x_{s+\alpha} x_{s+\alpha+1} + R \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma$$

și obținem

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & - \sum_{k=1}^s \rho_k x_k^2 - \sum_{\alpha=1, \text{impar}}^{n-s} (\rho_{s+\alpha} + \rho_{s+\alpha+1}) x_{s+\alpha} x_{s+\alpha+1} + \\ & + \sum_{k=1}^{n+1} (1 + R \beta_k) x_k f(\sigma) - r R f^2(\sigma). \end{aligned}$$

Dacă

$$x_{s+\alpha} = u_{s+\alpha} + i v_{s+\alpha}, \quad \beta_{s+\alpha} = p_{s+\alpha} + i q_{s+\alpha}, \quad \rho_{s+\alpha} = \sigma_{s+\alpha} + i \tau_{s+\alpha}$$

rezultă

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & - \sum_{k=1}^s \rho_k x_k^2 - \sum \sigma_{s+\alpha} (u_{s+\alpha}^2 + v_{s+\alpha}^2) - r R f^2(\sigma) + \\ & + \sum_{k=1}^s (1 + R \beta_k) x_k f(\sigma) + 2 \sum [u_{s+\alpha} + R(p_{s+\alpha} u_{s+\alpha} - q_{s+\alpha} v_{s+\alpha})] f(\sigma). \end{aligned}$$

Am obținut din nou o formă pătratică și condiția de stabilitate se obține cerînd ca  $\operatorname{Re} \rho_j > 0$  și în plus un anumit determinant să fie pozitiv.

Un procedeu general de obținere a unor criterii simplificate a fost propus de I. G. Malkin în 1951. Se presupune că  $\rho_k$  sînt reale și distincte. Fie

$$W = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

o formă pătratică negativ definită și

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} B_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

$$\text{unde } B_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha\beta}}{\rho_\alpha + \rho_\beta}.$$

Avem

$$F' = \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} \int_0^\infty e^{-(\rho_\alpha + \rho_\beta)t} dt x_\alpha x_\beta = \int_0^\infty \left[ \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha e^{-\rho_\alpha t} x_\beta e^{-\rho_\beta t} \right] dt$$

și cum

$$\sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha e^{-\rho_\alpha t} x_\beta e^{-\rho_\beta t} \geq 0$$

rezultă că  $F$  este pozitiv definită. Se alege

$$V = F + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \frac{1}{2} \sum B_{\alpha\beta} \{x_\alpha (-\rho_\beta x_\beta + f(\sigma)) + x_\beta (-\rho_\alpha x_\alpha + f(\sigma))\} + \\ & + f(\sigma) [\sum \beta_k x_k - r f(\sigma)] = -\frac{1}{2} \sum B_{\alpha\beta} (\rho_\alpha + \rho_\beta) x_\alpha x_\beta + \\ & + f(\sigma) \left[ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (x_\alpha + x_\beta) B_{\alpha\beta} + \sum \beta_k x_k \right] - r f^2(\sigma) = \\ & = W - r f^2(\sigma) + f(\sigma) \sum_\alpha \left[ \beta_\alpha + \frac{1}{2} \sum_\beta (B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha}) \right] x_\alpha. \end{aligned}$$

Considerînd pe  $\frac{dV}{dt}$  ca o formă pătratică în  $x_1, \dots, x_{n+1}$  și  $f(\sigma)$ , se obține discriminantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} \dots & A_{1, n+1} & P_1 \\ A_{21} \dots & A_{2, n+1} & P_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n+1, 1} \dots & A_{n+1, n+1} & P_{n+1} \\ P_1 \dots & P_{n+1} & 1 \end{vmatrix}, \quad P_\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \beta_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\beta} (B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha}) \right\}.$$

Deoarece  $W$  este prin construcție negativ definită, condiția de stabilitate se reduce la  $\Delta > 0$ .

## § 2. STUDIUL ÎNTRINSEC AL SISTEMELOR DE REGLARE

În cele de mai sus s-a studiat problema stabilității absolute pentru sistemele de forma

$$\frac{dy}{dt} Ay + bf(\sigma), \quad \sigma = c^* y,$$

unde se presupunea că matricea  $A$  are valorile proprii cu părți reale negative. Derivînd relația care definește pe  $\sigma$  se obține sistemul

$$\frac{dy}{dt} = Ay + bf(\sigma),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = c^* Ay + c^* bf(\sigma).$$

Tot la sisteme de această formă se ajunge prin schimbări convenabile de variabile plecînd de la alte forme care intervin în teoria reglajului automat. Astfel, se consideră sisteme de forma

$$\frac{dy}{dt} = Ay + b \xi, \tag{3}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\sigma),$$

$$\sigma = c^* y - r \xi.$$

Dacă punem  $\dot{y} = x$ , obținem

$$\frac{dx}{dt} = A x + b f(\sigma),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = c^* x - r f(\sigma), \tag{4}$$

Dacă matricea  $\begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}$  este nesingulară, cele două sisteme sînt echivalente din punctul de vedere al stabilității absolute.

În ultimii ani, S. Lefschetz ocupîndu-se de sisteme de această formă a pus problema în modul următor. Dacă  $A$  are valori proprii cu părți reale negative, conform teoremei lui Liapunov se poate alege o matrice  $B$ , pozitiv definită, astfel încît

$$BA + A^*B = -C,$$

oricare ar fi matricea  $C$  pozitiv definită dată.

Se construiește apoi funcția Liapunov

$$V = (Bx, x) + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma.$$

Derivata în virtutea sistemului are forma

$$\frac{dV}{dt} = (BAx, x) + (Bx, Ax) + (Bbf(\sigma), x) + (Bx, bf(\sigma)) +$$

$$+ f(\sigma)(c^*x - rf(\sigma)) = -(Cx, x) + 2(Bb, x)f(\sigma) + (c, x)f(\sigma) - rf^2(\sigma).$$

Considerînd pe  $\frac{dV}{dt}$  ca formă pătratică în  $x, f(\sigma)$ , condiția ca  $-\frac{dV}{dt}$  să fie pozitiv definită este ca minorii diagonali principali ai matricii

$$\begin{pmatrix} C & -(Bb + \frac{1}{2}c) \\ -(Bb + \frac{1}{2}c)^* & r \end{pmatrix}$$

să fie pozitivi.

Deoarece prin ipoteză matricea  $C$  a fost aleasă pozitiv definită, condiția se reduce la :

$$\begin{vmatrix} C & -(Bb + \frac{1}{2}c) \\ -(Bb + \frac{1}{2}c)^* & r \end{vmatrix} > 0.$$

Prin ipoteză,  $\det C > 0$ , deci  $\det C^{-1} > 0$ , deci  $\det \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0$ .

Condiția ca  $-\frac{dV}{dt}$  să fie pozitivă se poate deci scrie și

$$\begin{vmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C & -(Bb + \frac{1}{2}c) \\ -(Bb + \frac{1}{2}c)^* & r \end{vmatrix} > 0.$$

Calculînd produsul celor doi determinanți ajungem la :

$$\begin{vmatrix} E & -C^{-1}(Bb + \frac{1}{2}c) \\ -(Bb + \frac{1}{2}c)^* & r \end{vmatrix} > 0$$

deci 
$$r - (Bb + \frac{1}{2}c)^* C^{-1}(Bb + \frac{1}{2}c) > 0.$$

Ajungem astfel la condiția  $r > (Bb + \frac{1}{2}c)^* C^{-1}(Bb + \frac{1}{2}c)$ .

Această condiție depinde de alegerea matricii  $C$ ; vom obține cea mai bună condiție considerînd minimul după toate matricile  $C$  pozitiv definite. Calculul acestui minim în cazul general nu a fost încă făcut. S. Lefschetz a considerat cazul cînd matricea  $A$  este diagonală și matricea  $C$  se ia tot în clasa matricilor diagonale.

Fie

$$A = \text{diag} (-\mu_1, \dots, -\mu_n), C = \text{diag} (d_1, \dots, d_n).$$

Avem

$$C^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n} \right);$$

rezultă

$$B = \text{diag} \left( \frac{d_1}{2\mu_1}, \dots, \frac{d_n}{2\mu_n} \right).$$

$$Bb \text{ are elementele } \frac{d_k b_k}{2\mu_k}, Bb + \frac{1}{2}c \text{ are elementele } \frac{1}{2} \left( \frac{d_k b_k}{\mu_k} + c_k \right),$$

$$C^{-1}(Bb + \frac{1}{2}c) \text{ are elementele } \frac{1}{2} \left( \frac{b_k}{\mu_k} + \frac{c_k}{d_k} \right) \text{ și condiția de stabilitate devine}$$

$$r > \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{4} \left( \frac{b_k}{\mu_k} + \frac{c_k}{d_k} \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left( \frac{b_k \sqrt{d_k}}{\mu_k} + \frac{c_k}{\sqrt{d_k}} \right)^2.$$

Pentru indicii  $k$  pentru care  $b_k c_k < 0$  se poate alege  $d_k$  astfel încît  $\frac{b_k \sqrt{d_k}}{\mu_k} + \frac{c_k}{\sqrt{d_k}}$  să fie nulă și aceasta este alegerea care dă minimul. Pentru

indicii  $k$  pentru care  $b_k c_k > 0$  termenul  $\left( \frac{b_k \sqrt{d_k}}{\mu_k} + \frac{c_k}{\sqrt{d_k}} \right)^2$  e minim dacă

$\frac{b_k \sqrt{d_k}}{\mu_k} = \frac{c_k}{\sqrt{d_k}}$  deci dacă  $b_k d_k = c_k \mu_k$ ,  $d_k = \frac{c_k \mu_k}{b_k}$  și atunci valoarea minimă este

$$\left( \frac{b_k}{\mu_k} \sqrt{\frac{c_k \mu_k}{b_k}} + c_k \sqrt{\frac{b_k}{c_k \mu_k}} \right)^2 = \left( \sqrt{\frac{b_k c_k}{\mu_k}} + \sqrt{\frac{b_k c_k}{\mu_k}} \right)^2 = \frac{4 b_k c_k}{\mu_k}.$$

Rezultă astfel condiția de stabilitate

$$r > \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k b_k c_k}{\mu_k},$$

unde

$$\varepsilon_k = 0 \quad \text{dacă} \quad b_k c_k \leq 0 \quad \text{și} \quad \varepsilon_k = 1 \quad \text{dacă} \quad b_k c_k > 0.$$

Folosind o funcție Liapunov de formă modificată introdusă de V. M. Popov, T. Morozan a îmbunătățit aceste rezultate.

Să observăm mai întâi că o condiție necesară pentru stabilitatea absolută este  $r + c^* A^{-1} b > 0$ . Într-adevăr, dacă are loc stabilitatea absolută, atunci valorile proprii ale matricii  $\begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}$  au părți reale negative, căci trebuie să fie asigurată stabilitatea asimptotică și pentru  $f(\sigma) = \sigma$ . Dar produsul valorilor proprii este  $\det \begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}$ . Avem însă

$$\det \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E & A^{-1} b \\ c^* & -r \end{pmatrix} = -(r + c^* A^{-1} b),$$

deci

$$r + c^* A^{-1} b = -\det A^{-1} \det \begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix} = -\frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}.$$

Prin ipoteză matricile  $A$  și  $\begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}$  au valori proprii cu părți reale negative. Dacă o matrice are ordinul  $k$  și valorile ei proprii au părți reale negative, produsul acestor valori proprii este pozitiv când  $k$  e par și negativ când  $k$  e impar (matricile sînt presupuse reale, deci rădăcinile complexe sînt în număr par și au produsul pozitiv); cum produsul valorilor proprii este egal cu determinantul matricii, rezultă că acest determinant e pozitiv când  $k$  e par și negativ când  $k$  e impar. Cum ordinele matricilor  $A$  și  $\begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}$  diferă printr-o unitate, rezultă că  $\det A$  și  $\det \begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -r \end{pmatrix}$  au semne diferite, deci  $r + c^* A^{-1} b > 0$ .

Fie acum  $B$  ca mai înainte. Alegem funcția Liapunov de forma

$$V = (Bx, x) + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma + \frac{p}{2(r + c^* A^{-1} b)} (c^* A^{-1} x - \sigma)^2.$$

Să observăm că fără a presupune că  $\int_0^\infty f(\sigma) d\sigma$  diverge, funcția  $V$  îndeplinește condițiile cerute pentru a fi asigurată stabilitatea asimptotică în mare; într-adevăr, dacă  $|x| + |\sigma| \rightarrow \infty$  avem  $V \rightarrow \infty$  căci pentru

$x = 0$ ,  $|\sigma| \rightarrow \infty$  ultimul termen tinde la infinit. Derivata acestei funcții în virtutea sistemului este

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & (BAx, x) + (Bbf(\sigma), x) + (Bx, Ax) + (Bx, bf(\sigma)) + \\ & + f(\sigma)(c^*x - rf(\sigma)) + \frac{p}{r + c^*A^{-1}b} (c^*A^{-1}Ax + c^*A^{-1}bf(\sigma) - \\ & - c^*x + rf(\sigma))(c^*A^{-1}x - \sigma) = - (Cx, x) + 2(Bb, x)f(\sigma) + \\ & + (c, x)f(\sigma) - rf^2(\sigma) - p\sigma f(\sigma) + pc^*A^{-1}xf(\sigma) = - (Cx, x) + \\ & + f(\sigma)(2Bb + c + pA^{-1}c, x) - rf^2(\sigma) - p\sigma f(\sigma). \end{aligned}$$

Lăsând la o parte ultimul termen care este negativ și considerînd restul ca pe o formă pătratică în  $x, f(\sigma)$ , condiția ca  $-\frac{dV}{dt}$  să fie pozitiv definită este ca minorii diagonali principali ai matricii

$$\begin{pmatrix} C & Bb + \frac{1}{2}(E + pA^{-1})c \\ \left(Bb + \frac{1}{2}(E + pA^{-1})c\right)^* & -r \end{pmatrix}$$

să fie pozitivi. Aceleași calcule ca în cazul precedent conduc la condiția

$$r > M(C, p),$$

unde

$$M(C, p) = \left(Bb + \frac{1}{2}(E + pA^{-1})c\right)^* C^{-1} \left(Bb + \frac{1}{2}(E + pA^{-1})c\right).$$

Dacă

$$\min_{c > 0, p \geq 0} M(C, p) \leq -c^*A^{-1}b,$$

condiția necesară și suficientă de stabilitate absolută este  $r > -c^*A^{-1}b$ , căci dacă  $r + c^*A^{-1}b > 0$ , atunci avem și  $r > M(C, p)$ , pentru o matrice  $C$  convenabil aleasă.

Să observăm că

$$\min_{c > 0, p \geq 0} M(C, p) \leq \min_{c > 0} \left(Bb + \frac{1}{2}c\right)^* C^{-1} \left(Bb + \frac{1}{2}c\right),$$

deci noua alegere a funcției Liapunov este mai convenabilă.

Să observăm de asemenea că dacă

$$r \geq \min_{c > 0, p \geq 0} M(C, p) > -c^*A^{-1}b$$

stabilitatea absolută este asigurată. Într-adevăr, forma pătratică este numai semidefinită, dar ea poate fi nulă numai pentru  $x = 0$ ,  $\sigma \neq 0$  și atunci termenul  $-p\sigma f(\sigma)$  este strict negativ.



Ținând seamă de cele de mai sus, apare problema calculării valorii  $\min_{C > 0, p \geq 0} M(C, p)$ . Nici acest calcul nu a fost efectuat în cazul general. Se pot obține însă rezultate complete presupunând că  $A$  este diagonală și căutând ca mai sus pe  $C$  în clasa matricilor diagonale. Să luăm ca mai sus  $A = \text{diag}(-\mu_i)$ ,  $\mu_i > 0$ ,  $C = (\gamma_{ij})$ ; se obține  $B = \left( \frac{\gamma_{ij}}{\mu_i + \mu_j} \right)$ . Putem scrie

$$M(C, p) = (C^{-1}u, u), \quad u = Bb + \frac{1}{2}(E + pA^{-1})c,$$

$$u_i = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_{ij} b_j}{\mu_i + \mu_j} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p}{\mu_i} \right) c_i.$$

Deoarece  $C > 0$ , forma pătratică  $(C^{-1}u, u)$  este pozitiv definită, deci

$$\min_{C > 0, p \geq 0} M(C, p) \geq 0,$$

valoarea nulă putând fi obținută numai dacă  $u = 0$ . Să observăm că

$$c^* A^{-1} b = - \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{\mu_i}.$$

Cînd  $C$  este o matrice diagonală,  $C = (\text{diag } d_i)$ :

$$u_i = \frac{d_i b_i}{2\mu_i} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p}{\mu_i} \right) c_i, \quad C^{-1}u = \left( \frac{b_i}{2\mu_i} + \frac{1}{2d_i} \left( 1 - \frac{p}{\mu_i} \right) c_i \right),$$

$$M(C, p) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n d_i \left( \frac{b_i}{\mu_i} + \frac{1 - \left( \frac{p}{\mu_i} \right) c_i}{d_i} \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left( \frac{b_i \sqrt{d_i}}{\mu_i} + \frac{\left( 1 - \frac{p}{\mu_i} \right) c_i}{\sqrt{d_i}} \right)^2.$$

Raționînd ca mai sus deducem

$$\min_{C > 0} M(C, p) = N(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i b_i c_i (\mu_i - p)}{\mu_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i b_i c_i}{\mu_i} - p \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i b_i c_i}{\mu_i^2},$$

$$\text{unde } \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{dacă } b_i c_i (\mu_i - p) < 0, \\ 1 & \text{dacă } b_i c_i (\mu_i - p) > 0. \end{cases}$$

Dacă

$$\max_{1 \leq i \leq n} b_i c_i < 0$$

sau

$$\max_{i \in I} \mu_i < \min_{i \in J} \mu_i,$$

unde  $I = \{i, 1 \leq i \leq n, b_i c_i > 0\}$ ,  $J = \{j, 1 \leq j \leq n, b_j c_j > 0\}$  rezultă

$$\min_{C > 0, p \geq 0} M(C, p) = 0;$$

într-adevăr, în primul caz putem lua

$$p < \min \mu_i,$$

iar în al doilea

$$\max_{i \in I} \mu_i < p < \min_{i \in J} \mu_i.$$

Se vede că în aceste cazuri minimul este efectiv atins pe matricei diagonale.

De asemenea, dacă  $\min_{1 \leq i \leq n} b_i c_i > 0$ , luând  $p = 0$  rezultă

$$N(0) = \sum \frac{b_i c_i}{\mu_i} > 0$$

și condiția necesară și suficientă de stabilitate absolută este  $r > N(0)$ .

Putem studia problema stabilității absolute căutînd funcții Liapunov de forma

$$V = (Hx, x) + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma,$$

unde  $H$  este o matrice simetrică oarecare.

Asemenea studiu a fost făcut de V. A. Iakubovici. Derivata funcției  $V$  în virtutea sistemului este

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (H \dot{x}, x) + (Hx, \dot{x}) + f(\sigma) \dot{\sigma} = (H(Ax + bf(\sigma)), x) + \\ &+ (Hx, Ax + bf(\sigma)) + f(\sigma)(c^*x - rf(\sigma)) = ((HA + A^*H)x, x) + \\ &+ 2(\dot{H}b, x)f(\sigma) + (c^*x)f(\sigma) - rf^2(\sigma) = - (Gx, x) - 2(g^*x)f(\sigma) - \\ &- rf^2(\sigma), \end{aligned}$$

unde am notat

$$-G = HA + A^*H, \quad -g = Hb + \frac{1}{2}C.$$

Mai departe,

$$\dot{V} = - \left\{ \left( \left( G - \frac{1}{r} gg^* \right) x, x \right) + r \left( f(\sigma) + \frac{1}{r} g^* x \right)^2 \right\}$$

căci

$$\frac{1}{r} (g g^* x, x) - \frac{1}{r} (g^* x)^2 = 0.$$

Într-adevăr,  $g g^*$  este matricea cu elementele  $g_i g_j$ , deci

$$(g g^* x, x) \text{ este } \sum_{i,j} g_i g_j x_i x_j = (\sum g_i x_i)^2 = (g^* x)^2.$$

Rezultă că o condiție suficientă ca  $\dot{V}$  să fie negativă este ca forma

$$\left( \left( G - \frac{1}{r} g g^* \right) x, x \right)$$

să fie pozitiv definită.

Această condiție este și necesară. Să presupunem că există  $x_0 \neq 0$  astfel ca

$$\left( \left( G - \frac{1}{r} g g^* \right) x_0, x_0 \right) \leq 0;$$

fie  $g^* x_0 \neq 0$ . Alegem pe  $\lambda$  din ecuația

$$\sqrt{r} f(\sigma_0) + \frac{\lambda}{\sqrt{r}} g^* x_0 = 0,$$

cu  $\sigma_0$  fixat.

Atunci, pentru  $x = \lambda x_0$ ,  $\sigma = \sigma_0$  vom avea  $r \left( f(\sigma) + \frac{1}{r} g^* x \right) = 0$  deci  $\dot{V} \geq 0$ . Dacă  $g^* x_0 = 0$  se ia  $x = x_0 \neq 0$ ,  $\sigma = 0$  și rezultă din nou  $\dot{V} \geq 0$ . Prin urmare, dacă forma nu este pozitiv definită, nu putem avea  $\dot{V}$  negativ definită.

TEOREMA 2.1. Dacă există o matrice simetrică  $H > 0$  astfel ca

$$rG - g g^* > 0^*,$$

(unde  $-G = HA + A^*H$ ,  $-g = Hb + \frac{1}{2}c$ ), și dacă  $A$  este hurwitziană\*\*) iar  $r + (A^{-1}b, c) > 0$ , atunci soluția banală a sistemului (4) este absolut stabilă.

*Demonstrație.* Din calculele făcute pînă acum rezultă că există funcția

$$V = (Hx, x) + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma$$

a cărei derivată în virtutea sistemului este negativă. Prin urmare stabilitatea asimptotică a soluției banale este imediată. Dacă  $\int_0^\infty f(\sigma) d\sigma$  diverge, funcția  $V$  îndeplinește condițiile cerute pentru stabilitatea asimptotică în mare. Folosind condiția  $r + (A^{-1}b, c) > 0$  putem însă demonstra că are loc stabilitatea asimptotică în mare fără ipoteza că integrala diverge. Pentru aceasta vom lua

$$V_1 = V + \frac{p}{2(r + c^* A^{-1}b)} (c^* A^{-1}x - \sigma)^2.$$

Funcția  $V_1$  îndeplinește condiția cerută pentru stabilitatea în mare

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{dV}{dt} + \frac{p}{r + c^* A^{-1}b} (c^* A^{-1}x - \sigma) (c^* A^{-1}A x + c^* A^{-1}b f(\sigma) - \\ &\quad - c^* x + r f(\sigma)) = \frac{dV}{dt} + p f(\sigma) (c^* A^{-1}x - \sigma) = \frac{dV}{dt} + \\ &\quad + p f(\sigma) c^* A^{-1}x - p \sigma f(\sigma). \end{aligned}$$

\*) Dacă  $G_1$  și  $G_2$  sînt matrici simetrice,  $G_1 > G_2$  înseamnă că forma pătratică  $\langle (G_1 - G_2)x, x \rangle$  este pozitiv definită.

\*\*) Numim hurwitziană o matrice ale cărei valori proprii au părți reale negative.

Din ipotezele teoremei rezultă că  $\frac{dV}{dt}$  este o formă pătratică negativ definită în  $x$  și  $f(\sigma)$ ; pentru  $p$  suficient de mic și forma pătratică  $\frac{dV}{dt} + pf(\sigma)c^*A^{-1}x$  este negativ definită, deci  $\frac{dV_1}{dt}$  este negativ definită.

Teorema este demonstrată. Această teoremă a fost demonstrată pe o cale ocolită de V. A. Yakubovici<sup>1)</sup>. Ideia de a considera funcția  $V_1$  în locul funcției  $V$  aparține lui V. M. Popov.

Problema practică ce se pune acum este aceea de a da condiției din enunț o formă cât mai simplă și mai ușor de verificat. Pentru aceasta observăm că această condiție se poate scrie

$$-\rho(A^*H + HA) - \left(Ha + \frac{1}{2}b\right)\left(a^*H_1 + \frac{1}{2}b^*\right) = \frac{\rho}{2}C > 0$$

sau

$$Haa^*H + B^*H + HB + \frac{1}{4}bb^* + \frac{\rho}{2}C = 0,$$

unde am pus  $B = \rho A + \frac{1}{2}ab^*$ . Această condiție poate fi privită ca o ecuație în raport cu  $H$  pentru fiecare  $C > 0$  fixat. Condiția de stabilitate se poate obține deci fie alegînd pe  $H > 0$  arbitrar și punînd condiția ca  $C > 0$ , fie invers, alegînd pe  $C > 0$  arbitrar și cerînd ca ecuația să admită o soluție  $H > 0$ . Vom merge pe cel de-al doilea drum și vom încerca să ajungem la condiții cât mai simple.

LEMA 1. Dacă valorile proprii ale matricii  $K$  au părți reale negative, soluția  $X$  a ecuației  $K^*X + XK = -C$  e unică și dată de formula

$$X = \int_0^\infty e^{K^*t} C e^{Kt} dt.$$

Dacă  $C > 0$ , atunci  $X > 0$ . Dacă  $C \geq 0$ , atunci  $X \geq 0$ . Dacă  $C > 0$  și  $X > 0$ , atunci  $K$  e hurwitziană.

Demonstrație. Ecuația  $K^*X + XK = -C$  exprimă faptul că derivata funcției  $(Xx, x)$  în virtutea sistemului  $\frac{dx}{dt} = Kx$  este egală cu  $-(Cx, x)$ . Din teorema lui Liapunov rezultă că dacă matricea  $K$  e hurwitziană, atunci pentru orice  $C$  ecuația precedentă are soluție unică. Faptul că matricea  $X$  e dată de formula din enunț rezultă din teorema 1.6''.

Într-adevăr, dacă

$$V = \int_t^\infty (Ce^{K(s-t)}x, e^{K(s-t)}x) ds$$

<sup>1)</sup> Recent, problema a fost reluată pe aceeași cale de către J. P. La Salle, care a demonstrat că dacă  $r > g^*G^{-1}g$ , atunci condiția  $r + c^*A^{-1}b > 0$  este îndeplinită.

avem

$$V = \int_0^\infty (C e^{Ks} x, e^{Ks} x) ds = \int_0^\infty (e^{K^*s} C e^{Ks} x, x) ds = (Xx, x)$$

cu  $X = \int_0^\infty e^{K^*s} C e^{Ks} ds$  și  $\frac{dV}{dt} = -(Cx, x)$ . Soluția ecuației fiind unică ea rezultă dată de formula din enunț.

Faptul că  $C \geq 0$  implică  $X \geq 0$  și  $C > 0$  implică  $X > 0$  se vede direct din formulă. Dacă  $C > 0$  și  $X > 0$  soluția banală a sistemului  $\frac{dx}{dt} = Kx$  este asimptotic stabilă și matricea  $K$  e hurwitziană.

LEMA 2. Fie

$Haa^*H + B^*H + HB + \frac{1}{4}bb^* + \frac{\rho}{2}C = 0$ ,  $B = \rho A + \frac{1}{2}ab^*$ , unde  $C > 0$ , iar  $H$  e simetrică. Presupunem că există  $0 \leq \nu \leq 1$  astfel încît  $K_\nu = \rho A + \nu ab^*$  să fie hurwitziană. Atunci  $H > 0$  și  $K_\nu$  e hurwitziană pentru orice  $\nu \in (0, 1)$ .

Demonstrație. Fie

$$C_\mu = \frac{\rho}{2}C + (\mu Ha + \frac{1}{2}b)(\mu Ha + \frac{1}{2}b)^*;$$

evident  $C_\mu > 0$ .

Din enunț,

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2}C &= -Haa^*H - \left(\rho A^* + \frac{1}{2}ba^*\right)H - H\left(\rho A + \frac{1}{2}ab^*\right) - \frac{1}{4}bb^* = \\ &= -Haa^*H - \rho(A^*H + HA) - \frac{1}{2}(ba^*H + Hab^*) - \frac{1}{4}bb^*. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} C_\mu &= -Haa^*H - \left(\rho A^* + \frac{1}{2}ba^*\right)H - H\left(\rho A + \frac{1}{2}ab^*\right) - \frac{1}{4}bb^* + \\ &+ \mu^2 Haa^*H + \frac{1}{2}\mu b(Ha)^* + \frac{1}{2}\mu Hab^* + \frac{1}{4}bb^* = (\mu^2 - 1)Haa^*H - \\ &- [\rho A^* + \frac{1}{2}(1 - \mu)ba^*]H - H\left[\rho A + \frac{1}{2}(1 - \mu)ab^*\right] = \\ &= -(1 - \mu^2)Haa^*H - K_\nu^*H - HK_\nu, \end{aligned}$$

unde am pus

$$\nu = \frac{1}{2}(1 - \mu).$$

Relația obținută se mai poate scrie

$$K_\nu^*H + HK_\nu = -C_\mu - (1 - \mu^2)Haa^*H.$$

Fie acum  $\nu$  ca în enunț. Alegem pe  $\mu = 1 - 2\nu$ ; dacă  $0 \leq \nu \leq 1$  rezultă  $|\mu| \leq 1$  deci  $C_\mu + (1 - \mu^2) H a a^* H > 0$ . Pe baza lemei 1 această ecuație are o soluție  $H$  unică și  $H > 0$ . Pentru orice  $\nu \in [0, 1]$  avem  $C_\mu + (1 - \mu^2) H a a^* H > 0$  și  $H > 0$  deci  $K_\nu$  rezultă hurwitziană.

Din această leamnă rezultă în particular că dacă ecuația în  $H$  care exprimă condiția de stabilitate admite o soluție simetrică, atunci această soluție este și pozitiv definită.

Într-adevăr,  $A$  fiind hurwitziană,  $K_0$  este hurwitziană, deci  $H > 0$ .

Sistemul de ecuații care determină elementele matricii  $H$  este un sistem de  $\frac{n(n+1)}{2}$  ecuații de gradul doi. Vom reduce problema la condiția ca un sistem de  $n$  ecuații de gradul doi să aibă soluții reale.

Definim operatorul  $Y = L(X)$  prin formula

$$A^* Y + Y A = -X$$

ceea ce este posibil deoarece pe baza lemei 1, pentru orice  $X$  formula definește un  $Y$  și numai unul, care e pozitiv o dată cu  $X$ . Conform lemei 1 avem explicit

$$L(X) = \int_0^\infty e^{A^* t} X e^{A t} dt.$$

Notăm

$$-u = H a + \frac{1}{2} b.$$

Ecuația care exprimă condiția de stabilitate se scrie

$$\rho(A^* H + H A) = -\frac{\rho}{2} C - u u^*$$

și ținând seama de definiția lui  $L(X)$  rezultă

$$\rho H = L(u u^*) + \frac{1}{2} \rho L(C).$$

De aici, înmulțind cu  $a$  și adăugând  $\frac{1}{2} \rho b$ , deducem

$$-\rho u = L(u u^*) a + \frac{1}{2} \rho (b + L(C) a).$$

Notând  $c = L(C) a$ , ajungem la ecuația

$$L(u u^*) a + \rho u + \frac{1}{2} \rho (b + c) = 0.$$

Să presupunem că pentru  $C > 0$  dat, această ecuație are o soluție reală  $u$ . Atunci matricea  $H$  determinată de relația

$$\rho H = L(u u^*) + \frac{1}{2} \rho L(C)$$

este simetrică, pozitiv definită, și verifică relația

$$\rho(A^*H + HA) = -\frac{\rho}{2}C - uu^*,$$

deci condiția de stabilitate este îndeplinită.

Rezultă astfel:

TEOREMA 2.1'. Dacă  $A$  e hurwitziană,  $\Gamma^2 = \rho + (A^{-1}a, b) > 0$  și dacă există  $C > 0$  astfel încât punând  $c = L(C)a$  ecuația

$$L(uu^*)a + \rho u + \frac{1}{2}\rho(b + c) = 0$$

să admită o soluție  $u$  reală, atunci soluția banală a sistemului este absolut stabilă.

Notînd  $U = L(uu^*)$ ,  $T = L(C)$ , obținem ecuațiile

$$A^*T + TA = -C, \quad c = Ta, \quad A^*U + UA = -uu^*,$$

$$Ua + \rho u + \frac{1}{2}\rho(b + c) = 0.$$

Să vedem ce devin ecuațiile în cazul cînd  $A$  admite o formă normală diagonală și valorile proprii ale lui  $A$  sînt reale. Vom nota  $u = (u_i)$ ,  $U = (\eta_{ij})$ . Există o bază în care  $A$  este diagonală și componentele lui  $a$  egale cu 1 (forma canonică a lui Lurie). Ecuațiile precedente devin în această bază

$$-(\rho_i + \rho_i) \eta_{ij} = -u_i u_j, \quad \sum_j \eta_{ij} + \rho u_i + \frac{1}{2}\rho(b_i + c_i) = 0,$$

deci

$$u_i \sum_j \frac{u_j}{\rho_i + \rho_j} + \rho u_i + \frac{1}{2}\rho(b_i + c_i) = 0$$

și se vede că ele sînt de aceeași formă cu cele obținute în paragraful precedent.

CONSECINȚĂ. În cazul cînd  $a$  e vector propriu al matricii  $A$  sau  $b$  e vector propriu al matricii  $A^*$ , condiția  $\Gamma^2 > 0$  este necesară și suficientă pentru stabilitatea absolută.

Demonstrație. Fie  $Aa = -\alpha a$ ,  $\alpha > 0$ . Din  $A^*U + UA = -uu^*$  se capătă, înmulțind cu  $a$ ,  $(A^* - \alpha I)Ua = -(u, a)u$ , deci  $Ua = -(u, a)(A^* - \alpha I)^{-1}u$  ( $\det(A^* - \alpha I) \neq 0$  căci  $\alpha > 0$  și  $A$  e hurwitziană). Din aceeași relație, înmulțind la stînga cu  $a^*A^{*-1}$  și la dreapta cu  $A^{-1}a$ , căpătăm

$$a^*UA^{-1}a + a^*A^{*-1}Ua = -a^*A^{*-1}uu^*A^{-1}a,$$

sau

$$(A^{-1}a, Ua) + (Ua, A^{-1}a) = -(A^{-1}a, u)^2,$$

deci

$$2 (Ua, A^{-1} a) = - (A^{-1} a, u)^2.$$

Notăm  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{\rho}} (u, A^{-1} a)$ . Din ecuația

$$Ua + \rho u + \frac{1}{2} \rho (b + c) = 0$$

deducem

$$Ua = -\rho u - \frac{1}{2} \rho (b + c).$$

Rezultă

$$-2(\rho u + \frac{1}{2} \rho (b + c), A^{-1} a) = -\rho \zeta^2,$$

deci

$$\rho \zeta^2 - 2 \rho \sqrt{\rho} \zeta - \rho (b + c, A^{-1} a) = 0$$

deci

$$\zeta^2 - 2 \sqrt{\rho} \zeta - (b + c, A^{-1} a) = 0, \quad \zeta = \sqrt{\rho} \pm \sqrt{\rho + (b + c, A^{-1} a)}.$$

Notînd  $\tilde{\Gamma}^2 = \rho + (b + c, A^{-1} a)$  rezultă  $\zeta = \sqrt{\rho} \pm \tilde{\Gamma}$ .

Din  $Aa = -\alpha a$  rezultă

$$a = -\alpha A^{-1} a, \quad A^{-1} a = -\frac{1}{\alpha} a,$$

deci

$$\zeta = -\frac{1}{\alpha \sqrt{\rho}} (u, a),$$

deci

$$(u, a) = -\alpha \sqrt{\rho} [\sqrt{\rho} \pm \tilde{\Gamma}].$$

Din  $Ua = -(u, a) (A^* - \alpha I)^{-1} u$  rezultă acum

$$-\rho u - \frac{1}{2} \rho (b + c) = \alpha \sqrt{\rho} [\sqrt{\rho} \pm \tilde{\Gamma}] (A^* - \alpha I)^{-1} u,$$

deci

$$-\frac{1}{2} \rho (A^* - \alpha I) (b + c) = \rho \left( A^* \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \tilde{\Gamma} I \right) u.$$

Rezultă în definitiv

$$u = -\frac{1}{2} \left( A \pm \frac{\alpha \tilde{\Gamma}}{\sqrt{\rho}} I \right)^{-1} (A^* - \alpha I) (b + c).$$



Se vede că ecuația în  $u$  are soluție reală dacă și numai dacă  $\tilde{\Gamma} > 0$  e real, deci  $\tilde{\Gamma}^2 > 0$ . Dar  $\tilde{\Gamma}^2 = \Gamma^2 + (c, A^{-1} a)$ .

Avem

$$A^* T + T A = -C, \quad c = T a, \quad (c, A^{-1} a) = (A^{*-1} T a, a);$$

$$T + A^{*-1} T A = -A^{*-1} C, \quad A^{*-1} T a + T A^{-1} a = -A^{*-1} C A^{-1} a,$$

deci

$$(A^{*-1} T a, a) = -\frac{1}{2} (A^{*-1} C A^{-1} a, a) = -\frac{1}{2} (C A^{-1} a, A^{-1} a) < 0.$$

Dacă  $\Gamma^2 > 0$  pentru  $c$  suficient de mic rezultă  $\tilde{\Gamma}^2 > 0$ , deci există soluție  $u$  reală, deci conform teoremei 2.1' are loc stabilitatea absolută.

Să considerăm acum cazul când  $b$  e vector propriu al matricii  $A^*$ . Fie  $(x, \sigma)$  o soluție,  $\xi = (b, x)$ . Avem

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \left( b, \frac{dx}{dt} \right) = (b, Ax) + (b, a) f(\sigma) = (A^* b, x) + (b, a) f(\sigma) = \\ &= -\beta (b, x) + (b, a) f(\sigma), \end{aligned}$$

deci

$$\frac{d\xi}{dt} = -\beta \xi + (b, a) f(\sigma), \quad \frac{d\sigma}{dt} = \xi - \rho f(\sigma).$$

Am obținut un sistem cu  $n = 1$ ,  $A = -\beta$ ,  $b = 1$ , iar  $a$  se înlocuiește cu  $(b, a)$ . Relația  $A^* T + T A = -C$  devine în acest caz  $-2\beta T = -C$  deci  $T > 0$  și din  $c = T(b, a)$  rezultă că  $c$  are același semn cu  $(b, a)$ . Relația  $A^* U + U A = -u u^*$  devine

$$-2\beta U = -u^2, \quad u^2 = 2\beta U, \quad U = \frac{1}{2\beta} u^2,$$

iar ecuația fundamentală devine

$$\frac{(b, a)}{2\beta} u^2 + \rho u + \frac{1}{2} \rho (1 + c) = 0$$

sau

$$(b, a) u^2 + 2\rho\beta u + \rho\beta(1 + c) = 0$$

Ecuația are rădăcină reală dacă și numai dacă  $\rho^2 \beta^2 - \rho\beta(b, a)(1 + c) > 0$  sau  $\rho\beta - (b, a)(1 + c) > 0$ . Această condiție este îndeplinită dacă și numai dacă  $\rho - \frac{1}{\beta}(b, a) > 0$  ceea ce coincide cu  $\Gamma^2 > 0$ , căci  $(b, A^{-1} a) =$

$$= (A^{*-1} b, a) = -\frac{1}{\beta} (a, b).$$

Rezultă că dacă  $\Gamma^2 > 0$ ,  $\sigma(t) \rightarrow 0$  pentru orice soluție, deci  $f(\sigma(t)) \rightarrow 0$  pentru orice soluție și din formula

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} a f[\sigma(s)] ds$$

rezultă imediat că  $x(t) \rightarrow 0$  când  $t \rightarrow \infty$  deci are loc stabilitatea absolută.

### § 3. METODA LUI V. M. POPOV

O metodă principal nouă, bazată pe folosirea transformatei, Fourier, a fost dată în studiul stabilității absolute a sistemelor de reglare automată de V. M. Popov.

Metoda lui Popov conduce la rezultate în același timp mai puternice și mai efective decât cele prezentate în paragrafele precedente.

Vom considera sistemul

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b f(\sigma), \quad \frac{d\xi}{dt} = f(\sigma), \quad \sigma = c^* x - \gamma \xi, \quad \gamma > 0. \quad (5)$$

Vom presupune, ca mai înainte, că matricea  $A$  este hurwitziană. Notăm

$$v(t) = -c^* e^{At} b, \quad N(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} v(t) dt, \quad G(i\omega) = N(i\omega) + \frac{\gamma}{i\omega}.$$

**TEOREMA 2.2.** *Dacă există  $q > 0$  astfel încât pentru toți  $\omega \geq 0$  să avem  $\operatorname{Re}(1 + i\omega q) G(i\omega) \geq 0$ , atunci soluția banală a sistemului (5) este absolut stabilă.*

*Demonstrație.* Fie  $x(t)$ ,  $\xi(t)$  o soluție a sistemului (5).

$$\text{Notăm } f_T(t) = \begin{cases} f[\sigma(t)] & \text{pentru } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{pentru } t > T. \end{cases}$$

Definim funcția

$$\lambda_T(t) = - \int_0^t v(t-\tau) f_T(\tau) d\tau - q \int_0^t \frac{d v(t-\tau)}{d t} f_T(\tau) d\tau - q[v(0) + \gamma] f_T(t).$$

Pentru a vedea semnificația acestei funcții vom face unele calcule. Avem

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + b f[\sigma(t)].$$

Pe baza formulei variației constantelor rezultă

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b f[\sigma(\tau)] d\tau$$

deci

$$\sigma(t) = c^* e^{At} x(0) + \int_0^t c^* e^{A(t-\tau)} b f[\sigma(\tau)] d\tau - \gamma \xi(t).$$

Dar  $c^* e^{A(t-\tau)} b = -v(t-\tau)$ ; notăm  $c^* e^{At} = \mu^*(t)$ .

Rezultă

$$\sigma(t) = \mu^*(t) x(0) - \int_0^t v(t-\tau) f[\sigma(\tau)] d\tau - \gamma \xi(t).$$

De aici

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d\mu^*(t)}{dt} x(0) - v(0)f[\sigma(t)] - \int_0^t \frac{dv(t-\tau)}{dt} f[\sigma(\tau)] d\tau - \gamma \frac{d\xi(t)}{dt}.$$

Dar

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = f[\sigma(t)],$$

deci

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d\mu^*(t)}{dt} x(0) - \int_0^t \frac{dv(t-\tau)}{dt} f[\sigma(\tau)] d\tau - (v(0) + \gamma) f[\sigma(t)].$$

Pentru  $0 \leq t \leq T$  putem deci scrie

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d\mu^*(t)}{dt} x(0) - \int_0^t \frac{dv(t-\tau)}{dt} f_T(\tau) d\tau - [v(0) + \gamma] f_T(t).$$

Rezultă

$$\lambda_T(t) = - \int_0^t v(t-\tau) f_T(\tau) d\tau + q \frac{d\sigma(t)}{dt} - q \frac{d\mu^*(t)}{dt} x(0) \text{ pentru } 0 \leq t \leq T$$

sau

$$\lambda_T(t) = \sigma(t) + q \frac{d\sigma(t)}{dt} + \gamma \xi(t) - \left[ \mu^*(t) + q \frac{d\mu^*(t)}{dt} \right] x(0) \text{ pentru } 0 \leq t \leq T.$$

Pentru  $t > T$ , rezultă, ținînd seama de definiția funcției  $f_T(t)$ , relația

$$\lambda_T(t) = - \int_0^T v(t-\tau) f_T(\tau) d\tau - q \int_0^T \frac{dv(t-\tau)}{dt} f_T(\tau) d\tau.$$

Deoarece matricea  $A$  este hurwitziană, avem

$$|e^{At}| \leq K_1 e^{-K_0 t} \text{ pentru } t \geq 0, \text{ deci } |v(t)| \leq K_2 e^{-K_0 t}.$$

Rezultă  $|\lambda_T(t)| \leq K_3 e^{-K_0 t}$  pentru  $t \geq T$ , deci  $\lambda_T(t)$  admite transformata Fourier. Fie

$$L_T(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} \lambda_T(t) dt, \quad F_T(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} f_T(t) dt.$$

Avem

$$\int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{dv(t)}{dt} dt = e^{-i\omega t} v(t) \Big|_0^{\infty} + i\omega \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} v(t) dt = i\omega N(i\omega) - v(0).$$

Se știe din teoria transformatei Fourier că dacă

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau,$$

atunci transformata Fourier a lui  $h$  este produsul transformatelor Fourier ale funcțiilor  $f$  și  $g$ . Ținând seama de aceasta rezultă

$$L_T(i\omega) = -N(i\omega) F_T(i\omega) - q[i\omega N(i\omega) - v(0)] F_T(i\omega) - \\ - q[v(0) + \gamma] F_T(i\omega) = -F_T(i\omega) [(1 + i\omega q) N(i\omega) + q\gamma].$$

Considerăm funcția

$$\rho(T) = \int_0^{\infty} \lambda_T(t) f_T(t) dt.$$

Ținând seama de felul cum au fost definite  $\lambda_T$  și  $f_T$  rezultă

$$\rho(T) = \int_0^T \lambda_T(t) f[\sigma(t)] dt = \int_0^T \sigma(t) f[\sigma(t)] dt + q \int_0^T f[\sigma(t)] \frac{d\sigma(t)}{dt} dt + \\ + \gamma \int_0^T \xi(t) f[\sigma(t)] dt - \int_0^T f_T(t) \left[ \mu^*(t) + q \frac{d\mu^*}{dt} \right] x(0) dt = \\ = \int_0^T \sigma(t) f[\sigma(t)] dt + q \int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} f(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \gamma [\xi^2(T) - \xi^2(0)] - \\ - \int_0^T f_T(t) \left[ \mu^*(t) + q \frac{d\mu^*}{dt} \right] x(0) dt.$$

Am folosit faptul că  $f[\sigma(t)] = \frac{d\xi(t)}{dt}$ , deci  $\xi(t) f[\sigma(t)] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \xi^2(t)$ .

În teoria transformatei Fourier se demonstrează următoarea formulă fundamentală

$$\int_0^{\infty} f_1 f_2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} F_1(i\omega) F_2(-i\omega) d\omega,$$

valabilă pentru  $f_1$  și  $f_2$  din  $L_1 \cap L_2$ .

Funcțiile  $\lambda_T(t)$  și  $f_T(t)$  îndeplinesc aceste condiții deci putem scrie

$$\rho(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} L_T(i\omega) F_T(-i\omega) d\omega = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} [(1 + i\omega q) N(i\omega) + q\gamma] F_T(i\omega) F_T(-i\omega) d\omega = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} [(1 + i\omega q) N(i\omega) + q\gamma] |F_T(i\omega)|^2 d\omega.$$

Avem

$$q\gamma = (1 + i\omega q) \frac{\gamma}{i\omega} - \frac{\gamma}{i\omega},$$

deci

$$\begin{aligned} (1 + i\omega q) N(i\omega) + q\gamma &= (1 + i\omega q) N(i\omega) + (1 + i\omega q) \frac{\gamma}{i\omega} - \frac{\gamma}{i\omega} = \\ &= (1 + i\omega q) \left( N(i\omega) + \frac{\gamma}{i\omega} \right) - \frac{\gamma}{i\omega} = (1 + i\omega q) G(i\omega) - \frac{\gamma}{i\omega}. \end{aligned}$$

Dar  $|F_T(i\omega)|^2$  este real, deci

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [(1 + i\omega q) N(i\omega) + q\gamma] |F_T(i\omega)|^2 &= \\ = |F_T(i\omega)|^2 \operatorname{Re} [(1 + i\omega q) N(i\omega) + q\gamma] &= \\ = |F_T(i\omega)|^2 \operatorname{Re} \left[ (1 + i\omega q) G(i\omega) - \frac{\gamma}{i\omega} \right] &= \\ = |F_T(i\omega)|^2 \operatorname{Re} (1 + i\omega q) G(i\omega) \geq 0 \end{aligned}$$

conform ipotezei din enunț. Rezultă

$$\rho(T) \leq 0.$$

Stabilim următoarea inegalitate

$$\left| \int_0^T f_T(t) \left[ \mu^*(t) + q \frac{d\mu^*(t)}{dt} \right] dt \right| \leq K_4 \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)|.$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[ \mu^*(t) + q \frac{d\mu^*(t)}{dt} \right] f_T(t) dt &= \int_0^T \left[ \mu^*(t) + q \frac{d\mu^*(t)}{dt} \right] \frac{d\xi(t)}{dt} dt = \\ &= \left[ \mu^*(t) + q \frac{d\mu^*(t)}{dt} \right] \xi(t) \Big|_0^T - \int_0^T \xi(t) \left[ \frac{d^*\mu(t)}{dt} + q \frac{d^2\mu^*(t)}{dt^2} \right] dt. \end{aligned}$$

Dar

$$\mu^*(t) = c^* e^{At}, \quad \frac{d\mu^*(t)}{dt} = c^* A e^{At}, \quad \frac{d^2\mu^*}{dt^2} = c^* A^2 e^{At},$$

deci

$$|\mu^*(t)| \leq |c| K_1 e^{-Kt}, \quad \left| \frac{d\mu^*}{dt} \right| \leq |c| \|A\| K_1 e^{-Kt},$$

$$\left| \frac{d^2\mu^*(t)}{dt^2} \right| \leq |c| \|A\|^2 K_1 e^{-Kt}.$$

**Rezultă**

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \left[ \mu^*(t) + q \frac{d\mu^*(t)}{dt} \right] f_T(t) dt \right| \leq |c| K_1 e^{-K_0 T} |\xi(T)| + \\ & + q |c| |A| K_1 e^{-K_0 T} |\xi(T)| + q |c| |A| K_1 |\xi(0)| + q K_1 |\xi(0)| + \\ & + \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| \int_0^T |c| |A| K_1 (1 + q |A|) e^{-K_0 t} dt \leq |c| K_1 (1 + q |A|) (|\xi(T)| + \\ & + |\xi(0)|) + \frac{|c| |A| K_1 (1 + q |A|)}{K_0} \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| \leq K_4 \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| \end{aligned}$$

și inegalitatea este demonstrată.

Notînd

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma,$$

din  $\rho(T) \leq 0$  deducem

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sigma(t) f[\sigma(t)] dt + q \Phi[\sigma(T)] + \frac{1}{2} \gamma \xi^2(T) \leq q \Phi[\sigma(0)] + \\ & + \frac{1}{2} \gamma \xi^2(0) + K_4 \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| |x(0)|. \end{aligned}$$

Deoarece  $\sigma f(\sigma) > 0$  și  $\Phi(\sigma) > 0$ , rezultă în particular

$$\frac{1}{2} \gamma \xi^2(T) \leq K_4 \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| |x(0)| + q \Phi[\sigma(0)] + \frac{1}{2} \gamma \xi^2(0).$$

Cum inegalitatea a fost stabilită pentru orice  $T$ , putem scrie pentru  $T_1 \leq T$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma \xi^2(T_1) & \leq K_4 |x(0)| \sup_{0 \leq t \leq T_1} |\xi(t)| + q \Phi[\sigma(0)] + \frac{1}{2} \gamma \xi^2(0) \leq \\ & \leq K_4 |x(0)| \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| + q \Phi[\sigma(0)] + \frac{1}{2} \gamma \xi^2(0) \end{aligned}$$

deci

$$\frac{1}{2} \gamma \sup_{0 \leq t \leq T} \xi^2(t) \leq K_4 |x(0)| \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| + q \Phi[\sigma(0)] + \frac{1}{2} \gamma \xi^2(0).$$

Dar

$$\left( \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| \right)^2 \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \xi^2(t),$$

deci

$$\frac{1}{2} \gamma \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| \right)^2 - K_4 |x(0)| \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| - q \Phi[\sigma(0)] - \frac{1}{2} \gamma \xi^2(0) \leq 0.$$

De aici rezultă că

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| \leq \frac{K_4 |x(0)| + \sqrt{K_4^2 |x(0)|^2 + 2\gamma \left[ q\Phi[\sigma(0)] + \frac{1}{2}\gamma \xi^2(0) \right]}}{\gamma}$$

deci

$$|\xi(t)| \leq \Phi_1(|x(0)|, |\xi(0)|)$$

ceea ce implică stabilitatea în raport cu componenta  $\xi$ .

Stabilim acum inegalitatea

$$|x(t)| \leq K_1 |x(0)| + K_5 \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\xi(\tau)|.$$

Avem

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b f[\sigma(\tau)] d\tau = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= e^{At} x(0) + e^{A(t-\tau)} b \xi(\tau) \Big|_0^t + \int_0^t A e^{A(t-\tau)} b \xi(\tau) d\tau = e^{At} x(0) + \\ &+ b \xi(t) - e^{At} b \xi(0) + \int_0^t A e^{A(t-\tau)} b \xi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq K_1 |x(0)| + |b| \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\xi(\tau)| + K_1 |b| \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\xi(\tau)| + \\ &+ \frac{K_1}{K_0} |A| |b| \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\xi(\tau)| \end{aligned}$$

deci în definitiv

$$|x(t)| \leq K_1 |x(0)| + K_5 \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\xi(\tau)|.$$

Ținând seama de evaluarea obținută pentru  $|\xi(t)|$  rezultă

$$|x(t)| \leq \Phi_2(|x(0)|, |\xi(0)|),$$

deci soluția banală a sistemului este stabilă.

Rămîne de demonstrat că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0.$$

Tot din inegalitatea fundamentală obținută plecînd de la  $\rho(T) \leq 0$  deducem

$$\int_0^T \sigma(t) f[\sigma(t)] dt \leq K_4 |x(0)| \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| + q\Phi[\sigma(0)] + \frac{1}{2}\gamma \xi^2(0),$$

deci

$$\int_0^T \sigma(t) f[\sigma(t)] dt \leq \Phi_3(|x(0)|, |\xi(0)|).$$

Pe de altă parte,

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = c^* \frac{dx(t)}{dt} - \gamma \frac{d\xi(t)}{dt} = c^* (Ax(t) + bf[\sigma(t)]) - \gamma f[\sigma(t)],$$

$$\sigma(t) = c^* x(t) - \gamma \xi(t)$$

deci

$$|\sigma(t)| \leq \Phi_4(|x(0)|, |\xi(0)|),$$

deci

$$|f[\sigma(t)]| \leq \Phi_5(|x(0)|, |\xi(0)|)$$

deci

$$\left| \frac{d\sigma(t)}{dt} \right| \leq \Phi_6(|x(0)|, |\xi(0)|).$$

Rezultă  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$ . Într-adevăr, dacă n-ar fi așa, ar exista  $\delta > 0$  și un șir  $t_k \rightarrow \infty$  astfel ca  $|\sigma(t_k)| > \delta$ . Se poate alege un subșir astfel ca  $t_n - t_{n-1} > \frac{\delta}{\Phi_6}$ .

Fie  $T > 0$  dat,  $N(T)$  astfel ca  $n \leq N(T)$  să implice  $t_n \leq T - \frac{\delta}{2\Phi_6}$ .

Avem

$$\int_0^T \sigma(t) f(\sigma(t)) dt \geq \sum_{n=1}^{N(T)} \int_{t_n - \frac{\delta}{2\Phi_6}}^{t_n + \frac{\delta}{2\Phi_6}} \sigma(t) f[\sigma(t)] dt.$$

Dar

$$|\sigma(t) - \sigma(t_n)| = |\dot{\sigma}(\theta_n)| |t - t_n| \leq \Phi_6 |t - t_n| \leq \Phi_6 \frac{\delta}{2\Phi_6} = \frac{\delta}{2},$$

deci  $|\sigma(t)| \geq |\sigma(t_n)| - \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2}$ . Fie  $m = \inf_{\frac{\delta}{2} \leq \sigma \leq \Phi_4} f(\sigma)$ . Rezultă

$$\int_{t_n - \frac{\delta}{2\Phi_6}}^{t_n + \frac{\delta}{2\Phi_6}} \sigma(t) f[\sigma(t)] dt \geq \frac{\delta}{2} m \frac{\delta}{\Phi_6}$$

deci

$$\Phi_3 \geq \int_0^T \sigma(t) f[\sigma(t)] dt \geq N(T) \frac{\delta}{2} \frac{\delta}{\Phi_6} m. \text{ Dar } \lim_{T \rightarrow \infty} N(T) = \infty$$

ceea ce este contradictoriu. Prin urmare  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$ .

De aici rezultă  $\lim_{t \rightarrow \infty} f[\sigma(t)] = 0$ .



Avem însă

$$|x(t)| \leq K_1 e^{-K_0 t} |x(0)| + \int_0^t K_1 e^{-K_0(t-\tau)} |b| |f(\sigma(\tau))| d\tau.$$

Dar  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-K_0(t-\tau)} |b| |f(\sigma(\tau))| d\tau =$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t e^{K_0 \tau} |b| |f(\sigma(\tau))| d\tau}{e^{K_0 t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{K_0 t} |b| |f(\sigma(t))|}{K_0 e^{K_0 t}} = \frac{|b|}{K_0} \lim_{t \rightarrow \infty} |f(\sigma(t))| = 0$$

deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0.$$

Din

$$\xi(t) = \frac{1}{\gamma} c^* x(t) - \frac{1}{\gamma} \sigma(t)$$

rezultă acum

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$$

și teorema este demonstrată.

Pentru a vedea cât de puternic este acest rezultat al lui V. M. Popov vom arăta că dacă există o funcție Liapunov de forma considerată în paragraful precedent, condiția din teorema lui V. M. Popov e verificată.

TEOREMA 2. 3. Dacă există o funcție  $V$  de forma

$$V = (Hx, x) - 2\beta \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma \quad H < 0, \beta > 0$$

astfel încât pentru orice funcție  $f$  din clasa considerată derivata  $\frac{dV}{dt}$  în virtutea sistemului (5) este pozitiv definită, atunci există  $q > 0$  astfel încât

$$\operatorname{Re}(1 + i\omega q)G(i\omega) \geq 0.$$

*Demonstrație.* Alegem  $f(\sigma) = h\sigma$ ,  $\sigma > 0$ . Conform ipotezei, derivata în virtutea sistemului (5) a funcției  $V = (Hx, x) - h\beta\sigma^2$  trebuie să fie pozitiv definită. Această derivată este egală cu

$$(H(Ax + b h \sigma), x) + (Hx, Ax + b h \sigma) - 2\beta h \sigma (c^* Ax + c^* b h \sigma - \gamma h \sigma).$$

Fiind dată o formă pătratică cu matrice reală pozitiv definită  $(Wx, x)$ , dacă punem  $x = u + iv$  rezultă

$$(W\bar{x}, x) = (W(u - iv), u + iv) = (Wu - iWv, u + iv) = (Wu, u) + + i(Wu, v) - i(Wv, u) + (Wv, v) = (Wu, u) + (Wv, v) \geq 0,$$

egalitatea putînd avea loc numai pentru  $u = 0$ ,  $v = 0$ , deci numai pentru  $x = 0$ . (Subliniem că produsul scalar  $(u, v)$  înseamnă aici  $\sum u_i v_i$ ).

Deoarece  $\frac{dV}{dt}$  este o formă pătratică pozitiv definită, rezultă, pentru  $x$  și  $\sigma$  complecși,

$$(HA\bar{x} + Hbh\bar{\sigma}, x) + (H\bar{x}, Ax + bh\sigma) - \beta h\bar{\sigma}(c^*Ax + c^*bh\sigma - \gamma h\sigma) - \beta h\sigma(c^*A\bar{x} + c^*bh\bar{\sigma} - \gamma h\bar{\sigma}) > 0.$$

Fie

$$M(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} e^{At} b dt.$$

Avem

$$\begin{aligned} i\omega M(i\omega) &= \int_0^\infty i\omega e^{-i\omega t} e^{At} b dt = - \int_0^\infty e^{At} b \frac{d}{dt} e^{-i\omega t} dt = \\ &= - e^{At} b e^{-i\omega t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty A e^{At} b e^{-i\omega t} dt = b + AM(i\omega). \end{aligned}$$

Punem  $x = M(i\omega)$ ,  $\sigma = \frac{1}{h}$ ; obținem

$$(HA\bar{M}(i\omega) + Hb, M(i\omega)) + (H\bar{M}(i\omega), AM(i\omega) + b) - \beta(c^*AM(i\omega) + c^*b - \gamma) - \beta(c^*A\bar{M}(i\omega) + c^*b - \gamma) > 0.$$

Dar

$$AM(i\omega) + b = -i\omega \bar{M}(i\omega);$$

rezultă

$$\begin{aligned} -i\omega(H\bar{M}(i\omega), M(i\omega)) + i\omega(H\bar{M}(i\omega), M(i\omega)) - \beta(c^*i\omega M(i\omega) - \gamma) - \\ - \beta(c^*i\omega \bar{M}(i\omega) - \gamma) > 0 \end{aligned}$$

deci

$$\operatorname{Re}\{-\beta(c^*i\omega M(i\omega) - \gamma)\} > 0.$$

Să ne amintim că

$$\begin{aligned} N(i\omega) &= \int_0^\infty e^{-i\omega t} v(t) dt = - \int_0^\infty e^{-i\omega t} c^* e^{At} b dt = - c^* \int_0^\infty e^{-i\omega t} e^{At} b dt = \\ &= - c^* M(i\omega). \end{aligned}$$

Rezultă

$$\operatorname{Re} \beta(i\omega N(i\omega) + \gamma) > 0;$$

dar am notat

$$G(i\omega) = N(i\omega) + \frac{\gamma}{i\omega}$$

deci am ajuns la concluzia

$$\operatorname{Re} i\omega G(i\omega) > 0.$$

Avem

$$\operatorname{Re}(1 + i\omega q)G(i\omega) = \operatorname{Re} G(i\omega) + q \operatorname{Re} i\omega G(i\omega).$$

Pentru a demonstra că există  $q > 0$  astfel încît

$$\operatorname{Re}(1 + i\omega q)G(i\omega) > 0$$

rămîne deci de demonstrat că  $\operatorname{Re} G(i\omega)$  este mărginit.

Deoarece  $\frac{dV}{dt}$  e pozitivă pentru  $x=0$ ,  $\sigma = \frac{1}{h}$ , deducem

$$-\beta(c^*b - \gamma) > 0.$$

Pe de altă parte avem relația

$$i\omega G(i\omega) = i\omega N(i\omega) + \gamma = \int_0^\infty e^{-i\omega t} \frac{dv(t)}{dt} dt + \gamma + v(0).$$

Dar

$$v(t) = -c^* e^{At} b, \quad \frac{dv}{dt} = -Ac^* e^{At} b,$$

deci  $\frac{dv}{dt}$  tinde către zero exponențial.

Rezultă

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-i\omega t} \frac{dv(t)}{dt} dt = 0;$$

într-adevăr, integrînd prin părți avem

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-i\omega t} \frac{dv(t)}{dt} dt &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \frac{dv(t)}{dt} \Big|_0^\infty + \frac{1}{i\omega} \int_0^\infty e^{-i\omega t} \frac{d^2 v}{dt^2} dt = \\ &= \frac{1}{i\omega} + \frac{1}{i\omega} \int_0^\infty e^{-i\omega t} \frac{d^2 v}{dt^2} dt; \end{aligned}$$

integrala e mărginită și se vede că

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-i\omega t} \frac{dv}{dt} dt = 0;$$

Rezultă

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} i\omega G(i\omega) = \gamma + v(0) = \gamma - c^* b > 0,$$

deci

$$\operatorname{Re} i\omega G(i\omega) \geq N_1 > 0.$$

Tot de aici rezultă că  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} G(i\omega) = 0$ , deci  $G(i\omega)$  este mărginită.

Teorema este astfel demonstrată.

Teorema 2.3 arată că rezultatul lui V. M. Popov este mai puternic decît tot ce se poate obține cu ajutorul funcțiilor Liapunov (cu condiția ca numărul  $q$  să fie ales convenabil).

Să arătăm acum că și aplicarea lui în cazuri concrete revine la operații algebrice simple.

Elementele matricii  $e^{At}$  sînt de forma  $t^k e^{-\lambda t}$ , deci  $v(t)$  va fi o combinație liniară de asemenea elemente. Avem însă

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t} t^k e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty t^k e^{-(\lambda+i\omega)t} dt = -\frac{1}{\lambda+i\omega} e^{-(\lambda+i\omega)t} t^k \Big|_0^\infty + \\ + \frac{k}{\lambda+i\omega} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-(\lambda+i\omega)t} dt.$$

Prin ipoteză  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  deci

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t} t^k e^{-\lambda t} dt = \frac{k}{\lambda+i\omega} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-(\lambda+i\omega)t} dt.$$

Continuînd

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t} t^k e^{-\lambda t} dt = \frac{k!}{(\lambda+i\omega)^k}.$$

Rezultă de aici că  $N(i\omega)$  este o funcție rațională de  $i\omega$  deci  $G(i\omega)$  este o funcție rațională de  $i\omega$ , deci

$$(1+i\omega q)G(i\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} = \frac{P(i\omega)\bar{Q}(i\omega)}{|Q(i\omega)|^2}.$$

Condiția

$$\operatorname{Re}(1+i\omega q)G(i\omega) \geq 0$$

revine la

$$\operatorname{Re} P(i\omega)\bar{Q}(i\omega) \geq 0$$

sau

$$\operatorname{Re} P(i\omega)Q(-i\omega) \geq 0.$$

Partea reală a produsului dintre  $P(i\omega)Q(-i\omega)$  este un polinom în  $\omega^2$ , deci totul revine la a căuta condițiile ca un polinom  $R(x)$  să fie pozitiv pentru  $x \geq 0$ ; am notat  $x = \omega^2$ .

Să observăm că sistemele studiate se obțin din sistemele de forma

$$\frac{dy}{dt} = Ay + b\xi,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\sigma),$$

$$\sigma = c^*y - r\xi,$$

punînd  $\dot{y} = x$ . Într-adevăr, obținem

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bf(\sigma),$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\sigma),$$

$$\sigma = c^*A^{-1}x - [c^*A^{-1}b + r]\xi,$$

căci  $x = Ay + b\xi$ , deci  $y = A^{-1}x - A^{-1}b\xi$ .

Rezultă în definitiv sistemul (5) cu  $\gamma = r + cA^{-1}b$ .

Considerațiile făcute mai înainte arată că  $\gamma > 0$  este o condiție necesară pentru stabilitatea absolută. Să luăm  $A = \text{diag}(-\mu_i)$  și să vedem ce devine condiția din teorema 2.2. Avem

$$G = -[c^*A^{-1}(i\omega - A)^{-1}b] + \frac{r + c^*A^{-1}b}{i\omega}$$

$$c^*A^{-1}(i\omega E - A)^{-1}b = -\sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{\mu_i(\mu_i + \omega)}, \quad c^*A^{-1}b = -\sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{\mu_i}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{(1 + qi\omega)G\} &= \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{\mu_i} \left( q + \frac{\mu_i(1 - q\mu_i)}{\mu_i^2 + \omega^2} \right) + qr - q \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{\mu_i} = \\ &= q \left[ r - \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i \left( \mu_i - \frac{1}{q} \right)}{\mu_i^2 + \omega^2} \right]. \end{aligned}$$

Notînd

$$L(A, b, c) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{\mu_i}, \min_{q>0} \max_{\omega} \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i \left( \mu_i - \frac{1}{q} \right)}{\mu_i^2 + \omega^2} \right\}$$

condiția de stabilitate absolută se scrie  $r > L(A, b, c)$ .

Dacă

$$\min_{q>0} \max_{\omega} \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i \left( \mu_i - \frac{1}{q} \right)}{\mu_i^2 + \omega^2} > \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{\mu_i}$$

condiția de stabilitate absolută se scrie  $r \geq L(A, b, c)$ .

Din

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i \left( \mu_i - \frac{1}{q} \right)}{\mu_i^2 + \omega^2} = 0$$

rezultă  $L(A, b, c) \geq 0$ .

Ținînd seama de faptul că

$$\max_{\omega} \frac{b_i c_i \left( \mu_i - \frac{1}{q} \right)}{\mu_i^2 + \omega^2} = \frac{\varepsilon_i b_i c_i \left( \mu_i - \frac{1}{q} \right)}{\mu_i^2},$$

unde

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{dacă } b_i c_i \left( \mu_i - \frac{1}{q} \right) \leq 0, \\ 1 & \text{dacă } b_i c_i \left( \mu_i - \frac{1}{q} \right) > 0, \end{cases}$$

se regăsesc rezultatele din paragraful precedent.

Pentru matrici  $A$  de ordinul al doilea, T. Morozan a pus în evidență cazuri când

$$L(A, b, c) < \min_{q>0} \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i b_i c_i \left( \mu_i - \frac{1}{q} \right)}{\mu_i^2}.$$

Pentru a pune în evidență direcția în care trebuie continuat studiul, să observăm că sistemele studiate, de forma (5), sînt cazuri particulare ale sistemelor de forma

$$\frac{dz}{dt} = Az + af(\sigma), \quad \sigma = p^*z$$

corespunzînd situației în care  $A$  admite o valoare proprie nulă. Într-adevăr, atunci  $A$  poate fi adusă la forma canonică reală  $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și sistemul se scrie

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x + a_1 f(\sigma), \quad \frac{d\xi}{dt} = a_2 f(\sigma).$$

Dacă  $a_2 \neq 0$ , o nouă schimbare liniară de variabile conduce la forma (5).

Putem obține condiții de stabilitate și în cazul în care matricea  $A$  este hurwitziană; evident, acest caz este mai simplu decît cel tratat anterior. Vom considera stabilitatea absolută în clasa funcțiilor  $f$  cu proprietatea că  $h_1 \sigma^2 \leq \sigma f(\sigma) \leq h_2 \sigma^2$ ,  $h_2 < k$ , unde  $h_1$  și  $h_2$  depind de funcția  $f$ , dar  $k$  este același pentru întreaga clasă.

Fie  $z(t)$  o soluție oarecare a sistemului și  $u(t)$  soluția sistemului omogen

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = z(0).$$

Fie

$$\sigma(t) = p^*z(t)$$

și

$$f_T(t) = \begin{cases} f[\sigma(t)] & \text{pentru } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{pentru } T < t. \end{cases}$$

Notăm cu  $w(t)$  soluția sistemului liniar neomogen

$$\frac{dw}{dt} = Aw + af_T(t), \quad w(0) = 0. \quad (*)$$

Funcția  $w(t)$  este continuă și are derivata cu discontinuitate de prima speță pentru  $t = T$ .

Avem  $w(t) = z(t) - u(t)$  pentru  $0 \leq t \leq T$  căci diferența  $z(t) - u(t)$  satisface același sistem ca și  $w(t)$  și aceleași condiții inițiale.

Fie

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \int_0^T \left[ p^* w(t) - \frac{1}{k} f_T(t) + qc^* \frac{dw}{dt} \right] f_T(t) dt = \\ &= \int_0^T \left[ p^* w(t) - \frac{1}{k} f_T(t) + qc^* \frac{dw(t)}{dt} \right] f_T(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Re} \left\{ p^* \tilde{w} - \frac{1}{k} \tilde{f} + i \omega qc^* \tilde{w} \right\} \tilde{f}_T^* d\omega. \end{aligned}$$

Am notat aici cu  $\tilde{w}$  respectiv  $\tilde{f}_T$  transformatele Fourier ale funcțiilor  $w$  respectiv  $f_T$ .

Deoarece pentru  $t > T$  funcția  $w(t)$  verifică sistemul omogen, rezultă că  $w$  și  $\frac{dw}{dt}$  descrește exponențial, deci formula considerată din teoria transformatei Fourier se poate aplica. Din sistemul de ecuații  $(\cdot)$  pentru  $w$  rezultă, aplicînd transformata Fourier,

$$i \omega \tilde{w} = A \tilde{w} + a \tilde{f}_T, \quad \tilde{w} = -(A - i \omega E)^{-1} a \tilde{f}_T.$$

Notăm

$$M = (A - i \omega E)^{-1} a, \quad \mathcal{Q} = p^* M$$

Avem

$$\tilde{w} = -M \tilde{f}_T$$

și deci

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Re} \left\{ -p^* M \tilde{f}_T - \frac{1}{k} \tilde{f}_T - i \omega qp^* M \tilde{f}_T \right\} \tilde{f}_T^* d\omega = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Re} \left\{ \frac{1}{k} + (1 + i \omega q) \mathcal{Q} \right\} |f_T|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Presupunînd  $\frac{1}{k} + \mathcal{Re}(1 + i \omega q) \mathcal{Q} \geq 0$  deducem  $\chi(T) \leq 0$ .

Pe de altă parte,

$$\chi(T) = \int_0^T \left[ p^* z(t) - \frac{1}{k} f[\sigma(t)] + qp^* \frac{dz(t)}{dt} - p^* u(t) - qp^* \frac{du(t)}{dt} \right] f[\sigma(t)] dt.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[ \sigma(t) - \frac{1}{k} f[\sigma(t)] + q \frac{d\sigma(t)}{dt} \right] f[\sigma(t)] dt &\leq \\ &\leq \int_0^T \left[ p^* u(t) + q p^* \frac{du(t)}{dt} \right] f[\sigma(t)] dt. \end{aligned}$$

Din

$$h_1 \sigma^2 \leq \sigma f(\sigma) \leq h_2 \sigma^2, \quad h_2 < k$$

rezultă

$$\sigma \left( \sigma - \frac{1}{k} f(\sigma) \right) \geq \sigma^2 - \frac{h_2}{k} \sigma^2 = \frac{k - h_2}{k} \sigma^2$$

de unde

$$\begin{aligned} \sigma^2 f^2(\sigma) \left( \sigma - \frac{1}{k} f(\sigma) \right)^2 &\geq \left( \frac{k - h_2}{k} \right)^2 \sigma^4 f^2(\sigma) = \left( \frac{k - h_2}{k} \right)^2 \sigma^2 (\sigma f(\sigma))^2 \geq \\ &\geq \left( \frac{k - h_2}{k} \right)^2 \sigma^2 h_1 \sigma^4 \end{aligned}$$

deci

$$f(\sigma) \left( \sigma - \frac{1}{k} f(\sigma) \right) \geq \frac{k - h_2}{k} h_1 \sigma^2 = h_3 \sigma^2.$$

Rezultă

$$h_3 \int_0^T \sigma^2(t) dt + q \int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} f(\sigma) d\sigma \leq \int_0^T \left\{ p^* u(t) + q p^* \frac{du(t)}{dt} \right\} f[\sigma(t)] dt.$$

Notînd

$$F(\sigma) = \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma,$$

obţinem

$$h_3 \int_0^T \sigma^2(t) dt + q F[\sigma(T)] \leq q F[\sigma(0)] + \int_0^T \left[ p^* u(t) + q p^* \frac{du(t)}{dt} \right] f[\sigma(t)] dt.$$

Fie  $\sigma(T) > 0$ ; pentru  $0 < \sigma < \sigma(T)$  avem

$$\sigma f(\sigma) > \sigma^2 h_1,$$

deci

$$f(\sigma) > h_1 \sigma, \quad \int_0^{\sigma(T)} f(\sigma) d\sigma > \frac{h_1}{2} \sigma^2(T).$$

Dacă  $\sigma(T) < 0$ , pentru  $\sigma(T) < \sigma < 0$  avem

$$\sigma f(\sigma) > \sigma^2 h_1,$$



deci

$$f(\sigma) < h_1 \sigma, \quad \int_{\sigma(T)}^0 f(\sigma) d\sigma < h_1 \int_{\sigma(T)}^0 \sigma d\sigma = -\frac{h_1}{2} \sigma^2(T),$$

deci

$$\int_0^{\sigma(T)} f(\sigma) d\sigma > \frac{h_1}{2} \sigma^2(T).$$

Rezultă în toate cazurile  $F[\sigma(T)] > \frac{h_1}{2} \sigma^2(T)$ .

Putem scrie prin urmare inegalitatea

$$q \frac{h_1}{2} \sigma^2(T) + h_3 \int_0^T \sigma^2(t) dt \leq q F[\sigma(0)] + \\ + \int_0^T \left\{ p^* u(t) + q p^* \frac{du(t)}{dt} \right\} f[\sigma(t)] dt.$$

Avem

$$|u(t)| \leq \beta e^{-\alpha t} |x(0)|, \quad \left| \frac{du}{dt} \right| \leq \gamma e^{-\alpha t} |x(0)|.$$

Din  $\sigma f(\sigma) \leq h_2 \sigma^2$  rezultă  $|f(\sigma)| \leq h_2 |\sigma|$  deci

$$\left| \int_0^T \left[ p^* u(t) + q p^* \frac{du(t)}{dt} \right] f[\sigma(t)] dt \right| \leq L_1 \sup_{0 \leq t \leq T} |\sigma(t)| |x(0)| \int_0^T e^{-\alpha t} dt.$$

Ținând seama de aceasta rezultă în definitiv

$$q \frac{h_1}{2} \sigma^2(T) + h_3 \int_0^T \sigma^2(t) dt \leq q F[\sigma(0)] + L_2 |x(0)| \sup_{0 \leq t \leq T} |\sigma(t)|.$$

Din inegalitatea

$$q \frac{h_1}{2} \sigma^2(T) \leq q F[\sigma(0)] + L_2 |x(0)| \sup_{0 \leq t \leq T} |\sigma(t)|$$

deducem, ca în cazul tratat mai înainte,

$$|\sigma(t)| \leq \alpha_1 (|x(0)|)$$

și ținând seama de formula variației constantelor deducem și

$$|(x(t))| \leq \alpha_2 (|x(0)|).$$

De aici rezultă  $\left| \frac{d\sigma}{dt} \right| \leq \alpha_3 (|x(0)|)$  și cu aceleași raționamente ca în cazul anterior, din  $\int_0^T \sigma^2(t) dt \leq C$  rezultă  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$  și  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

Am demonstrat astfel :

**TEOREMA 2.4.** *Dacă matricea  $A$  e hurwitziană și dacă există  $q > 0$  astfel încât  $\frac{1}{k} + \operatorname{Re}(1 + i\omega q)p^*(A - i\omega E)^{-1}a \geq 0$ , atunci oricare ar fi funcția  $f$  cu proprietatea că există  $h_1$  și  $h_2 < k$  astfel ca  $h_1 \sigma^2 \leq \sigma f(\sigma) \leq h_2 \sigma^2$ , soluția banală a sistemului este asimptotic stabilă în mare.*

Prin urmare am considerat pînă acum cazul cînd matricea  $A$  este hurwitziană, precum și cazul cînd ea admite o valoare proprie nulă. De aceea este firesc să ne ocupăm acum de cazul cînd  $A$  are două valori proprii nule. Dacă acestor valori le corespund divizori elementari simpli, o transformare liniară de variabile aduce matricea  $A$  la forma  $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și sistemul devine

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x + a_1 f(\sigma), \quad \frac{d\xi}{dt} = a_2 f(\sigma), \quad \frac{d\eta}{dt} = a_3 f(\sigma).$$

Dacă unul din numerele  $a_2$  și  $a_3$  este nul, de exemplu dacă  $a_3 = 0$ , ultima ecuație devine

$$\frac{d\eta}{dt} = 0$$

și se vede că nu putem avea stabilitate asimptotică decît în raport cu mulțimea  $\eta = 0$ .

Dar în acest caz sistemul devine de forma studiată anterior, corespunzătoare unei rădăcini nule. Dacă  $a_2 = a_3 = 0$  nu putem avea stabilitate asimptotică decît în raport cu mulțimea  $\xi = 0, \eta = 0$  și ajungem la cazul de mai sus. Dacă  $a_2 a_3 \neq 0$ , luînd  $\zeta = \frac{1}{a_2} \xi - \frac{1}{a_3} \eta$  deducem  $\frac{d\zeta}{dt} = 0$

și din nou nu putem avea stabilitate asimptotică decît în raport cu mulțimea  $\zeta = 0$ ; ajungem astfel tot la cazul unei rădăcini nule.

În concluzie, cazul a două rădăcini nule cu divizori elementari simpli nu aduce nimic nou.

Dimpotrivă, cazul a două rădăcini nule, cu divizori elementari de ordinul al doilea prezintă un interes deosebit și a fost studiat pînă la capăt de V. M. Popov.

Trecem la prezentarea acestui caz. *Se presupune evident că rădăcinile nenule au părți reale negative.*

Fie

$$G(s) = -p^*(sE - A)^{-1}a.$$

Să observăm că funcția  $G$  este invariantă față de transformările liniare ale sistemului. Fie într-adevăr  $y = Dz$ .

Avem

$$\frac{dy}{dt} = D \frac{dz}{dt} = D A D^{-1} y + D a f(\sigma), \quad \sigma = p^* D^{-1} y$$

deci

$$\frac{dy}{dt} = D A D^{-1} y + D a f(\sigma).$$

Noua funcție

$$G_1(s) = -p^* D^{-1}(sE - DA D^{-1})Da = -p^*(sE - A)a$$

este deci egală cu  $G(s)$ .

Pentru calculul efectiv al funcției  $G$  este util să observăm că ea este soluția sistemului

$$s\tilde{z} = A\tilde{z} - a, \quad G(s) = p^*\tilde{z}.$$

TEOREMA 2.5. *Dacă*

$$\operatorname{Re} i\omega G(i\omega) \geq 0$$

pentru toți  $\omega \geq 0$  și

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \omega^2 G(i\omega) < 0,$$

soluția banală a sistemului este stabilă în mare oricare ar fi funcția  $f$  cu  $\sigma f(\sigma) > 0$  pentru  $\sigma \neq 0$ ,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \pm \infty} \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma = \infty.$$

*Dacă în plus avem*

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} i\omega G(i\omega) > 0,$$

atunci soluția banală este stabilă în mare oricare ar fi funcția  $f'$  cu  $\sigma f(\sigma) > 0$  pentru  $\sigma \neq 0$  și

$$\lim_{\sigma \rightarrow \pm \infty} \sup(|f(\sigma)| + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma) = \infty.$$

*Dacă*

$$\operatorname{Re} i\omega G(i\omega) > 0$$

și

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \omega^2 G(i\omega) < 0$$

și dacă soluția banală este stabilă în mare, atunci ea este asimptotic stabilă în mare.

*Prin urmare, dacă*

$$\operatorname{Re} i\omega G(i\omega) > 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} i\omega G(i\omega) > 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \omega^2 G(i\omega) < 0,$$

soluția banală este absolut stabilă pentru toate funcțiile  $f$  cu  $\sigma f(\sigma) > 0$  pentru  $\sigma \neq 0$ ,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \pm \infty} \sup(|f(\sigma)| + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma) = \infty.$$

*Dacă*

$$\operatorname{Re} i\omega G(i\omega) > 0 \text{ și } \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \omega^2 G(i\omega) < 0$$

atunci stabilitatea absolută are loc numai în clasa funcțiilor cu

$$\lim_{\sigma \rightarrow \pm \infty} \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma = \infty.$$

Pentru demonstrație observăm că deoarece condițiile sînt impuse numai funcției  $G$  și aceasta e invariantă, putem presupune sistemul adus la o formă canonică convenabilă.

Alegînd pe  $D$  astfel ca

$$DAD^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sistemul devine

$$\frac{dx}{dt} = Bx + bf(\sigma), \quad \frac{dy_{n-1}}{dt} = y_n + b_{n-1}f(\sigma), \quad \frac{dy_n}{dt} = b_n f(\sigma)$$

$$\sigma = q^* x + \tilde{p}_{n-1} y_{n-1} + \tilde{p}_n y_n.$$

Calculînd pe  $G(s)$  după procedeul indicat mai sus, găsim

$$G(s) = -q^* (sE - B)^{-1} b - \frac{\tilde{p}_n b_n + \tilde{p}_{n-1} b_{n-1}}{s} - \frac{\tilde{p}_{n-1} b_n}{s^2}.$$

Rezultă că

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \omega^2 G(i\omega) = \tilde{p}_{n-1} b_n,$$

deci apare condiția  $\tilde{p}_{n-1} b_n < 0$ .

În particular,  $b_n \neq 0$ . Putem deci efectua o nouă transformare

$$x = x, \quad \eta = \frac{1}{b_n^2} (b_n y_{n-1} - b_{n-1} y_n), \quad \xi = \frac{1}{b_n} y_n$$

și sistemul devine

$$\frac{dx}{dt} = Bx + bf(\sigma),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\sigma),$$

$$\sigma = q^* x - \alpha \xi - \beta \eta.$$

Deoarece  $G(s)$  este invariantă, este suficient să demonstrăm teorema pentru sistemele de această formă. Pentru asemenea sisteme avem

$$G(s) = -q^* (sE - B)^{-1} b + \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2}.$$

Condiția

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \omega^2 G(i\omega) < 0$$

se scrie acum

$$\beta > 0.$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(i\omega G(i\omega)) &= -\operatorname{Re} i\omega q^*(i\omega E - B)^{-1} b + \alpha = \\ &= -\operatorname{Re} q^*(i\omega E - B + B)(i\omega E - B)^{-1} b + \alpha = \\ &= -\operatorname{Re} q^* B (i\omega E - B)^{-1} b + \alpha - q^* b. \end{aligned}$$

Ținând seama de faptul că

$$\begin{aligned} q^* B (i\omega E - B)^{-1} b &= q^* B (-i\omega E - B) (-i\omega E - B)^{-1} (i\omega E - B)^{-1} b = \\ &= q^* B (-i\omega E - B) (\omega^2 E + B^2)^{-1} b, \end{aligned}$$

putem scrie

$$\operatorname{Re}(i\omega G(i\omega)) = q^* B^2 (\omega^2 E + B^2)^{-1} b + \alpha - q^* b.$$

Condiția

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(i\omega G(i\omega)) > 0$$

se scrie deci

$$\alpha - q^* b > 0.$$

Vom stabili acum o serie de leme care reduc succesiv problema la unele fapte mai simple.

LEMA 1. *Fie*

$$\rho = |x| + |\xi| + |\eta|, \rho_0 = |x_0| + |\xi_0| + |\eta_0|.$$

*Dacă pentru orice soluție a sistemului avem  $|\xi(t)| \leq \psi_1(\rho_0)$ , atunci avem pentru orice soluție și inegalitatea*

$$|x(t)| \leq \psi_2(\rho_0).$$

*Demonstrație.* Pe baza formulei variației constantelor

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{Bt} x_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)} b f[\sigma(\tau)] d\tau = e^{Bt} x_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)} b \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= e^{Bt} x_0 + b \xi(t) - e^{Bt} b \xi(0) + \int_0^t B e^{B(t-\tau)} b \xi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Deoarece  $B$  este hurwitziană, avem

$$|e^{Bt}| \leq K_1 e^{-K_0 t}, t \geq 0,$$

deci

$$|x(t)| \leq K_1 e^{-K_0 t} \rho_0 + |b| \psi_1(\rho_0) + K_1 |B| |b| \psi_1(\rho_0) \int_0^t e^{-K_0(t-\tau)} d\tau < \psi_2(\rho_0).$$

LEMA 2. Dacă  $\beta > 0$  și  $\lim_{\sigma \rightarrow \pm \infty} \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma = \infty$  și dacă pentru orice soluție avem

$$|\xi(t)| \leq \psi_1(\rho_0), \quad \int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma \leq \psi_3(\rho_0),$$

atunci pentru orice soluție avem

$$\rho(t) \leq \psi_9(\rho_0).$$

*Demonstrație.* Funcțiile

$$\psi_4(r) = \int_0^r f(\sigma) d\sigma, \quad \psi_5(r) = \int_0^{-r} f(\sigma) d\sigma$$

sînt monoton crescătoare și continue; fie

$$\psi_6(r) = \min \{ \psi_4(r), \psi_5(r) \}.$$

Din ipoteza lemei rezultă

$$\psi_6(|\sigma(t)|) \leq \psi_3(\rho_0)$$

deci

$$|\sigma(t)| \leq \psi_6^{-1}(\psi_3(\rho_0)) = \psi_7(\rho_0).$$

Din  $\sigma = q^* x - \alpha \xi - \beta \eta$  și  $\beta > 0$  rezultă

$$\begin{aligned} |\eta(t)| &= \frac{1}{\beta} |q^* x(t) - \alpha \xi(t) - \sigma(t)| \leq \frac{1}{\beta} |q| \psi_2(\rho_0) + \\ &+ \frac{|\alpha|}{\beta} \psi_1(\rho_0) + \frac{1}{\beta} \psi_7(\rho_0) = \psi_8(\rho_0). \end{aligned}$$

Din  $|\xi(t)| \leq \psi_1(\rho_0)$ ,  $|x(t)| \leq \psi_2(\rho_0)$ ,  $|\eta(t)| \leq \psi_8(\rho_0)$  rezultă  $\rho(t) \leq \psi_9(\rho_0)$  și lema e demonstrată.

LEMA 3. Dacă  $\beta > 0$ ,  $\alpha - q^* b > 0$ ,  $\lim_{\sigma \rightarrow \pm \infty} \sup (|f(\sigma)| + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma) = \infty$  și dacă pentru orice soluție avem  $|\xi(t)| \leq \psi_1(\rho_0)$ ,  $\int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma \leq \psi_3(\rho_0)$ , atunci pentru orice soluție avem  $\rho(t) \leq \psi_9(\rho_0)$ .

*Demonstrație.* Pentru toți  $t$  pentru care

$$|\sigma(t)| \leq (|q| + |\alpha| + |\beta|) \rho_0$$

are loc și inegalitatea

$$|f(\sigma(t))| \leq \sup_{|\mu| \leq (|q| + |\alpha| + |\beta|) \rho_0} |f(\mu)|.$$

Arătăm că pentru toți  $t$  pentru care

$$|\sigma(t)| > (|q| + |\alpha| + |\beta|) \rho_0$$

are loc inegalitatea

$$|f(\sigma(t))| \leq \psi_{10}(\rho_0),$$

unde

$$\psi_{10}(\rho_0) = \frac{|q||B|\psi_2(\rho_0) + |\beta|\psi_1(\rho_0)}{\alpha - q^*b}.$$

Avem

$$|\sigma(0)| = |q^*x_0 - \alpha\xi_0 - \beta\eta_0| \leq (|q| + |\alpha| + |\beta|)\rho_0;$$

dacă există  $t_1 > 0$  astfel ca

$$|\sigma(t_1)| > (|q| + |\alpha| + |\beta|)\rho_0,$$

atunci există  $t_2$  cu  $0 < t_2 \leq t_1$  astfel ca

$$\sigma(t_2) = \sigma(t_1), \quad \frac{d\sigma^2(t_2)}{dt} \geq 0.$$

Punctul  $t_2$  este marginea inferioară a mulțimii punctelor din  $[0, t_1]$  în care  $\sigma(t_2) = \sigma(t_1)$ ; dacă în punctul  $t_2$  avem  $\frac{d\sigma^2(t_2)}{dt} < 0$ , atunci există

$0 < t_3 < t_2$  cu  $\sigma^2(t_3) < \sigma^2(t_2)$  și cum  $\sigma^2(0) < \sigma^2(t_2)$  există  $0 < t_4 < t_3$  cu  $\sigma(t_4) = \sigma(t_2)$ , ceea ce contrazice faptul că  $t_2$  este margine inferioară. Existența lui  $t_4$  rezultă din faptul că  $\sigma(t)$  este continuă, deci admite proprietatea lui Darboux. Avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2(t_2)}{dt} &= \sigma(t_2) \frac{d\sigma(t_2)}{dt} = \sigma(t_2) \left[ q^* \frac{dx(t_2)}{dt} - \alpha \frac{d\xi(t_2)}{dt} - \beta \frac{d\eta(t_2)}{dt} \right] = \\ &= \sigma(t_2) [q^* Bx(t_2) + q^* bf[\sigma(t_2)] - \alpha f[\sigma(t_2)] - \beta \xi(t_2)], \end{aligned}$$

deci

$$\frac{1}{2} \frac{d\sigma^2(t_2)}{dt} \leq -(\alpha - q^*b)\sigma(t_2)f[\sigma(t_2)] + (|q||B|\psi_2(\rho_0) + |\beta|\psi_1(\rho_0))|\sigma(t_2)|.$$

Dar

$$\sigma(t_2)f[\sigma(t_2)] > 0,$$

deci

$$\sigma(t_2)f[\sigma(t_2)] = |\sigma(t_2)||f[\sigma(t_2)]|,$$

deci

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2(t_2)}{dt} &\leq |\sigma(t_2)| \{ -(\alpha - q^*b)|f[\sigma(t_2)]| + |q||B|\psi_2(\rho_0) + |\beta|\psi_1(\rho_0) \} = \\ &= |\sigma(t_2)| [ -(\alpha - q^*b)|f[\sigma(t_2)]| + |q||B|\psi_2(\rho_0) + |\beta|\psi_1(\rho_0) ] = \\ &= |\sigma(t_1)| [ -(\alpha - q^*b)|f[\sigma(t_1)]| + |q||B|\psi_2(\rho_0) + |\beta|\psi_1(\rho_0) ]. \end{aligned}$$

Din

$$\frac{d\sigma^2(t_2)}{dt} \geq 0$$

rezultă

$$-(\alpha - q^* b) |f[\sigma(t_1)]| + |q| B |\psi_2(\rho_0) + |\beta| \psi_1(\rho_0)| > 0$$

deci

$$|f[\sigma(t_1)]| < \frac{|q| B |\psi_2(\rho_0) + |\beta| \psi_1(\rho_0)|}{\alpha - q^* b} = \psi_{10}(\rho_0).$$

Am demonstrat astfel afirmația făcută mai sus. De aici rezultă

$$\sup_{\mu \in [0, \sigma(t)]} |f(\mu)| \leq \max_{|\mu| \leq (|q| + |\alpha| + |\beta|) \rho_0} (\sup |f(\mu)|, \psi_{10}(\rho_0)),$$

unde am notat  $[0, \sigma(t)]$  segmentul cu extremitățile 0 și  $\sigma(t)$  chiar dacă  $\sigma(t) < 0$ . Într-adevăr, dacă  $|\sigma(t)| \leq (|q| + |\alpha| + |\beta|) \rho_0$  avem  $|\mu| \leq (|q| + |\alpha| + |\beta|) \rho_0$  și  $\sup_{\mu \in [0, \sigma(t)]} |f(\mu)| \leq \sup_{|\mu| \leq (|q| + |\alpha| + |\beta|) \rho_0} |f(\mu)|$ . Dacă  $|\sigma(t)| > (|q| + |\alpha| + |\beta|) \rho_0$ , cum  $|\sigma(0)| \leq (|q| + |\alpha| + |\beta|) \rho_0$  pentru orice  $\mu$  cu  $|\mu| > (|q| + |\alpha| + |\beta|) \rho_0$  și  $\mu \in [0, \sigma(t)]$  există  $t_1 \in [0, t]$  cu  $\mu = \sigma(t_1)$ , deci  $|f(\mu)| \leq \psi_{10}(\rho_0)$ .

Din inegalitatea stabilită rezultă că

$$\int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma + \sup_{\mu \in [0, \sigma(t)]} |f(\mu)| \leq \psi_{11}(\rho_0).$$

Fie

$$\psi_{12}(r) = \int_0^r f(\sigma) d\sigma + \sup_{0 \leq \mu \leq r} |f(\mu)|, \quad \psi_{13}(r) = \int_0^{-r} f(\sigma) d\sigma + \sup_{-r \leq \mu \leq 0} |f(\mu)|$$

Avem

$$\int_0^{\sigma} f(\sigma) d\sigma + \sup_{\mu \in [0, \sigma]} |f(\mu)| \geq \min \{ \psi_{12}(|\sigma|), \psi_{13}(|\sigma|) \} = \psi_{14}(|\sigma|),$$

deci

$$\psi_{14}(|\sigma(t)|) \leq \psi_{11}(\rho_0),$$

de unde

$$|\sigma(t)| \leq \psi_{15}(\rho_0).$$

Mai departe, demonstrația continuă ca în lema 2.

Ținând seama de lemele demonstrate, prima parte a teoremei se reduce la obținerea evaluărilor  $|\xi(t)| \leq \psi_1(\rho_0)$  și  $\int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma \leq \psi_3(\rho_0)$ .

Pentru obținerea acestor evaluări se folosește transformata Fourier.

Fie

$$f_T(t) = \begin{cases} f[\sigma(t)] & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases},$$

$$\lambda_T(t) = \int_0^t q^* B e^{B(t-\tau)} b f_T(\tau) d\tau + (q^* b - \alpha) f_T(t).$$



Ca de obicei

$$\tilde{f}_T = \int_0^\infty e^{-i\omega t} f_T(t) dt = \int_0^T e^{-i\omega t} f[\sigma(t)] dt.$$

Deoarece  $B$  este hurwitziană, există transformata Fourier a funcției  $q^* B e^{Bt} b$  și această transformată este egală cu  $q^* B (i\omega E - B)^{-1} b$ .

Pe baza teoremei asupra produsului de compoziție avem

$$\tilde{\lambda}_T = q^* B (i\omega E - B)^{-1} b \tilde{f}_T + (q^* b - \alpha) \tilde{f}_T.$$

Fie

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \int_0^T \lambda_T(t) f_T(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{\lambda}_T \tilde{f}_T^* d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \operatorname{Re} \{ q^* B (i\omega E - B)^{-1} b + q^* b - \alpha \} |\tilde{f}_T|^2 d\omega = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \operatorname{Re} (i\omega G(i\omega)) |\tilde{f}_T|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Condiția  $\operatorname{Re} (i\omega G(i\omega)) \geq 0$  conduce la  $\mu(T) \leq 0$ .

Avem

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(t)}{dt} &= q^* B e^{Bt} x_0 + (q^* b - \alpha) f[\sigma(t)] - \beta \xi(t) + \\ &\int_0^t q^* B e^{B(t-\tau)} b f[\sigma(\tau)] d\tau = q^* B e^{Bt} x_0 - \beta \xi(t) + \lambda_T(t) \end{aligned}$$

pentru  $0 \leq t \leq T$ .

Rezultă

$$\mu(T) = \int_0^T \left( \frac{d\sigma(t)}{dt} - q^* B e^{Bt} x_0 + \beta \xi(t) \right) f[\sigma(t)] dt \leq 0.$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d\sigma(t)}{dt} f[\sigma(t)] dt &= \int_0^{\sigma(T)} f(\sigma) d\sigma - \int_0^{\sigma(0)} f(\sigma) d\sigma, \\ \int_0^T \beta \xi(t) f[\sigma(t)] dt &= \beta \int_0^T \xi(t) \frac{d\xi(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} \beta [\xi^2(T) - \xi^2(0)], \\ - \int_0^T q^* B e^{Bt} x_0 f[\sigma(t)] dt &= - \int_0^T q^* B e^{Bt} x_0 \frac{d\xi(t)}{dt} dt = - q^* B e^{BT} x_0 \xi(T) + \\ &+ q^* B x_0 \xi(0) + \int_0^T q^* B^2 e^{Bt} x_0 \xi(t) dt \geq -2|q||B|K_1|x_0| \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| - \\ &- K_1|q||B|^2|x_0| \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| \int_0^T e^{-K_1 t} dt \geq -K_2|x_0| \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)|. \end{aligned}$$

Rezultă astfel

$$\int_0^{\sigma(T)} f(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \beta \xi^2(T) - K_2 \rho_0 \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| - \int_0^{\sigma(0)} f(\sigma) d\sigma - \\ - \frac{1}{2} \beta \rho_0^2 \leq \mu(T) \leq 0.$$

Fie

$$\psi_{16}(r) = \max(\psi_4(r), \psi_5(r)).$$

Avem

$$\int_0^{\sigma(0)} f(\sigma) d\sigma \leq \psi_{16}(|\sigma(0)|) \leq \psi_{16}(|q| + |\alpha| + |\beta|) \rho_0 = \psi_{17}(\rho_0).$$

Rezultă

$$\int_0^{\sigma(T)} f(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \beta \xi^2(T) - K_2 \rho_0 \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| - \psi_{18}(\rho_0) \leq \mu(T) \leq 0.$$

Cum  $\int_0^{\sigma(T)} f(\sigma) d\sigma \geq 0$  și  $\frac{1}{2} \beta > 0$ , rezultă inegalitatea

$$\xi^2(T) - 2 K_3 \rho_0 \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| \leq \frac{2}{\beta} \psi_{18}(\rho_0) = \psi_{19}(\rho_0).$$

De aici, prin procedeul care a mai fost folosit, rezultă  $|\xi(t)| \leq \psi_1(\rho_0)$  pentru toți  $t \geq 0$ .

Ținând seama de evaluarea obținută pentru  $\xi(t)$  se deduce imediat din inegalitatea fundamentală

$$\int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma \leq K_2 \rho_0 \psi_{20}(\rho_0) + \psi_{18}(\rho_0) = \psi_3(\rho_0).$$

Cu aceasta prima parte a teoremei este demonstrată.

Demonstrația ultimei afirmații relativă la stabilitatea asimptotică necesită unele pregătiri.

LEMA 4. Fie  $\gamma(t)$  definită pentru  $t > 0$  cu derivate pînă la ordinul  $l_1$  și astfel ca  $\left| \frac{d^l \gamma(t)}{dt^l} \right| < K$  pentru  $t > 0, l=1, 2, \dots, l_1$ . Presupunem că  $\frac{d^{l_1} \gamma(t)}{dt^{l_1}}$  este uniform continuă pe semiaxa  $t > 0$ . Dacă există  $1 \leq l_0 \leq l_1$  astfel ca  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^{l_0} \gamma(t)}{dt^{l_0}} = 0$ , atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^l \gamma(t)}{dt^l} = 0$  pentru  $l = 2, 3, \dots, l_1$ .

Demonstrație. Presupunem prin absurd că afirmația lemei nu e adevărată pentru derivata de ordinul  $j, 2 \leq j \leq l_1$ . Atunci există  $\Delta > 0$  și un șir  $t_k$  astfel ca  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ . Din ipotezele teoremei rezultă că toate derivatele

sînt uniform continue pe semi-axa  $t > 0$ . De aceea se poate găsi un şir  $t^k$  astfel încît  $\left| \frac{d^j \gamma(t)}{dt^j} \right| \geq \frac{\Delta}{2}$  pentru  $t \in [t_k, t^k]$ . Deducem

$$2K \geq \left| \frac{d^{j-1} \gamma(t^k)}{dt^{j-1}} - \frac{d^{j-1} \gamma(t_k)}{dt^{j-1}} \right| = \left| \int_{t_k}^{t^k} \frac{d^j \gamma(t)}{dt^j} dt \right| \geq \frac{\Delta}{2} |t^k - t_k|$$

căci dacă  $\left| \frac{d^j \gamma(t)}{dt^j} \right| \geq \frac{\Delta}{2}$  pe  $[t_k, t^k]$ , atunci  $\frac{d^j \gamma}{dt^j}$  păstrează semnul pe acest segment (orice derivată are proprietatea lui Darboux).

Rezultă  $|t^k - t_k| \leq \frac{4K}{\Delta}$ . Deducem de aici că putem alege pe  $t^k$  astfel

ca  $\left| \frac{d^j \gamma(t^k)}{dt^j} \right| = \frac{\Delta}{2}$ ; într-adevăr, nu putem avea pe  $\left[ t_k - \frac{4K}{\Delta}, t_k + \frac{4K}{\Delta} \right]$

inegalitatea strictă  $\left| \frac{d^j \gamma(t)}{dt^j} \right| > \frac{\Delta}{2}$  căci ar rezulta  $2K > \frac{\Delta}{2} \frac{4K}{\Delta}$  ceea ce este contradictoriu. Prin urmare pe acest interval există puncte în care  $\left| \frac{d^j \gamma(t)}{dt^j} \right| \leq \frac{\Delta}{2}$ , deci putem alege pe  $t^k$  cu proprietăţile  $|t^k - t_k| \leq \frac{4K}{\Delta}$ ,

$\left| \frac{d^j \gamma(t^k)}{dt^j} \right| = \frac{\Delta}{2}$ ,  $\left| \frac{d^j \gamma(t)}{dt^j} \right| \geq \frac{\Delta}{2}$  pentru  $t \in [t_k, t^k]$ . Din continuitatea uni-

formă rezultă că există  $\delta > 0$  astfel ca  $|t - t_k| < \delta$  să implice  $\left| \frac{d^j \gamma(t)}{dt^j} - \frac{d^j \gamma(t_k)}{dt^j} \right| < \frac{\Delta}{2}$ ; de aici rezultă  $t^k - t_k \geq \delta$ , deci  $\left| \frac{d^{j-1} \gamma(t^k)}{dt^{j-1}} - \frac{d^{j-1} \gamma(t_k)}{dt^{j-1}} \right| \geq \frac{\Delta}{2} \delta$ , ceea ce arată că  $\frac{d^{j-1} \gamma}{dt^{j-1}}$  nu poate avea limita zero pentru  $t \rightarrow \infty$ .

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{2} &\leq \left| \frac{d^j \gamma(t^k)}{dt^j} - \frac{d^j \gamma(t_k)}{dt^j} \right| = \left| \int_{t_k}^{t^k} \frac{d^{j+1} \gamma(t)}{dt^{j+1}} dt \right| \leq |t^k - t_k| \sup_{t \in [t_k, t^k]} \left| \frac{d^{j+1} \gamma(t)}{dt^{j+1}} \right| \leq \\ &\leq \frac{4K}{\Delta} \sup \left| \frac{d^{j+1} \gamma}{dt^{j+1}} \right| \end{aligned}$$

deci

$$\sup_{t \in [t_k, t^k]} \left| \frac{d^{j+1} \gamma}{dt^{j+1}} \right| \geq \frac{\Delta^2}{8K}.$$

Rezultă că dacă afirmaţia lemei nu e adevărată pentru derivata de ordinul  $j$ , ea nu este adevărată nici pentru cea de ordinul  $j+1$ , nici pentru cea de ordinul  $j-1$ , ceea ce conduce la o contradicţie faţă de ipoteza din enunţ.

LEMA 5. Dacă pentru toate soluțiile  $\rho(t) \leq \psi_9(\rho_0)$  și  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ , atunci soluția banală e asimptotic stabilă în mare.

*Demonstrație.* Avem

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{Bt} x_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)} b f[\sigma(\tau)] d\tau = e^{Bt} x_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)} b \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= e^{Bt} (x_0 - b \xi_0) + b \xi(t) + \int_0^t B e^{B(t-\tau)} b \xi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Cum

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Bt} = 0,$$

de aici rezultă imediat că  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$  implică  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

Pe de altă parte,

$$\frac{d\sigma}{dt} = q^* B x(t) + (q^* b - \alpha) f[\sigma(t)] - \beta \xi(t).$$

Din ipoteza

$$\rho(t) \leq \psi_9(\rho_0),$$

rezultă

$$|x(t)| \leq \psi_9(\rho_0), \quad |\xi(t)| \leq \psi_9(\rho_0), \quad |\eta(t)| \leq \psi_9(\rho_0),$$

deci

$$|\sigma(t)| \leq (|q| + |\alpha| + |\beta|) \psi_9(\rho_0), \quad |f[\sigma(t)]| \leq \psi_{20}(\rho_0)$$

și

$$\left| \frac{d\sigma}{dt} \right| \leq \psi_{21}(\rho_0).$$

Rezultă că  $\sigma(t)$  e uniform continuă pe semiaxa  $t > 0$ , deci  $f[\sigma(t)]$  e uniform continuă. Aplicăm lema 4 cu

$$\frac{d\gamma}{dt} = \xi(t), \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = f[\sigma(t)].$$

Avem  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\gamma}{dt} = 0$  și din lema 4 deducem  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$ , deci  $\lim_{t \rightarrow \infty} f[\sigma(t)] = 0$ . Deoarece  $|\sigma(t)| \leq (|q| + |\alpha| + |\beta|) \psi_9(\rho_0)$ , de aici se deduce că  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$ . Din  $\sigma(t) = q^* x(t) - \alpha \xi(t) - \beta \eta(t)$  și  $\beta > 0$  rezultă acum  $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$  și în definitiv e demonstrat că  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$ .

În acest mod demonstrarea completă a teoremei s-a redus la demonstrarea faptului că în condițiile din enunț avem  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ . Pentru aceasta este nevoie de încă o leamnă.

LEMA 6. Dacă  $\operatorname{Re} i\omega G(i\omega) > 0$  pentru toți  $\omega > 0$ , există

$$H(s) = \gamma_0 \frac{s^{m_0}}{s^k + a_1 s^{k-1} + \dots + a_{k-1} s + a_k}, \quad 0 \leq m_0 \leq k, \quad a_k \neq 0, \quad \gamma_0 \neq 0$$

cu proprietățile:

1° Rădăcinile ecuației  $s^k + a_1 s^{k-1} + \dots + a_{k-1} s + a_k = 0$  au părți reale negative.

2°  $\operatorname{Re}(i\omega G(i\omega) - |H(i\omega)|^2) \geq 0$  pentru toți  $\omega$  reali.

Demonstrație. Avem, după calculul făcut mai sus,

$$\operatorname{Re}(i\omega G(i\omega)) = q^* B^2 (\omega^2 E + B^2)^{-1} b + \alpha - q^* b = \frac{\sum_{j=m_0}^{m_1} b_j \omega^{2j}}{\sum_{j=0}^{m_2} c_j \omega^{2j}},$$

$$0 \leq m_0 \leq m_1 \leq m_2, \quad b_{m_0} \neq 0, \quad b_{m_1} \neq 0, \quad c_0 \neq 0, \quad c_{m_2} \neq 0.$$

Fie  $k = m_2 + m_0 - m_1$ . Considerăm un polinom arbitrar de forma  $s^k + a_1 s^{k-1} + \dots + a_{k-1} s + a_k$  ale cărei rădăcini au părți reale negative. Funcția

$$J(\omega^2) = \frac{1}{\operatorname{Re}(i\omega G(i\omega))} \left| \frac{(i\omega)^{m_0}}{(i\omega)^k + a_1 (i\omega)^{k-1} + \dots + a_{k-1} (i\omega) + a_k} \right|^2$$

este continuă și

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} J(\omega^2) = \frac{c_0}{b_{m_0} a_k^2}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} J(\omega^2) = \frac{c_{m_2}}{b_{m_1}}.$$

Există deci  $\gamma_0 \neq 0$  astfel încît  $J(\omega^2) < \frac{1}{\gamma_0^2}$  pentru toți  $\omega^2 > 0$  reali deci  $1 - \gamma_0^2 J(\omega^2) > 0$ . Înmulțind eu  $\operatorname{Re}(i\omega G(i\omega))$  rezultă

$$\operatorname{Re}(i\omega G(i\omega)) - \gamma_0^2 \left| \frac{(i\omega)^{m_0}}{(i\omega)^k + a_1 (i\omega)^{k-1} + \dots + a_{k-1} (i\omega) + a_k} \right|^2 > 0.$$

Observăm că deoarece polinomul  $s^k + a_1 s^{k-1} + \dots + a_{k-1} s + a_k$  este hurwitzian numerele  $a_j$  sînt toate pozitive.

Să facem de asemenea observația că dacă  $m_0 = 0$ ,  $m_1 = m_2$ , rezultă  $k=0$  și polinomul se reduce la o constantă; enunțul lemei revine la faptul că în acest caz  $\operatorname{Re}(i\omega G(i\omega))$  este mai mare decît o constantă pozitivă. Într-adevăr, cazul  $m_0 = 0$ ,  $m_1 = m_2$  se poate ivi dacă și numai dacă

$$\alpha = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}(i\omega G(i\omega)) > 0, \quad \alpha - q^* b = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(i\omega G(i\omega)) > 0.$$

Aceste inegalități, împreună cu  $\operatorname{Re}(i\omega G(i\omega)) > 0$  pentru toți  $\omega > 0$ , implică tocmai existența unei constante pozitive care mărginește inferior pe  $\operatorname{Re}(i\omega G(i\omega))$ . În acest caz faptul că  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$  rezultă imediat.

Avem

$$\begin{aligned} \mu(T) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(i\omega G(i\omega)) |\tilde{f}_T|^2 d\omega \leq -\frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}_T|^2 d\omega = \\ &= -\gamma \int_0^T f_T^2 dt = -\gamma \int_0^T f^2[\sigma(t)] dt. \end{aligned}$$

Deci, ținând seama de expresia lui  $\mu(T)$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\sigma^{(0)}} f(\sigma) d\sigma - \int_0^{\sigma^{(0)}} f(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \beta \xi^2(T) - K_2 \rho_0 \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi(t)| - \frac{1}{2} \beta \xi_0^2 \leq \\ \leq -\gamma \int_0^T f^2[\sigma(t)] dt \end{aligned}$$

Dar prin ipoteză  $\rho(t) \leq \psi_0(\rho_0)$ ; rezultă

$$\gamma \int_0^T f^2[\sigma(t)] dt \leq \psi_{21}(\rho_0),$$

deci

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f^2[\sigma(t)] dt = L < \infty.$$

Notînd

$$\frac{d\gamma}{dt} = \int_0^t f^2[\sigma(\tau)] d\tau - L,$$

rezultă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\gamma}{dt} = 0.$$

Pe baza lemei 4 deducem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} f^2[\sigma(t)] = 0,$$

deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f[\sigma(t)] = 0.$$

Dar

$$f[\sigma(t)] = \frac{d\xi(t)}{dt},$$

deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\xi(t)}{dt} = 0.$$

Din

$$x(t) = e^{Bt} x_0 + \int_0^t e^{B(t-\tau)} b f[\sigma(\tau)] d\tau$$

rezultă acum și  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

Din

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f[\sigma(t)] = 0 \quad \text{și} \quad |\sigma(t)| \leq \psi_9(\rho_0)$$

rezultă însă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0.$$

Cum

$$\sigma(t) = q^* x(t) - \alpha \xi(t) - \beta \eta(t)$$

rezultă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\alpha \xi(t) + \beta \eta(t)] = 0,$$

deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \beta \eta(t) + \alpha \frac{d\eta(t)}{dt} \right] = 0.$$

Să scriem

$$\alpha \frac{d\eta(t)}{dt} + \beta \eta(t) = \zeta(t).$$

Deoarece avem prin ipoteză  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , deducem

$$\eta(t) = e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} \eta_0 + \int_0^t e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)} \zeta(\tau) d\tau.$$

Ținând seama de faptul că  $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = 0$ , rezultă imediat că  $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$  (de exemplu aplicând regula lui Hôpital).

Dar dacă avem și  $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$ , atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$  și demonstrația e terminată.

Lemele 5 și 6 sînt necesare tocmai în cazul cînd  $\alpha = 0$  sau  $\alpha - q^*b = 0$  și deci  $k \geq 1$ .

Fie mai întîi  $k = 1$ . Atunci polinomul din lema 6 se reduce la  $s + a_1$ . Fie  $y_1$  definită de sistemul

$$\frac{dy_1}{dt} = -a_1 y_1 + \eta(t), \quad y_1(0) = -\frac{1}{a_1^2} \xi_0 + \frac{1}{a_1} \eta_0,$$

$$y_2(t) = \frac{dy_1}{dt} = -a_1 y_1 + \eta(t),$$

$$y_3(t) = \frac{dy_2}{dt} = -a_1 \frac{dy_1}{dt} + \xi(t) = -a_1 y_2(t) + \xi(t),$$

$$y_4(t) = \frac{dy_3}{dt} = -a_1 \frac{dy_2}{dt} + f[\sigma(t)] = -a_1 y_3(t) + f[\sigma(t)].$$

Fie  $u_1$  definită de

$$\frac{d u_1}{d t} = -a_1 u_1 + f_T(t), \quad u_1(0) = 0,$$

$$u_2 = -a_1 u_1 + f_T(t).$$

Observăm că din felul cum a fost ales  $y_1(0)$  rezultă

$$y_2(0) = -a_1 y_1(0) + \eta_0 = \frac{1}{a_1} \xi_0 - \eta_0 + \eta_0 = \frac{1}{a_1} \xi_0$$

$$y_3(0) = -a_1 y_2(0) + \xi_0 = -\xi_0 + \xi_0 = 0$$

și cum pe  $[0, T]$   $y_3$  și  $u_1$  verifică aceeași ecuație diferențială, rezultă  $u_1(t) = y_3(t)$ ,  $u_2(t) = y_4(t)$  pe  $[0, T]$ .

Deoarece  $f_T(t) \equiv 0$  pentru  $t > T$ , rezultă că pentru  $t > T$  avem

$$|u_1(t)| \leq K' e^{-a_1 t}, \quad |u_2(t)| \leq K' e^{-a_1 t}.$$

Aplicăm transformata Fourier și obținem

$$i\omega \tilde{u}_1 = -a_1 \tilde{u}_1 + \tilde{f}_T, \quad \tilde{u}_1 = \frac{1}{i\omega + a_1} \tilde{f}_T,$$

$$\tilde{u}_2 = -a_1 \tilde{u}_1 + \tilde{f}_T = -\frac{a_1}{i\omega + a_1} \tilde{f}_T + \tilde{f}_T = \frac{i\omega}{i\omega + a_1} \tilde{f}_T.$$

Dacă  $m_0 = 0$  avem  $\gamma_0 \tilde{u}_1 = H(i\omega) \tilde{f}_T$ , iar dacă  $m_0 = 1$  avem  $\gamma_0 \tilde{u}_2 = H(i\omega) \tilde{f}_T$ ; prin urmare  $\gamma_0 \tilde{u}_{m_0+1} = H(i\omega) \tilde{f}_T$ .

Fie

$$\tilde{\mu}(T) = \gamma_0^2 \int_0^\infty u_{m_0+1}^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \gamma_0^2 |\tilde{u}_{m_0+1}|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |H(i\omega)|^2 |\tilde{f}_T|^2 d\omega.$$

Avem

$$\mu(T) + \tilde{\mu}(T) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [\operatorname{Re}(i\omega G(i\omega)) - |H(i\omega)|^2] |\tilde{f}_T|^2 d\omega \leq 0.$$

Dar

$$\mu(T) \geq -\psi_{22}(\rho_0),$$

deci

$$\tilde{\mu}(T) \leq \psi_{22}(\rho_0),$$

adică

$$\gamma_0^2 \int_0^\infty u_{m_0+1}^2 dt < \psi_{22}(\rho_0)$$

sau

$$\gamma_0^2 \int_0^\infty y_{m_0+3}^2 dt < \psi_{22}(\rho_0).$$



Fie

$$L = \int_0^\infty y_{m_0+3}^2 dt, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \int_0^t y_{m_0+3}^2 dt - L;$$

din  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\gamma}{dt} = 0$  deducem aplicînd lema 4, că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$$

deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{m_0+3}^2 = 0,$$

adică

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{m_0+3} = 0.$$

Aplicăm din nou lema 4 cu  $\frac{d^l\gamma}{dt^l} = y^l$

$$l = 1, 2, 3, 4, \quad l_0 = m_0 + 3.$$

Rezultă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_4(t) = 0$$

Dar din

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$$

rezultă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$$

și demonstrația este terminată.

Cazul  $k \geq 2$  se tratează la fel. Fie  $y_j$  definite de sistemul

$$\frac{dy_j}{dt} = y_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \quad \frac{dy_k}{dt} = - \sum_{j=1}^k a_j y_{k-j+1} + \eta(t)$$

$$y_1(0) = -\frac{a_{k-1}}{a_k^2} \xi_0 + \frac{1}{a_k} \eta_0, \quad y_2(0) = \frac{1}{a_k} \xi_0, \quad y_j(0) = 0, \quad j = 3, \dots, k.$$

Introducem funcțiile

$$y_{k+1}(t) = \frac{dy_k(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^k a_j y_{k-j+1} + \eta(t),$$

$$\begin{aligned} y_{k+2}(t) &= \frac{dy_{k+1}(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^k a_j \frac{dy_{k-j+1}}{dt} + \xi(t) = \\ &= - \sum_{j=1}^k a_j y_{k-j+2} + \xi(t), \end{aligned}$$

$$y_{k+3}(t) = \frac{dy_{k+2}(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^k a_j y_{k-j+3}(t) + f[\sigma(t)].$$

Din  $\rho(t) \leq \psi_9(\rho_0)$  rezultă că  $\eta, \xi, f[\sigma(t)]$  sînt mărginite și uniform continue. De aici rezultă  $|y_j(t)| \leq \psi_{23}(\rho_0)$  pentru  $j=1, \dots, k+3$ ; pentru primele  $k$ , acest lucru rezultă folosind formula variației constantelor, iar pentru ultimele, direct. Fie acum  $u_j(t)$  definite de

$$\frac{du_j}{dt} = u_{j+1} \quad j = 1, \dots, k-1,$$

$$\frac{du_k}{dt} = - \sum_{j=1}^k a_j u_{k-j+1} + f_T(t), \quad u_j(0) = 0$$

$$u_{k+1} = - \sum_{j=1}^k a_j u_{k-j+1} + f_T(t).$$

Avem  $u_j(t) = y_{j+2}(t)$ ,  $j = 1, \dots, k+1$  pentru  $0 \leq t \leq T$ . Într-adevăr,  $y_{j+2}(0) = 0$  pentru  $j = 1, \dots, k+1$  și pentru  $0 \leq t \leq T$ , funcțiile  $y_{j+2}(t)$  verifică același sistem ca  $u_j(t)$ ,

Pentru  $t > T$  avem  $|u_j(t)| < k' e^{-k''t}$  căci  $f_T \equiv 0$  pentru  $t > T$  și sistemul omogen corespunzător este hurwitzian. Aplicînd sistemului în  $u$ , transformata Fourier rezultă  $\gamma_0 \tilde{u}_{m_0+1} = H(i\omega) \tilde{f}_T$  de unde, ca în cazul precedent, deducem

$$\gamma_0^2 \int_0^\infty u_{m_0+1}^2 dt = \gamma_0^2 \int_0^\infty y_{m_0+3}^2 dt < \psi_{22}(\rho_0)$$

și apoi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{m_0+3}(t) = 0.$$

Aplicînd lema 4 cu

$$\frac{d^l \gamma}{dt^l} = y_l, \quad l = 1, 2, \dots, k+3,$$

deducem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_j(t) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, k+3,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y_{k+1}(t) + \sum_{j=1}^k a_k y_{k-j+2}(t)] = 0$$

și teorema e demonstrată.

*Exemplu.* Considerăm sistemul format din ecuațiile scalare

$$\frac{dx}{dt} = -ax + y - f(\sigma),$$

$$\frac{dy}{dt} = z - cf(\sigma), \quad \sigma = x,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -b(\sigma).$$

Matricea părții liniare a sistemului este  $\begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  și se vede că are două rădăcini

nule cu divizor elementar de ordinul al doilea și rădăcina  $-a$ , care este negativă dacă  $a > 0$ .

Calculăm pe  $G(s)$  după procedeul indicat mai înainte

$$s \tilde{x} = -a \tilde{x} + \tilde{y} + 1,$$

$$s \tilde{y} = \tilde{z} + c,$$

$$s \tilde{z} = b.$$

Rezultă

$$\tilde{z} = \frac{b}{s}, \quad \tilde{y} = \frac{\tilde{z}}{s} + \frac{c}{s} = \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s}, \quad (a+s) \tilde{x} = \tilde{y} + 1,$$

deci

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{y}}{a+s} + \frac{1}{a+s},$$

deci

$$G(s) = \frac{1}{a+s} \left( 1 + \frac{c}{s} + \frac{b}{s^2} \right).$$

Avem

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^2 G(i\omega) = -\frac{b}{a} < 0 \quad \text{dacă } b > 0. \text{ Deci}$$

$$\begin{aligned} \Re_*(i\omega G(i\omega)) &= \Re_* \frac{i\omega}{a+i\omega} \left( 1 + \frac{c}{i\omega} - \frac{b}{\omega^2} \right) = \Re_* \left[ \frac{i\omega(a-i\omega) + c(a-i\omega)}{a^2 + \omega^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\omega b(a-i\omega)}{\omega^2(a^2 + \omega^2)} \right] = \Re_* \left( \frac{i\omega a + \omega^3 + ac - i\omega c}{a^2 + \omega^2} - \frac{i\omega ab + b\omega^3}{\omega^2(a^2 + \omega^2)} \right) = \frac{ac - b + \omega^2}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Se vede că  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Re_*(i\omega G(i\omega)) = 1$ . Condiția  $\Re_*(i\omega G(i\omega)) > 0$  pentru  $\omega > 0$  se reduce la  $ac - b \geq 0$ . Prin urmare, dacă  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $ac - b \geq 0$ , soluția banală este absolut stabilă pentru toate funcțiile  $f$  cu  $\sigma f(\sigma) > 0$  pentru  $\sigma \neq 0$ ,  $\limsup_{\sigma \rightarrow \pm \infty} (|f(\sigma)| + \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma) = \infty$ .

Și de data aceasta metoda lui V. M. Popov dă rezultate cel puțin la fel de puternice ca cele bazate pe construcția unei funcții Liapunov de tipul obișnuit. Anume, *dacă există o funcție Liapunov, negativ definită de tipul „formă pătratică plus integrală” cu derivată în virtutea sistemului, pozitiv definită, condiția  $\Re_e(i\omega G(i\omega)) \geq 0$  este îndeplinită.*

*Demonstrație.* Scriem sistemul echivalent

$$\frac{dx}{dt} = Bx + bf(\sigma),$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\sigma),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = q^* Bx - \beta \xi + (q^* b - \alpha) f(\sigma)$$

și funcția Liapunov

$$V(x, \xi, \sigma) = x^* N x + 2 \xi c_1^* x + 2 \sigma c_2^* x + \gamma_{11} \xi^2 + 2 \gamma_{12} \xi \sigma + \\ + \gamma_{22} \sigma^2 - 2 \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma \leq 0.$$

Pentru

$$f(\sigma) = h\sigma, \quad h > 0, \quad V(x, \xi, \sigma) \text{ devine}$$

$$V_h(x, \xi, \sigma) = x^* N x + 2 \xi c_1^* x + 2 \sigma c_2^* x + \gamma_{11} \xi^2 + 2 \gamma_{12} \xi \sigma + (\gamma_{22} - h) \sigma^2.$$

Derivata în virtutea sistemului va fi

$$\frac{dV_h}{dt} = W_h(x, \xi, \sigma) \geq 0.$$

Avem  $W_h(x, \xi, \sigma) \geq 0$  și pentru  $h = 0$  căci dacă ar fi strict negativă, ar rămâne negativă pentru  $h$  suficient de mic. Rezultă

$$\frac{1}{2} x^* (NB + B^* N) x + \xi c_1^* B x + \sigma c_2^* B x + \\ + (c_2^* x + \gamma_{12} \xi + \gamma_{22} \sigma) (q^* B x - \beta \xi) \geq 0 \\ x^* N x + 2 \xi c_1^* x + 2 \sigma c_2^* x + \gamma_{11} \xi^2 + 2 \gamma_{12} \xi \sigma + \gamma_{22} \sigma^2 \leq 0.$$

În particular, pentru  $x=0$ ,  $\xi = \varepsilon^2 \beta$ ,  $\sigma = \gamma_{22}$  deducem din prima inegalitate

$$- \varepsilon^2 \beta^2 (\gamma_{12} \varepsilon^2 \beta + \gamma_{22}^2) \geq 0.$$

pentru toți  $\varepsilon$  deci  $\gamma_{22} = 0$ . A doua inegalitate dă pentru  $x=0$ ,  $\xi = \varepsilon^2$ ,  $\sigma = \gamma_{12}$ ,

$$\varepsilon^4 \gamma_{11} + 2 \gamma_{12}^2 \varepsilon^2 + \gamma_{22} \gamma_{12}^2 \leq 0$$

deci

$$\gamma_{12} = 0.$$

Tot aceeași inegalitate dă pentru  $x = \varepsilon^2 c_2$ ,  $\xi = 0$ ,  $\sigma = 1$

$$\varepsilon^4 c_2^* N c_2 + 2 \varepsilon^2 c_2^* c_2 + \gamma_{22} \leq 0,$$

deci

$$c_2 = 0.$$

Punînd din nou în prima inegalitate  $x = B^* c_1 \varepsilon^2$ ,  $\xi = -1$ ,  $\sigma = 0$  se deduce  $B^* c_1 = 0$ , deci  $c_1 = 0$ . Rezultă că  $V_h$  are forma  $x^* N x + \gamma_{11} \xi^2 - h \sigma^2$ , iar derivata în virtutea sistemului liniar este

$$\frac{1}{2} x^* N (Bx + bh \sigma) + \frac{1}{2} (Bx + bh \sigma)^* N x + \\ + (h \sigma (\gamma_{11} + \beta) \xi - q^* B x - (q^* b - \alpha) h \sigma) \geq 0.$$

Punînd

$$x = \omega B^{-1} U(\omega), \quad \xi = 0, \quad \sigma = 0,$$

deducem

$$\frac{1}{2} \omega^2 (B^{-1} U(\omega))^* N U(\omega) + \frac{1}{2} \omega^2 U^*(\omega) N B^{-1} U(\omega) \geq 0.$$

Luînd  $U(\omega) = -B(\omega^2 E + B^2)^{-1} b$  și punînd  $x = U(\omega)$ ,  $\xi = 0$ ,  $\sigma = \frac{1}{h}$ , deducem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} U^*(\omega) N (B U(\omega) + b) + \frac{1}{2} (B U(\omega) + b)^* N U(\omega) - q^* B U(\omega) + \\ + \alpha - q^* b \geq 0. \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned} B U(\omega) + b &= -B^2(\omega^2 E + B^2)^{-1} b + (\omega^2 E + B^2)(\omega^2 E + B^2)^{-1} b = \\ &= \omega^2(\omega^2 E + B^2)^{-1} b = -\omega^2 B^{-1} U(\omega). \end{aligned}$$

În definitiv obținem  $-q^* B U(\omega) + \alpha - q^* b \geq 0$  ceea ce coincide cu  $\operatorname{Re}(i\omega G(i\omega)) \geq 0$ .

Să observăm că derivata funcției  $V_h$  pentru  $x = 0$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\xi \neq 0$ , este nulă, deci nu există funcții Liapunov de tipul considerat cu derivată pozitiv definită.

Și în această problemă se poate folosi metoda funcției Liapunov.

Dacă  $\beta \neq 0$ , sistemul este echivalent din punctul de vedere al stabilității absolute cu

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bf(\sigma),$$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\sigma),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = q^* Ax + (q^* b - \alpha)f(\sigma) - \beta\xi.$$

O condiție necesară pentru stabilitatea absolută a acestui sistem este  $\beta > 0$ . Într-adevăr, din stabilitatea absolută rezultă că valorile proprii ale matricii

$$H = \begin{pmatrix} A & b & 0 \\ q^* A & q^* b - \alpha & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

( $H$  este matricea sistemului liniar care se obține pentru  $f(\sigma) = \sigma$ ), au părți reale negative, deci

$$(-1)^{n+2} \det H = (-1)^n \det H > 0.$$

Dar

$$\det H = -\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ q^* A & -\beta \end{pmatrix} = \beta \det A$$

și

$$(-1)^n \det H = (-1)^n \beta \det A.$$

Ținând seama de faptul că  $A$  este hurwitziană, rezultă că  $(-1)^n \det H > 0$  deci  $\beta > 0$ .

În cele ce urmează se va presupune deci  $\beta > 0$  și în plus

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma = \infty.$$

Pentru orice matrice  $\Gamma > 0$  există  $B > 0$  astfel încît

$$BA + A^* B = -\Gamma.$$

Considerăm funcția

$$V(x, \xi, \sigma) = (Bx, x) + \beta \xi^2 + 2 \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma.$$

Derivata acestei funcții, în virtutea sistemului, este

$$\frac{dV}{dt} = -\{(\Gamma x, x) - 2((Bb + A^* q), x)f(\sigma) + 2(\alpha - q^* b)f^2(\sigma)\}.$$

Rezultă că  $-\frac{dV}{dt}$  este o formă pătratică în  $x, \sigma$  cu matricea

$$\begin{pmatrix} \Gamma & -(Bb + A^* q) \\ -(Bb + A^* q)^* & 2(\alpha - q^* b) \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, necesar și suficient pentru ca această formă pătratică să fie pozitiv definită este ca

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma & -(Bb + A^* q) \\ -(Bb + A^* q)^* & 2(\alpha - q^* b) \end{pmatrix} > 0.$$

Aceasta conduce la condiția

$$\alpha - q^* b > \frac{1}{2} (Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1} (Bb + A^* q).$$

Deoarece  $\frac{dV}{dt}$  se poate anula numai pentru  $x = 0, \sigma = 0$  și această mulțime nu conține semitraectorii întregi, deducem că o condiție suficientă pentru stabilitatea absolută a sistemului este

$$\alpha - q^* b > \min_{\Gamma > 0} \frac{1}{2} (Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1} (Bb + A^* q).$$

Fie acum

$$A = \text{diag}(-\mu_i), \Gamma = \text{diag}(\gamma_i).$$

Rezultă

$$B = \text{diag}\left(\frac{\gamma_i}{2\mu_i}\right), (Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\mu_i^2} \left( \frac{\gamma_i b_i - 2\mu_i^2 q_i}{\sqrt{\gamma_i}} \right)^2,$$

unde  $b_i, q_i$  sînt coordonatele vectorilor  $b, q$ . Deducem

$$\min_{\Gamma > 0} (Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q) = 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon'_i q_i b_i$$

$$\varepsilon'_i = \begin{cases} 0 & \text{dacă } b_i q_i > 0, \\ 1 & \text{dacă } b_i q_i < 0. \end{cases}$$

Obținem astfel următoarea condiție de stabilitate absolută

$$\alpha > \sum_{i=1}^n \varepsilon_i q_i b_i, \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & q_i b_i < 0, \\ 1 & q_i b_i > 0. \end{cases}$$

Să observăm acum că, în cazul cînd  $A$  e diagonală, avem

$$G(i\omega) = - \sum_{i=1}^n \frac{b_i q_i}{i\omega + \mu_i} + \frac{\alpha}{i\omega} - \frac{\beta}{\omega^2}$$

și inegalitatea  $\text{Re } i\omega G(i\omega) > 0$  devine

$$\alpha > \sum_{i=1}^n \frac{b_i q_i \omega^2}{\mu_i^2 + \omega^2}.$$

Teorema lui M. V. Popov conduce la următoarea condiție de stabilitate

$$\alpha > \max_{\omega > 0} \sum_{i=1}^n \frac{b_i q_i \omega^2}{\mu_i^2 + \omega^2}.$$

Deoarece  $\text{Re } \{i\omega G(i\omega)\} = \alpha$  pentru  $\omega = 0$ , inegalitatea

$$\text{Re } i\omega G(i\omega) > 0 \quad \text{pentru orice } \omega > 0$$

implică  $\alpha \geq 0$  chiar dacă matricea  $A$  nu este diagonală. Din

$$\max_{\omega \geq 0} \frac{b_i q_i}{\mu_i^2 + \omega^2} = \varepsilon''_i b_i q_i, \quad \varepsilon''_i = \begin{cases} 1 & b_i q_i > 0 \\ 0 & b_i q_i \leq 0 \end{cases}$$

deducem că  $\alpha > \sum_{i=1}^n \varepsilon''_i b_i q_i$  este o condiție suficientă de stabilitate absolută

și regăsim rezultatul obținut mai sus cu ajutorul funcției Liapunov.

În cazul cînd  $b_i q_i > 0$  pentru  $i = 1, \dots, n$ , avem

$$\min_{\substack{\Gamma > 0 \\ \Gamma \text{ diagonală}}} (Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1}(Bb + A^* q) = 0$$

și este evident că acest minim nu poate fi îmbunătățit considerînd matrici nediagonale, deoarece  $\Gamma^{-1}$  este pozitiv definită și deci

$$(Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1} (Bb + A^* q) \geq 0.$$

În cazul cînd  $b_i, q_i < 0$  pentru  $i = 1, \dots, n$ , avem

$$\min_{\substack{\Gamma > 0 \\ \Gamma \text{ diagonală}}} (Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1} (Bb + A^* q) = -2 q^* b$$

și din nou, minimul nu poate fi îmbunătățit considerînd matrici  $\Gamma$  nediagonale. Într-adevăr, dacă ar exista  $\Gamma > 0$  astfel încît

$$(Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1} (Bb + A^* q) < -2 q^* b$$

am deduce că pentru

$$\alpha - q^* b > \frac{1}{2} (Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1} (Bb + A^* q)$$

există o funcție Liapunov și cum

$$[q^* b + \frac{1}{2} (Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1} (Bb + A^* q)] < 0$$

am putea avea o funcție Liapunov pentru  $\alpha < 0$  ceea ce contrazice concluzia trasă pe baza teoremei lui Popov. Cum această concluzie nu folosea faptul că  $A$  e diagonală, deducem că pentru orice  $A$  hurwitziană și orice  $\Gamma > 0$  are loc inegalitatea

$$(Bb + A^* q)^* \Gamma^{-1} (Bb + A^* q) \geq -2 q^* b.$$

Luînd  $q = \frac{1}{2} A^{*-1} c$ , obținem

$$\left( Bb + \frac{1}{2} c \right)^* \Gamma^{-1} \left( Bb + \frac{1}{2} c \right) \geq -c^* A^{*-1} b.$$

Această ultimă inegalitate a fost obținută pe altă cale de J. P. La Salle.

În cele ce urmează vom scoate în evidență ideile generale conținute în metoda lui V. M. Popov pentru a putea ajunge la o generalizare a teoremei 2.2.

Să considerăm un sistem de forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(y), \quad f(0) = 0,$$

unde  $y$  este un vector. Putem presupune fie că  $y = \varphi(x)$ , fie că sistemul mai conține o ecuație  $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ .

Să presupunem că am reușit să demonstrăm că pentru orice condiții inițiale  $(x_0, y_0)$  avem  $|y(t)| < \gamma(x_0, y_0)$ , unde  $\gamma \rightarrow 0$  cînd  $|x_0| + |y_0| \rightarrow 0$ .



Presupunem că matricea  $A$  este hurwitziană. Atunci va rezulta o evaluare de același tip și pentru  $x(t)$ . Într-adevăr, avem

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f[y(s)] ds.$$

Fie

$$\lambda(x_0, y_0) = \sup_{|y| \leq \gamma(x_0, y_0)} |f(y)|.$$

Deoarece  $f(0) = 0$ , rezultă că

$$\lambda(x_0, y_0) \rightarrow 0 \text{ cînd } |x_0| + |y_0| \rightarrow 0.$$

Avem

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq K_1 e^{-K_0(t-t_0)} |x_0| + \int_{t_0}^t K_1 e^{-K_0(t-s)} \lambda(x_0, y_0) ds \leq \\ &\leq K_1 |x_0| + \frac{K_1}{K_0} \lambda(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Dacă în plus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,$$

rezultă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,$$

căci

$$|x(t)| \leq K_1 e^{-K_0(t-t_0)} |x_0| + \int_{t_0}^t K_1 e^{-K_0(t-s)} |f[y(s)]| ds$$

și

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t e^{-K_0(t-s)} |f(y(s))| ds &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^t e^{K_0 s} |f(y(s))| ds}{e^{K_0 t}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{K_0 t} |f(y(t))|}{K_0 e^{K_0 t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} |f(y(t))| = 0. \end{aligned}$$

Rezultă de aici că pentru a obține stabilitatea asimptotică în mare este suficient să fie puse în evidență proprietățile corespunzătoare ale lui  $y(t)$ . Aceste proprietăți sînt puse în evidență arătînd că există trei funcții continue, nule în origină, primele două monoton crescătoare, astfel încît

$$a(|y|) + \int_0^t b(|y|) dt < c(|x_0|, |y_0|).$$

Într-adevăr, dacă o asemenea inegalitate are loc rezultă în particular

$$a(|y|) < c(|x_0|, |y_0|)$$

și deci

$$|y(t)| < \alpha^{-1}(c(|x_0|, |y_0|).$$

Tot din această inegalitate rezultă

$$\int_0^\infty b(|y|) dt < c(|x_0|, |y_0|).$$

Pe de altă parte am văzut că rezultă

$$|x(t)| < \beta(|x_0|, |y_0|)$$

deci

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| < \gamma(|x_0|, |y_0|),$$

deci în orice caz

$$\left| \frac{dy}{dt} \right| < \delta(|x_0|, |y_0|).$$

Din convergența integralei rezultă atunci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Să observăm că dacă există o funcție Liapunov se poate întotdeauna obține o inegalitate integrală de tipul considerat. Într-adevăr, din

$$a(|y|) \leq V(t, y) \leq b(|x|, |y|), \quad \frac{dV}{dt} < -c(|y|)$$

rezultă prin integrare

$$V(t, y) - V(0, y_0) < -\int_0^t c(|y|) dt,$$

deci

$$a(|y|) < b(|x_0|, |y_0|) - \int_0^t c(|y|) dt$$

sau

$$a(|y|) + \int_0^t c(|y|) dt < b(|x_0|, |y_0|).$$

Metoda lui V. M Popov de obținere a inegalității integrale de forma dorită este următoarea. Se consideră o funcțională pătratică  $\chi(T)$  în  $y$  pentru care se caută pe de o parte evaluări inferioare de forma  $a(|y|) + \int_0^t b(|y|) dt + \delta(|x_0|, |y_0|)$ , pe de altă parte o evaluare superioară de forma  $c(|x_0|, |y_0|)$ . Pentru obținerea evaluării superioare se folosește

transformata Fourier. Întreaga artă legată de aplicarea metodei constă în alegerea convenabilă a funcționalei  $\chi(T)$ .

Vom considera sisteme generale de forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax + By, \quad \frac{dy}{dt} = f(z), \quad z = C_1 x + D_1 y.$$

Facem schimbarea de variabilă  $x' = Ax + By$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ . Obținem

$$\frac{dx'}{dt} = A \frac{dx}{dt} + B \frac{dy}{dt} = Ax' + Bf(z), \quad \frac{dy'}{dt} = f(z)$$

$$z = C_1(A^{-1}x' - A^{-1}By') + D_1y'.$$

Suprimând indicii și accentele, scriem sistemul sub forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bf(z), \quad \frac{dy}{dt} = f(z), \quad z = Cx + Dy. \quad (6)$$

Vom presupune că matricea  $A$  este hurwitziană, iar  $D$  nesingulară. Căutăm condiții care să asigure stabilitatea asimptotică în mare, oricare ar fi funcțiile  $f(z)$  de forma  $\{f_i(z_i)\}$  verificând condițiile

$$\delta_i z_i^2 \leq f_i(z_i) z_i \leq (h_i - \delta_i) z_i^2,$$

unde  $\delta_i$ ,  $\delta'_i$ ,  $h_i$  sînt numere pozitive date.

**TEOREMA 2.6.** *Presupunem că există matricele  $P$ ,  $Q$  diagonale cu următoarele proprietăți:*

- 1) *elementele matricei  $P$  sînt pozitive sau nule;*
- 2) *dacă un element de pe diagonală lui  $P$  este nul, elementul corespunzător al lui  $Q$  este strict pozitiv;*
- 3)  *$PD$  este o matrice simetrică,  $PD \leq 0$ ;*
- 4) *fie  $F_h$  matricea diagonală cu elementele  $h_i$ ,*

$$G(i\omega) = P[F_h^{-1} - C(i\omega E - A)^{-1}B - Q[CA(i\omega E - A)^{-1}B + D + CB]$$

$$H(i\omega) = \frac{1}{2} [G(i\omega) + G^*(i\omega)], \quad S = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(i\omega) =$$

$$= PF_h^{-1} - \frac{1}{2} [Q(CB + D) + (B^*C^* + D^*)Q^*].$$

*Presupunem  $H(i\omega) > 0$ ,  $S > 0$ .*

*Atunci soluția banală a sistemului (6) este asimptotic stabilă în mare, oricare ar fi funcția  $f$  din clasa considerată.*

Vom arăta mai întâi că din ipotezele făcute rezultă că matricea  $D$  este obligatoriu hurwitziană. Fie

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}, \quad PD = \begin{pmatrix} P_1 D_1 & P_1 D_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad PD \text{ trebuie să fie simetrică,}$$

deci  $P_1 D_2 = 0$ . Deoarece  $P_1$  e nesingulară, rezultă  $D_2 = 0$ . De aici se deduce că valorile proprii ale lui  $D$  sînt cele ale lui  $D_1$  și  $D_4$ . Din  $PD \leq 0$  rezultă  $P_1 D_1 \leq 0$ ; dacă există  $u_0 \neq 0$  astfel încît

$P_1 D_1 u_0 = 0$ , rezultă  $D_1 u_0 = 0$ , deci  $D_1$  este singulară, deci  $D$  este singulară, ceea ce am exclus. Rezultă  $P_1 D_1 < 0$ . Funcția  $V = \frac{1}{2} (P_1 D_1 (D_1^{-1} u), D_1^{-1} u)$  este deci negativ definită, iar derivata ei în virtutea sistemului  $\frac{du}{dt} = D_1 u$  este

$$(P_1 D_1 (D_1^{-1} u), D_1^{-1} D_1 u) = (P_1 u, u),$$

deci este pozitiv definită; rezultă că  $D_1$  e hurwitziană. Considerăm acum matricea

$$H(0) = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix};$$

deoarece  $H(0) > 0$  rezultă  $H_4 > 0$ . Avem

$$H(0) = \frac{1}{2} (G(0) + G^*(0)), \quad G(0) = P [F_k^{-1} + CA^{-1}B] + \\ + Q [CB - D - CB] = P [F_k^{-1} + CA^{-1}B] - QD.$$

Dacă

$$G(0) = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix}$$

rezultă, ținând seama de forma lui  $P$ , că

$$G_4 = -Q_4 D_4,$$

unde am notat

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_4 \end{pmatrix}.$$

Rezultă

$$H_4 = -\frac{1}{2} (Q_4 D_4 + D_4^* Q_4).$$

Conform ipotezei,  $Q_4 > 0$ , deci  $V = -\frac{1}{2} (Q_4 v, v)$  este negativ definită;

derivata ei în virtutea sistemului  $\frac{dv}{dt} = D_4 v$  este  $\frac{1}{2} (H_4 v, v)$  deci pozitiv definită, deci  $D_4$  este hurwitziană.

Deoarece matricele  $A$  și  $D$  sînt hurwitziene, există matricele simetrice negativ definite  $M_1$  și  $M_2$  astfel ca

$$M_1 A + A^* M_1 = E, \quad M_2 D + D^* M_2 = E'.$$

Funcția  $V = (M_1 x, x) + (M_2 y, y)$  este negativ definită și derivata ei în virtutea sistemului

$$\frac{dx}{dt} = Ax + BF(Cx + Dy), \quad \frac{dy}{dt} = F(Cx + Dy)$$

este

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (M_1(Ax + BFCx + BFDy), x) + (M_1 x, Ax + BFCx + BFDy) + \\ &\quad + (M_2 F(Cx + Dy), y) + (M_2 y, F(Cx + Dy)) = \\ &= ((M_1 A + A^* M_1) x, x) + ((M_2 F D + D^* F^* M_2) y, y) + (M_1 F B(Cx + Dy), x) + \\ &\quad + (M_1 x, B F(Cx + Dy)) + (M_2 F C x, y) + (M_2 y, F C x). \end{aligned}$$

Luând  $F = \varepsilon_0 E'$ , rezultă

$$\frac{dV}{dt} = (x, x) + \varepsilon_0 (y, y) + \varepsilon_0 T(x, y),$$

unde am notat

$$T(x, y) = 2(M_1 B(Cx + Dy), x) + 2(M_2 Cx, y).$$

Avem

$$|T(x, y)| \leq a(x, x) + b|x||y|,$$

deci

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\geq |x|^2 + \varepsilon_0 |y|^2 - \varepsilon_0 (a|x|^2 + b|x||y|) = \\ &= (1 - \varepsilon_0 a) \left( |x| - \frac{\varepsilon_0 b}{2(1 - \varepsilon_0 a)} |y| \right)^2 + \varepsilon_0 |y|^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon_0 b^2}{4(1 - \varepsilon_0 a)} \right). \end{aligned}$$

Se vede că pentru  $\varepsilon_0$  suficient de mic,  $\frac{dV}{dt}$  e pozitiv definită, deci soluția banală a sistemului

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon_0 B(Cx + Dy), \quad \frac{dy}{dt} = \varepsilon_0 (Cx + Dy)$$

este asimptotic stabilă; punând  $z = Cx + Dy$ , avem

$$\frac{dz}{dt} = C \frac{dx}{dt} + D \frac{dy}{dt} = C(Ax + \varepsilon_0 Bz) + D \varepsilon_0 z = CAx + \varepsilon_0 (CB + D)z$$

deci soluția banală a sistemului

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon_0 Bz, \quad \frac{dz}{dt} = CAx + \varepsilon_0 (CB + D)z$$

este asimptotic stabilă deci matricea

$$\begin{pmatrix} A & \varepsilon_0 B \\ CA & \varepsilon_0 (CB + D) \end{pmatrix}$$

este hurwitziană pentru  $\varepsilon_0$  suficient de mic.

Considerăm matricea

$$\begin{pmatrix} A & BF \\ CA & (CB+D)F \end{pmatrix}.$$

Vom demonstra că această matrice este hurwitziană pentru toate matricile diagonale  $F > 0$  cu elementele diagonale mai mici sau egale cu  $h_i$ .

Dacă afirmația nu ar fi adevărată ar exista o matrice  $0 < F_0 \leq F$ , astfel ca matricea

$$\begin{pmatrix} A & BF_0 \\ CA & (CB+D)F_0 \end{pmatrix}$$

să aibă o rădăcină pur imaginară  $i\omega_0$  deoarece pentru  $F = \varepsilon_0 E'$  matricea este hurwitziană.

Avem

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA(A - \lambda E)^{-1} & E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \lambda E & BF \\ CA & (CB+D)F - \lambda E' \end{pmatrix} &= \\ = \det \begin{pmatrix} A - \lambda E & BF \\ 0 & [-CA(A - \lambda E)^{-1} + CB + D]F - \lambda E' \end{pmatrix} &= \\ = \det \begin{pmatrix} A - \lambda E & BF \\ CA & (CB+D)F - \lambda E' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pentru  $F = F_0$ ,  $\lambda = i\omega_0$ , rezultă

$$\det \begin{pmatrix} A - i\omega_0 E & BF_0 \\ 0 & [-CA(A - i\omega_0 E)^{-1} + CB + D]F_0 - i\omega_0 E' \end{pmatrix} = 0.$$

Cum

$$\det(A - i\omega_0 E) \neq 0$$

rezultă

$$\det \{[-CA(A - i\omega_0 E)^{-1} + CB + D]F_0 - i\omega_0 E'\} = 0.$$

Pentru  $\omega_0 = 0$  se capătă  $\det DF_0 = 0$ , ceea ce nu se poate.

Fie  $\omega_0 \neq 0$ . Avem

$$A(A - i\omega_0 E)^{-1}B = B + i\omega_0(A - i\omega_0 E)^{-1}B$$

căci din

$$(A - i\omega_0 E)(A - i\omega_0 E)^{-1} = E$$

rezultă

$$A(A - i\omega_0 E)^{-1} - i\omega_0(A - i\omega_0 E)^{-1} = E,$$

deci

$$A(A - i\omega_0 E)^{-1} = E + i\omega_0(A - i\omega_0 E)^{-1}.$$

Rezultă

$$CA(A - i\omega_0 E)^{-1}B = CB + i\omega_0 C(A - i\omega_0 E)^{-1}B,$$

deci

$$-CA(A - i\omega_0 E)^{-1}B + CB = -i\omega_0 C(A - i\omega_0 E)^{-1}B,$$

deci

$$\det\{[-i\omega_0 C(A - i\omega_0 E)^{-1}B + D]F_0 - i\omega_0 E'\} = 0$$

sau

$$\det[-i\omega_0 C(A - i\omega_0 E)^{-1}B + D - i\omega_0 F_0^{-1}] = 0,$$

deci

$$\det\left[C(A - i\omega_0 E)^{-1}B + F_0^{-1} - \frac{1}{i\omega_0}D\right] = 0.$$

Există atunci un vector  $z_0 \neq 0$  astfel încît

$$\left[C(A - i\omega_0 E)^{-1}B + F_0^{-1} - \frac{1}{i\omega_0}D\right]z_0 = 0,$$

deci

$$[i\omega_0 C(A - i\omega_0 E)^{-1}B + i\omega_0 F_0^{-1} - D]z_0 = 0$$

sau

$$[CA(A - i\omega_0 E)^{-1}B - CB - D + i\omega_0 F_0^{-1}]z_0 = 0.$$

Rezultă

$$\left\{P\left[C(A - i\omega_0 E)^{-1}B + F_0^{-1} - \frac{1}{i\omega_0}D\right] - \right. \\ \left. - Q[-CA(A - i\omega_0 E)^{-1}B + CB + D] + i\omega_0 QF_0^{-1}\right\}z_0 = 0.$$

Cum prin ipoteză  $H(i\omega_0) > 0$ , rezultă  $(H(i\omega_0)z_0, z_0) > 0$ .

Avem

$$G(i\omega_0)z_0 = PF_h^{-1}z_0 - PC(i\omega_0 E - A)^{-1}Bz_0 - Q[CA(i\omega_0 E - A)^{-1}B + \\ + CB + D]z_0 = PF_h^{-1}z_0 - PF_0^{-1}z_0 + \frac{1}{i\omega_0}PDz_0 - i\omega_0 QF_0^{-1}z_0,$$

$$G^*(i\omega_0)z_0 = PF_h^{-1}z_0 - PF_0^{-1}z_0 - \frac{1}{i\omega_0}PDz_0 + i\omega_0 QF_0^{-1}z_0,$$

deci

$$(P(F_h^{-1} - F_0^{-1})z_0, z_0) > 0.$$

Dar

$$0 < F_0 < F_h, \quad F_0^{-1} > F_h^{-1},$$

deci

$$F_h^{-1} - F_0^{-1} < 0,$$

deci

$$(P(F_h^{-1} - F_0^{-1})z_0, z_0) < 0.$$

Am obținut o contradicție, deci matricea e hurwitziană pentru orice  $0 < F < F_h$ .

Vom lua în particular  $F = F_q$ , unde elementele lui  $F_q$  sînt  $\frac{1}{2} \delta_i$  pentru acei  $i$  pentru care  $q_i > 0$  și  $-\frac{1}{2} \delta_i$  pentru acei  $i$  pentru care  $q_i \leq 0$ . Considerăm sistemul ajutător

$$\frac{dx}{dt} = Ax + BF_q z, \quad \frac{dy}{dt} = F_q z, \quad z = Cx + Dy$$

sau, echivalent,

$$\frac{dx}{dt} = Ax + BF_q z, \quad \frac{dz}{dt} = CAx + (CB + D)F_q z.$$

Conform celor de mai sus, acest sistem are soluția banală asimptotic stabilă.

Fie acum  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  o soluție a sistemului (6). Considerăm soluția  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{y}(t)$ ,  $\bar{z}(t)$  a sistemului ajutător definită pentru  $t \geq T$  prin condițiile  $\bar{x}(T) = x(T)$ ,  $\bar{y}(T) = y(T)$ ,  $\bar{z}(T) = z(T)$ . Definim funcțiile

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \begin{cases} x(t) & \text{pentru } 0 \leq t \leq T, \\ \bar{x}(t) & \text{pentru } T \leq t, \end{cases} \\ \bar{y}(t) &= \begin{cases} y(t) & \text{pentru } 0 \leq t \leq T, \\ \bar{y}(t) & \text{pentru } T \leq t, \end{cases} \\ \bar{z}(t) &= \begin{cases} z(t) & \text{pentru } 0 \leq t \leq T, \\ \bar{z}(t) & \text{pentru } T \leq t. \end{cases} \end{aligned}$$

Funcțiile  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{y}(t)$ ,  $\bar{z}(t)$  verifică (exceptînd punctul  $t = T$ ), sistemul

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + Bf_T(t), \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = f_T(t), \quad \bar{z} = C\bar{x} + D\bar{y}$$

unde

$$f_T(t) = \begin{cases} f(z(t)) & \text{pentru } 0 \leq t < T, \\ F_q \bar{z}(t) & \text{pentru } T \leq t. \end{cases}$$

Deoarece matricea sistemului ajutător este hurwitziană, funcțiile  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  descresc exponențial la infinit, deci admit transformate Fourier. Fie

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \int_0^\infty (f_T(t), P(\bar{z} - D\bar{y} - F_h^{-1} f_T(t))) dt + \varepsilon_0 \int_0^\infty (f_T(t), f_T(t)) dt + \\ &+ \int_0^\infty (f_T(t), Q\dot{\bar{z}}(t)) dt = \int_0^T (f(z), P(z - F_h^{-1} f(z))) dt + \\ &+ \int_T^\infty (F_q \bar{z}, P(\bar{z} - F_h^{-1} F_q \bar{z})) dt - \int_0^\infty (f_T(t), PD\bar{y}) dt + \varepsilon_0 \int_0^\infty (f_T(t), f_T(t)) dt + \\ &+ \int_0^T (f(z), Q\dot{z}) dt + \int_T^\infty (F_q \bar{z}, Q\dot{\bar{z}}) dt. \end{aligned}$$



Din  $F_q < F_h$  rezultă

$$F_h^{-1} F_q < E,$$

deci

$$(F_q \bar{z}, P(\bar{z} - F_h^{-1} F_q \bar{z})) > 0.$$

Din

$$\frac{d}{dt} (PD\bar{y}, \bar{y}) = 2 \left( PD\bar{y}, \frac{d\bar{y}}{dt} \right) = 2 (PD\bar{y}, f_T)$$

rezultă

$$-\int_0^\infty (f_T, PD\bar{y}) dt = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d}{dt} (PD\bar{y}, \bar{y}) dt = - (PD\bar{y}, \bar{y}) \Big|_0^\infty = (PDy_0, y_0)$$

căci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{y}(t) = 0.$$

Mai departe

$$\begin{aligned} \int_T^\infty (F_q \bar{z}, Q\bar{z}) dt &= \frac{1}{2} \int_T^\infty \frac{d}{dt} (F_q \bar{z}, Q\bar{z}) dt = \frac{1}{2} (F_q \bar{z}, Q\bar{z}) \Big|_T^\infty = \\ &= -\frac{1}{2} (F_q z(T), Qz(T)) \end{aligned}$$

iar

$$\int_0^T (F_q z, Q\dot{z}) dt = \frac{1}{2} (F_q z(T), Qz(T)) - \frac{1}{2} (F_q z_0, Qz_0),$$

deci

$$\int_T^\infty (F_q \bar{z}, Q\dot{\bar{z}}) dt = -\int_0^T (F_q z, Q\dot{z}) dt - \frac{1}{2} (F_q z_0, Qz_0),$$

deci

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (f_T(t), Q\dot{\bar{z}}(t)) dt &= \int_0^T (f(z) - F_q z, Q\dot{z}) dt - \frac{1}{2} (F_q z_0, Qz_0) = \\ &= \int_{z_0}^{z(T)} (f(z) - F_q z, Qdz) - \frac{1}{2} (F_q z_0, Qz_0) = \Phi(z(T)) - \Phi(z_0) - \frac{1}{2} (F_q z_0, Qz_0), \end{aligned}$$

unde am notat

$$\Phi(z) = \int_0^z (f(z) - F_q z, Q dz) = \sum_i q_i \int_0^{z_i} (f_i(u) - f_i^i u) du.$$

Să ne amintim că dacă  $q_i > 0$ ,  $f_i^i = \frac{1}{2} \delta_i$  și cum  $u \left[ f_i(u) - \frac{1}{2} \delta_i u \right] > 0$

rezultă că pentru acești  $i$  avem

$$q_i \int_0^{z_i} (f_i(u) - f_i^i u) du > 0;$$

dacă  $q_i \leq 0$ , atunci

$$f_q^i = h_i - \frac{1}{2} \delta_i$$

și deci

$$u[f_i(u) - f_q^i u] < 0$$

deci

$$\int_0^{z_i} (f_i(u) - f_q^i u) du < 0$$

deci din nou

$$q_i \int_0^{z_i} (f_i(u) - f_q^i u) du \geq 0.$$

Rezultă în orice caz  $\Phi(z) > 0$ .

Ținând seama de calculele de mai sus deducem

$$\begin{aligned} \chi(T) &> \int_0^T (f(z), P(z - F_h^{-1} f(z))) dt + \frac{1}{2} (PDy_0, y_0) + \varepsilon_0 \int_0^\infty (f_T(t), f_T(t)) dt + \\ &+ \Phi(z(T)) - \Phi(z_0) - \frac{1}{2} (F_q z_0, Qz_0). \end{aligned}$$

Transformînd pe  $\chi(T)$  prin aplicarea teoremei lui Parseval din teoria transformatei Fourier, deducem

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (\tilde{f}_T, P(\tilde{z} - D\tilde{y} - F_h^{-1} \tilde{f}_T)) d\omega + \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (\tilde{f}_T, \tilde{f}_T) d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (\tilde{f}_T, Q\tilde{z}) d\omega, \end{aligned}$$

unde  $\tilde{f}_T$  este transformata Fourier a lui  $f_T$ ,  $\tilde{z}$  transformata lui  $\bar{z}$ ,  $\tilde{y}$  a lui  $\bar{y}$ ,  $\tilde{z}$  a lui  $\bar{z}$ . Din

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + Bf_T$$

deducem

$$i\omega \tilde{x} - x_0 = A\tilde{x} + B\tilde{f}_T,$$

unde  $\tilde{x}$  este transformata Fourier a lui  $\bar{x}$ .

De aici

$$(i\omega E - A)\tilde{x} = x_0 + B\tilde{f}_T, \quad \tilde{x} = (i\omega E - A)^{-1}x_0 + (i\omega E - A)^{-1} B\tilde{f}_T.$$

Din

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f_T$$

rezultă

$$i\omega \tilde{y} - y_0 = \tilde{f}_T,$$

deci

$$\tilde{y} = \frac{1}{i\omega} y_0 + \frac{1}{i\omega} \tilde{f}_T.$$

Din

$$\bar{z} = C\bar{x} + D\bar{y}$$

rezultă

$$\tilde{z} = C\tilde{x} + D\tilde{y}$$

deci

$$\tilde{z} = C(i\omega E - A)^{-1} x_0 + C(i\omega E - A)^{-1} B\tilde{f}_T + \frac{1}{i\omega} D y_0 + \frac{1}{i\omega} D\tilde{f}_T.$$

De aici deducem

$$\begin{aligned} \tilde{z} - i\omega \tilde{z} - z_0 &= i\omega C(i\omega E - A)^{-1} x_0 + i\omega C(i\omega E - A)^{-1} B\tilde{f}_T + \\ &+ D y_0 + D\tilde{f}_T - z_0. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, P(C(i\omega E - A)^{-1} x_0 + C(i\omega E - A)^{-1} B\tilde{f}_T - \\ &- F_h^{-1} \tilde{f}_T)) d\omega + \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, \tilde{f}_T) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, Q[i\omega C(i\omega E - A)^{-1} x_0 + \\ &+ i\omega C(i\omega E - A)^{-1} B\tilde{f}_T + D y_0 + D\tilde{f}_T - z_0]) d\omega = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, [-PC(i\omega E - A)^{-1} B + PF_h^{-1} + \\ &+ Q(i\omega C(A - i\omega E)^{-1} B - D)] \tilde{f}_T) d\omega + \\ &+ \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, \tilde{f}_T) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, L x_0 + M y_0 + N z_0) d\omega = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, G\tilde{f}_T) d\omega + \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, \tilde{f}_T) d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, L x_0 + M y_0 + N z_0) d\omega. \end{aligned}$$

Deoarece  $\chi(T)$  e reală, rezultă

$$\begin{aligned} \chi(T) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, (H - \varepsilon_0 E') \tilde{f}_T) d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}_T, L x_0 + M y_0 + N z_0) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (L x_0 + M y_0 + N z_0, \tilde{f}_T) d\omega. \end{aligned}$$

Deoarece  $H(i\omega) > 0$  și  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} H(i\omega) > 0$ , rezultă  $H(i\omega) > \alpha^2 E'$ . Alegînd pe  $\varepsilon_0$  suficient de mic, rezultă  $H(i\omega) - \varepsilon_0 E' > 0$ , deci putem scrie

$$H(i\omega) - \varepsilon_0 E' = K(i\omega)^2.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \chi(T) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (K\tilde{f}_T - K^{-1}(Lx_0 + My_0 + Nz_0), K\tilde{f}_T - K^{-1}(Lx_0 + \\ & + My_0 + Nz_0)) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (K^{-1}(Lx_0 + My_0 + Nz_0), K^{-1}(Lx_0 + \\ & + My_0 + Nz_0)) d\omega. \end{aligned}$$

Convergența ultimei integrale rezultă din faptul că termenii de subintegrală se comportă la infinit ca  $\frac{1}{\omega^2}$ . Deducem de aici

$$\chi(T) < \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (K^{-1}(Lx_0 + My_0 + Nz_0), K^{-1}(Lx_0 + My_0 + Nz_0)) d\omega.$$

Ținînd seama de evaluările obținute anterior avem

$$\begin{aligned} & \int_0^T (f(z), P(z - F_h^{-1} f(z))) dt + \frac{1}{2} (PD y_0, y_0) + \varepsilon_0 \int_0^T (f(z), f(z)) dt + \\ & + \Phi(z(T)) - \Phi(z_0) - \frac{1}{2} (F_a z_0, Qz_0) < \gamma(|x_0|, |y_0|, |z_0|) \end{aligned}$$

sau

$$\Phi(z(T)) + \int_0^T (f(z), P(z - F_h^{-1} f(z)) + \varepsilon_0 f(z)) dt < c(|x_0| + |z_0|).$$

Avem  $\Phi(z) > 0$  și  $(f(z), P(z - F_h^{-1} f(z))) > 0$ .

Într-adevăr, din  $\delta_i z_i^2 < z_i f_i(z_i) < h_i^2 z_i^2$  rezultă că pentru  $z_i > 0$  avem  $\delta_i z_i < f_i < h_i z_i$  și  $z_i - \frac{1}{h_i} f_i > 0$  deci  $p_i(z_i - \frac{1}{h_i} f_i) > 0$ , deci, cum  $f_i > 0$ , rezultă  $p_i f_i(z_i - \frac{1}{h_i} f_i) > 0$ ; pentru  $z_i < 0$  avem  $h_i z_i < f_i < \delta_i z_i$  deci  $z_i - \frac{1}{h_i} f_i < 0$ , deci  $p_i(z_i - \frac{1}{h_i} f_i) \leq 0$ , deci, cum în acest caz  $f_i < 0$ , rezultă din nou  $p_i f_i(z_i - \frac{1}{h_i} f_i) > 0$ .

Fié acum

$$a(r) = \inf_{|z| \geq r} \Phi(z), \quad b(r) = \inf_{|z| \geq r} [(f(z), P(z - F_h^{-1} f(z))) + \varepsilon_0(f(z), f(z))].$$

Avem

$$\Phi(z) \geq a(|z|), \quad (f(z), P(z - F_h^{-1}f(z)) + \varepsilon_0 f(z)) \geq b(|z|)$$

deci inegalitatea obținută se poate scrie

$$a(|z(T)|) + \int_0^T b(|z(t)|) dt < c(|x_0| + |z_0|).$$

Dar am văzut mai sus că o asemenea inegalitate implică stabilitatea asimptotică în mare. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Să observăm că această teoremă generală poate servi în studiul stabilității sistemelor de reglare cu mai multe organe reglatoare.

#### § 4. STABILITATEA PRACTICĂ A SISTEMELOR CU ELEMENTE DE TIP RELEU

În încheierea acestui capitol vom prezenta un rezultat care aparține tot lui V. M. Popov, relativ la sistemele de reglare care conțin elementele de tip releu. Acest rezultat prezintă interes teoretic și din cauză că este un exemplu de modificare a noțiunii de stabilitate; așa-numita stabilitate „practică” sau  $\varepsilon_0$ -stabilitate care se introduce cu acest prilej se poate dovedi utilă și în alte probleme.

**DEFINIȚIE.** *Soluția banală a sistemului se numește  $\varepsilon_0$ -stabilă dacă pentru orice  $\varepsilon > \varepsilon_0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încît  $|y(t_0)| < \delta(\varepsilon)$  să implice  $|y(t)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ ;  $\varepsilon_0$ -stabilitatea este asimptotică dacă în plus există  $T(\eta, \varepsilon)$  astfel încît  $\varepsilon_0 < |y(t_0)| < \eta$  și  $t \geq t_0 + T(\eta, \varepsilon)$  să implice  $|y(t)| < \varepsilon$  (din nou  $\varepsilon > \varepsilon_0$ ,  $\eta > \varepsilon_0$ ).*

Se vede că această definiție diferă de aceea obișnuită a stabilității uniforme prin faptul că funcțiile  $\delta(\varepsilon)$  și  $T(\eta, \varepsilon)$  nu mai sînt definite pentru orice  $\varepsilon > 0$  ci numai pentru  $\varepsilon > \varepsilon_0$ . Justificarea acestei definiții constă în faptul că în practică valorile suficient de mici pot fi considerate nule, deci nu este necesar să putem asigura ca  $|y(t)|$  să fie oricît de mic, ci numai mai mic decît niște valori convenabile. Este ușor de văzut însă că pentru sistemele liniare această definiție nu reprezintă o slăbire reală a noțiunii de stabilitate după Liapunov.

**PROPOZIȚIE.** *Dacă există  $V(y)$  cu  $a(|y|) \leq V(y) \leq b(|y|)$ ,  $\frac{dV}{dt} < -c(|y|)$*

*pentru  $\varepsilon_1 \leq |y| \leq \eta_0$ , atunci soluția banală a sistemului este  $\varepsilon_2$ -asimptotic stabilă,  $\varepsilon_2 = a^{-1}[b(\varepsilon_1)]$ .*

**Demonstrație.** Fie  $\delta(\varepsilon) = b^{-1}[a(\varepsilon)]$ ; funcția  $a(r)$  e definită pentru  $r \geq \varepsilon_1$ , deci  $\delta(\varepsilon)$  e definită pentru  $\varepsilon > \varepsilon_1$ .

Dacă  $\varepsilon > \varepsilon_2$  rezultă  $a(\varepsilon) > a(\varepsilon_2) = b(\varepsilon_1)$  și  $\delta(\varepsilon) = b^{-1}[a(\varepsilon)] > \varepsilon_1$ . Fie  $|y(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ ; dacă  $|y(t)|$  rămîne mai mic decît  $\varepsilon_1$ , atunci, evident,  $|y(t)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ . Putem deci presupune că există  $t_1$  astfel încît  $\varepsilon_1 \leq |y(t_1)| < \delta(\varepsilon)$  și dacă  $t_1 > t_0$  pentru  $t_0 \leq t < t_1$  avem  $|y(t)| < \varepsilon_1$ .

Rezultă pentru  $t \geq t_1$ ,

$$a(|y(t)|) \leq V(y(t)) \leq V(y(t_1)) \leq b(|y(t_1)|) \leq b(\delta(\varepsilon)) = a(\varepsilon)$$

deci

$$|y(t)| < \varepsilon.$$

$$\text{Fie acum } T(\eta, \varepsilon) = \frac{b(\eta)}{c[\delta(\varepsilon)]}, \quad \eta > \varepsilon_1 \text{ și fie } \varepsilon_1 < |y(t_0)| < \eta.$$

Arătăm că în intervalul  $[t_0, t_0 + T]$  există  $t'$  astfel încît  $|y(t')| < \delta(\varepsilon)$ . Într-adevăr, dacă am avea  $|y(t)| \geq \delta(\varepsilon) > \varepsilon_1$  ar rezulta

$$\frac{dV}{dt} < -c(|y|) < -c[\delta(\varepsilon)],$$

deci

$$V[y(t)] - V[y(t_0)] < -c[\delta(\varepsilon)](t - t_0),$$

deci

$$V[y(t_0 + T_0)] - V[y(t_0)] < -c[\delta(\varepsilon)]T = -b(\eta),$$

deci

$$V[y(t_0 + T_0)] < V[y(t_0)] - b(\eta) < b(|y(t_0)|) - b(\eta) < 0,$$

căci

$$|y(t_0)| < \eta.$$

Dar

$$V(y(t_0 + T_0)) > a(|y(t_0 + T_0)|) \geq a[\delta(\varepsilon)]$$

și am ajuns la o contradicție. Rezultă

$$|y(t')| < \delta(\varepsilon),$$

deci

$$|y(t)| < \varepsilon \text{ pentru } t \geq t',$$

deci în orice caz pentru  $t \geq t_0 + T_0$ . Propoziția e demonstrată.

Să considerăm un sistem de reglare automată care conține un singur element neliniar, descris de sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{dt} = Bx + kf(\sigma) + l\sigma, \quad \frac{d\sigma}{dt} = (b, x) - pf(\sigma) + r\sigma, \quad (7)$$

unde  $f(\sigma)$  verifică următoarele condiții :

$$\begin{aligned} f(\sigma) &\geq \rho \text{ pentru } \sigma > \delta, \\ -\alpha\rho &\leq f(\sigma) \leq \rho \text{ pentru } |\sigma| \leq \delta, \\ f(\sigma) &\leq -\rho \text{ pentru } \sigma < -\delta. \end{aligned}$$

Vom spune că o funcție  $f$  care verifică aceste condiții aparține clasei  $C_{\rho, \delta, \alpha}$ .

Vom presupune în cele ce urmează  $\rho > 0$ .

Luind  $f(\sigma) = h\sigma$  se obține sistemul

$$\frac{dx}{dt} = Bx + kh\sigma + l\sigma,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = (b, x) - ph\sigma + r\sigma.$$

Matricea acestui sistem va fi

$$\begin{pmatrix} B & hk + l \\ b & -ph + r \end{pmatrix}$$

și va avea ecuația caracteristică

$$\det \begin{pmatrix} B - \lambda E & hk + l \\ b & -ph + r - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

sau

$$\det \begin{pmatrix} B - \lambda E & l \\ b & r - \lambda \end{pmatrix} + h \det \begin{pmatrix} B - \lambda E & h \\ b & -p \end{pmatrix} = 0$$

ceea ce se poate scrie sub forma

$$Q(\lambda) + hP(\lambda) = 0.$$

**TEOREMA 2.7.** *Dacă ecuația  $P(\lambda) = 0$  are rădăcinile cu părți reale negative, atunci pentru  $\varepsilon_0, \eta_0, \alpha$  dați se pot găsi  $\rho_0, \delta_0$ , astfel încât dacă  $f \in C_{\rho_0, \delta_0, \alpha}$  să aibă loc proprietatea de  $\varepsilon_0$ -stabilitate asimptotică a sistemului (7).*

*Demonstrație.* Facem în sistem schimbarea de variabile  $\eta = px + k\sigma$ , care e inversabilă deoarece  $p \neq 0$ . Considerăm vectorul  $\zeta = \begin{pmatrix} \eta \\ \sigma \end{pmatrix}$ . Avem

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= p \frac{dx}{dt} + k \frac{d\sigma}{dt} = p Bx + pkf(\sigma) + pl\sigma + k(b, x) - kpf(\sigma) + kr\sigma = \\ &= B(\eta - k\sigma) + pl\sigma + kr\sigma + kb^* \left( \frac{1}{p} \eta - \frac{1}{p} k\sigma \right) = \left( B + \frac{1}{p} kb^* \right) \eta + \\ &\quad + \left( pl + rk - Bk - \frac{1}{p} kb^* k \right) \sigma = A\eta + m\sigma, \end{aligned}$$

unde

$$A = B + \frac{1}{p} kb^*$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= (b, x) - pf(\sigma) + r\sigma = \frac{1}{p} (b, \eta - k\sigma) - pf(\sigma) + r\sigma = \\ &= (a, \eta) - pf(\sigma) + r'\sigma. \end{aligned}$$

În definitiv,

$$\frac{d\eta}{dt} = A\eta + m\sigma, \quad \frac{d\sigma}{dt} = a\eta - pf(\sigma) + r'\sigma.$$

Ecuatia caracteristică a matricei  $A$  este

$$\det(B - \lambda E + \frac{1}{p}kb^*) = 0.$$

Să observăm că

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} B - \lambda E & k \\ b & -p \end{pmatrix} = p \det \begin{pmatrix} B - \lambda E + \frac{1}{p}kb^* & \frac{1}{p}k \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^n p \det \left( B - \lambda E + \frac{1}{p}kb^* \right). \end{aligned}$$

Rezultă că  $P(\lambda) = 0$  este tocmai ecuația caracteristică a matricei  $A$ , deci condiția din enunț asigură că  $A$  e hurwitziană. Există deci o matrice  $P > 0$  astfel încît  $PA + A^*P = N$ , cu  $N < 0$ . Alegem  $V = (P\eta, \eta) + \frac{1}{2}\sigma^2$ ; rezultă  $V > 0$ . Mai departe

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \left( P \frac{d\eta}{dt}, \eta \right) + \left( P\eta, \frac{d\eta}{dt} \right) + \sigma \frac{d\sigma}{dt} = (P(A\eta + m\sigma), \eta) + \\ &+ (P\eta, A\eta + m\sigma) + \sigma(a\eta - pf(\sigma) + r'\sigma) = ((PA + A^*P)\eta, \eta) + \\ &+ 2(Pm, \eta)\sigma + (a^*\eta)\sigma - p\sigma f(\sigma) + r'\sigma^2 = (N\eta, \eta) + \sigma[(\gamma, \zeta) - pf(\sigma)]; \end{aligned}$$

am pus

$$(\gamma, \zeta) = 2(Pm, \eta) + (a, \eta) + r'\sigma,$$

deci

$$\gamma = \begin{pmatrix} Pm + a \\ r' \end{pmatrix}.$$

Din  $N < 0$  rezultă

$$(N\eta, \eta) \leq -c|\eta|^2.$$

Deoarece  $V$  este o formă pătratică pozitiv definită, există constantele  $a_0$  și  $b_0$  pozitive, astfel ca

$$a_0|\zeta|^2 \leq V(\eta, \sigma) \leq b_0|\zeta|^2.$$

$$\text{Fie } M_0 = a_0\varepsilon_0^2, \quad N_0 = \eta_0^2.$$

Considerăm domeniul  $\sqrt{\frac{M_0}{b_0}} \leq |\zeta| \leq \eta_0$ .

Dacă în acest domeniu  $|\sigma| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_0}{b_0}}$ , atunci  $|\eta| \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_0}{b_0}}$ , deci există  $\mu > 0$  astfel ca  $(N\eta, \eta) \leq -\mu$ .



Fie acum  $\nu$  astfel ca  $|(\gamma, \zeta)| \leq \nu$  pentru  $\zeta$  astfel ca  $\sqrt{\frac{M_0}{b_0}} \leq |\zeta| \leq \leq \eta_0$ . Alegem  $\rho_0 = \frac{\nu}{p}(1 + \Delta)$ ,  $\Delta > 0$  arbitrar,

$$\delta_0 = \min \left[ \frac{\mu(1 - \Delta)}{2\nu[1 + \alpha(1 + \Delta)]}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M_0}{b_0}} \right].$$

Se vede că  $\rho_0$  și  $\delta_0$  depind de  $M_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\alpha$ , deci de  $\varepsilon_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\alpha$ . Deoarece  $p > 0$ , rezultă  $\rho_0 > 0$ . Fie  $|\sigma| > \delta_0$ . Rezultă

$$\frac{dV}{dt} = (N\eta, \eta) - p\sigma f(\sigma) + \sigma(\gamma, \zeta) < (N\eta, \eta) - p|\sigma||f(\sigma)| + \nu|\sigma|.$$

Dar pentru  $|\sigma| > \delta_0$  avem  $|f(\sigma)| \geq \rho_0$  deoarece  $f \in C_{\rho_0, \delta_0, \alpha}$ .  
Rezultă

$$p|f(\sigma)| \geq \nu(1 + \Delta), \quad p|f(\sigma)| - \nu > \nu\Delta,$$

deci

$$\frac{dV}{dt} < (N\eta, \eta) - \nu\Delta|\sigma|$$

dacă

$$\sqrt{\frac{M_0}{b_0}} \leq |\zeta| \leq \eta_0, \quad |\sigma| > \delta_0.$$

Fie acum  $|\sigma| \leq \delta_0$ . Rezultă

$$\frac{dV}{dt} < (N\eta, \eta) + \delta_0(\nu + p\alpha\rho_0)$$

căci  $f \in C_{\rho_0, \delta_0, \alpha}$ . Dar

$$\nu + p\alpha\rho_0 = \nu + \alpha\nu + \alpha\nu\Delta = \nu(1 + \alpha(1 + \Delta))$$

și cum

$$\delta_0 \leq \frac{\mu(1 - \Delta)}{2\nu(1 + \alpha(1 + \Delta))}$$

rezultă

$$\delta_0(\nu + p\alpha\rho_0) = \delta_0\nu(1 + \alpha(1 + \Delta)) \leq \frac{\mu(1 - \Delta)}{2}$$

deci

$$\frac{dV}{dt} < (N\eta, \eta) + \frac{\mu}{2} - \frac{\Delta}{2}.$$

Dar  $\delta_0 \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M_0}{b_0}}$ , deci  $|\sigma| \leq \delta_0$  implică  $|\sigma| < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M_0}{b_0}}$ , deci

$$(N\eta, \eta) \leq -\mu, \text{ deci } \frac{dV}{dt} < -\frac{\mu}{2} - \frac{\Delta}{2}.$$

În definitiv,  $\frac{dV}{dt} < -c(|\zeta|)$  în domeniul  $\sqrt{\frac{M_0}{b_0}} \leq |\zeta| \leq \bar{\eta}_0$ . Să aplicăm acum propoziția demonstrată mai sus în care

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{M_0}{b_0}}, \quad b(r) = b_0 r^2, \quad a(r) = a_0 r^2, \quad a^{-1}(r) = \sqrt{\frac{r}{a_0}}.$$

Atunci

$$b(\varepsilon_1) = b_0 \frac{M_0}{b_0} = M_0, \quad \varepsilon_2 = a^{-1}[b(\varepsilon_1)] = \sqrt{\frac{M_0}{a_0}} = \varepsilon_0.$$

Conform propoziției precedente rezultă  $\varepsilon_2$ -stabilitatea asimptotică deci  $\varepsilon_0$ -stabilitatea asimptotică și teorema e demonstrată.

*Observații.* 1) Proprietatea de  $\varepsilon_0$ -stabilitate nu presupune numai decît că sistemul admite soluția banală. De aceea nu este necesar să presupunem că  $f(0) = 0$ .

2) Cazul relelor ideale se obține dacă  $\delta_0 = 0$  și se vede că avem  $\delta_0 = 0$  dacă luăm  $\varepsilon_0 = 0$ . În acest caz rezultă deci stabilitatea asimptotică în sensul obișnuit.

#### COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Problema stabilității absolute la sistemele neliniare de reglare automată a fost studiată pentru prima dată cu metoda funcției Liapunov în [36]. În acest domeniu au apărut monografiile [37], [38]. Studiul intrinsec, fără reducerea la forma canonică a fost efectuat de V. A. Iakubovici în [39], [40] și de S. Lefschetz [41]. Rezultatele din text, care dezvoltă pe ale lui S. Lefschetz, aparțin lui T. Morozan. Metoda lui V. M. Popov este expusă în lucrările [42], [43], [44]. Studiul cazului a două rădăcini nule cu metoda funcției lui Liapunov a fost efectuat de T. Morozan. Rezultatul lui V. M. Popov relativ la stabilitatea practică pentru sistemele cu elemente de tip releu a fost publicat în [45].

Echivalența metodei lui V. M. Popov cu cea a funcției Liapunov a fost demonstrată de V. A. Iakubovici în [46].

### CAPITOLUL III

## TEORIA OSCILAȚIILOR

Din punct de vedere matematic, teoria oscilațiilor conține problema existenței și stabilității soluțiilor periodice ale sistemelor de ecuații diferențiale. Se numesc, în mod uzual, oscilații liniare soluțiile periodice ale sistemelor liniare.

Soluțiile periodice ale sistemelor liniare cu coeficienți constanți sau ale unor sisteme neliniare care nu depind explicit de  $t$  se numesc uneori oscilații libere; când în membrul al doilea al sistemului mai apare o funcție periodică de  $t$ , oscilațiile corespunzătoare se numesc forțate. În ultima vreme se studiază tot mai mult problema existenței soluțiilor aproape-periodice.

În cele ce urmează vom prezenta unele fapte fundamentale relative la existența soluțiilor periodice și aproape-periodice la sistemele de ecuații diferențiale ordinare.

### § 1. OSCILAȚII LINIARE

Să considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (1)$$

unde  $A(t)$  și  $f(t)$  sînt periodice de perioadă  $\omega$ .

**TEOREMA 3.1.** *Condiția necesară și suficientă ca pentru orice funcție periodică  $f(t)$  de perioadă  $\omega$  sistemul (1) să admită soluții periodice de perioadă  $\omega$  este ca sistemul omogen corespunzător să nu admită alte soluții periodice de perioadă  $\omega$  decît cea banală. Dacă această condiție este îndeplinită, soluția periodică a sistemului (1) este unică.*

*Demonstrație.* O soluție a sistemului este periodică de perioadă  $\omega$  dacă și numai dacă  $x(\omega) = x(0)$ . Dacă soluția este periodică, această condiție este evident verificată; dacă această condiție este verificată,

soluțiile  $x(t + \omega)$  și  $x(t)$  coincid pentru  $t = 0$ , deci, pe baza teoremei de unicitate, coincid pentru orice  $t$ , deci  $x(t)$  e periodică de perioadă  $\omega$ . După cum am văzut în capitolul I, soluția generală a sistemului (1) se scrie

$$x(t; x_0) = U(t) x_0 + \int_0^t C(t, s) f(s) ds.$$

Reamintim că  $U(t) = C(t, 0)$  și că  $C(t, s)$  este matricea care are drept coloane soluțiile sistemului omogen, astfel ca  $C(s, s) = E$ .

Rezultă

$$x(\omega; x_0) = U(\omega) x_0 + \int_0^\omega C(\omega, s) f(s) ds.$$

Condiția de periodicitate a soluției se scrie

$$x(\omega; x_0) = x_0,$$

deci

$$x_0 = U(\omega) x_0 + \int_0^\omega C(\omega, s) f(s) ds$$

sau

$$[E - U(\omega)] x_0 = \int_0^\omega C(\omega, s) f(s) ds.$$

Condiția ca acest sistem să permită determinarea lui  $x_0$ , oricare ar fi funcția  $f$ , se scrie :

$$\det [E - U(\omega)] \neq 0.$$

Aceasta înseamnă însă că ecuația

$$U(\omega) x_0 = x_0$$

nu are altă soluție decât  $x_0 = 0$ . Dar  $U(t) x_0$  este soluția generală a sistemului omogen și condiția

$$U(\omega) x_0 = x_0$$

reprezintă tocmai condiția de periodicitate pentru soluțiile sistemului omogen. Condiția

$$\det [E - U(\omega)] \neq 0$$

este deci echivalentă cu cererea ca sistemul omogen să nu aibă alte soluții periodice de perioadă  $\omega$ , decât cea banală. Teorema e demonstrată.

**PROPOZIȚIE.** În condițiile din teorema 3.1 soluția periodică unică a sistemului (1) se poate pune sub forma

$$x(t) = \int_0^\omega G(t, s) f(s) ds,$$

unde

$$G(t, s) = U(t) [E - U(\omega)]^{-1} U^{-1}(s) \text{ pentru } 0 \leq s \leq t \leq \omega,$$

$$G(t, s) = U(t + \omega) [E - U(\omega)]^{-1} U^{-1}(s) \text{ pentru } 0 \leq t < s \leq \omega.$$

**Demonstrație.** Dacă  $x_0$  este valoarea inițială a soluției periodice a sistemului (1), avem

$$x_0 = [E - U(\omega)]^{-1} \int_0^{\omega} C(\omega, s) f(s) ds.$$

Soluția periodică se scrie deci

$$x(t) = U(t) [E - U(\omega)]^{-1} \int_0^{\omega} C(\omega, s) f(s) ds + \int_0^t C(t, s) f(s) ds.$$

Dar

$$C(t, s) = C(t, 0) C(0, s) = U(t) U^{-1}(s).$$

Rezultă

$$x(t) = U(t) [E - U(\omega)]^{-1} U(\omega) \int_0^{\omega} U^{-1}(s) f(s) ds + U(t) \int_0^t U^{-1}(s) f(s) ds.$$

Putem scrie

$$x(t) = \int_0^t G(t, s) f(s) ds,$$

unde

$$G(t, s) = U(t) [E - U(\omega)]^{-1} U(\omega) U^{-1}(s) + U(t) U^{-1}(s)$$

pentru  $0 \leq s \leq t \leq \omega$ ,

$$G(t, s) = U(t) [E - U(\omega)]^{-1} U(\omega) U^{-1}(s) \text{ pentru } 0 \leq t < s \leq \omega.$$

Aceste formule pentru  $G(t, s)$  pot fi aduse la forma din enunț observînd că

$$\begin{aligned} & U(t) [E - U(\omega)]^{-1} U(\omega) U^{-1}(s) + U(t) U^{-1}(s) = \\ & = U(t) \{ [E - U(\omega)]^{-1} U(\omega) + E \} U^{-1}(s) = U(t) [E - U(\omega)]^{-1} U^{-1}(s) \end{aligned}$$

căci din

$$[E - U(\omega)]^{-1} [E - U(\omega)] = E$$

rezultă

$$[E - U(\omega)]^{-1} - [E - U(\omega)]^{-1} U(\omega) = E.$$

Din relația

$$[E - U(\omega)]^{-1} [E - U(\omega)] = [E - U(\omega)] [E - U(\omega)]^{-1}$$

rezultă

$$[E - U(\omega)]^{-1} U(\omega) = U(\omega) [E - U(\omega)]^{-1}$$

deci

$$\begin{aligned} U(t) [E - U(\omega)]^{-1} U(\omega) U^{-1}(s) &= U(t) U(\omega) [E - U(\omega)]^{-1} U^{-1}(s) = \\ &= U(t + \omega) [E - U(\omega)]^{-1} U^{-1}(s). \end{aligned}$$

Propoziția e demonstrată.

Să observăm că din această propoziție rezultă pentru soluția periodică evaluarea  $|x(t)| \leq M \sup |f|$ , unde  $M$  depinde numai de sistemul omogen.

**TEOREMA 3.2.** *Dacă sistemul omogen*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (2)$$

*admite soluții periodice de perioadă  $\omega$ , atunci sistemul adjunct*

$$\frac{dy}{dt} = -y A(t) \quad (3)$$

*admite același număr de soluții periodice liniar independente ca și sistemul (2). Condiția necesară și suficientă ca sistemul (1) să admită soluții periodice este ca  $f$  să fie ortogonală pe soluțiile periodice ale sistemului (3), adică*

$$\int_0^\omega y_k(t) f(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l,$$

*$y_1, \dots, y_l$  fiind soluțiile periodice liniar independente ale sistemului (3).*

*Demonstrație.* Dacă sistemul (2) admite soluții periodice, există  $x_0$  astfel ca

$$U(\omega)x_0 = x_0.$$

Am văzut în capitolul I că  $U^{-1}(t)$  are drept linii soluții liniar independente ale sistemului adjunct; soluția generală a sistemului adjunct (3) se scrie

$$y(t; y_0) = y_0 U^{-1}(t).$$

Condiția ca această soluție să fie periodică de perioadă  $\omega$  se scrie tot sub forma

$$y(\omega; y_0) = y_0,$$

deci

$$y_0 U^{-1}(\omega) = y_0,$$

sau

$$y_0 = y_0 U(\omega).$$

Trecînd la transpuse obținem sistemul

$$U^*(\omega)y_0^* = y_0^*.$$

Dar matricile  $U(\omega) - E$  și  $U^*(\omega) - E$  au același rang, deci sistemele

$$U(\omega)x_0 = x_0$$

și

$$U^*(\omega)y_0^* = y_0^*$$

au același număr de soluții liniar independente.

Aceasta înseamnă însă că sistemele (2) și (3) au același număr de soluții periodice de perioadă  $\omega$  liniar independente. Condiția necesară și

suficientă ca sistemul (1) să admită soluții periodice de perioadă  $\omega$  este ca sistemul de ecuații liniare

$$[E - U(\omega)] x_0 = \int_0^\omega C(\omega, s) f(s) ds$$

să admită soluții. Să presupunem că sistemul admite o soluție periodică. Fie  $y(t)$  o soluție periodică a sistemului (3); să înmulțim egalitatea de mai sus cu  $y(0)$ . Avem

$$y(0) [E - U(\omega)] x_0 = y(0) \int_0^\omega U(\omega) U^{-1}(s) f(s) ds.$$

Dar am văzut mai sus că dacă  $y(t)$  e soluția periodică a sistemului (3), atunci

$$y(0) = y(0) U(\omega)$$

deci

$$y(0) [E - U(\omega)] = 0.$$

Rezultă și

$$y(0) [E - U(\omega)] x_0 = 0$$

deci

$$y(0) \int_0^\omega U(\omega) U^{-1}(s) f(s) ds = 0$$

sau

$$\int_0^\omega y(0) U(\omega) U^{-1}(s) f(s) ds = 0.$$

Dar

$$y(0) U(\omega) = y(0)$$

și

$$y(0) U^{-1}(s) = y(s)$$

deci condiția devine

$$\int_0^\omega y(s) f(s) ds = 0$$

și am demonstrat că cererea din enunț e necesară.

Să presupunem acum această condiție îndeplinită. Rezultă că

$$y_0 U(\omega) \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds = 0$$

pentru toate soluțiile  $y_0$  ale sistemului

$$y_0 = y_0 U(\omega).$$

Rezultă că sistemul

$$y_0 [E - U(\omega)] = 0, \quad y_0 U(\omega) \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds = 0$$

are același număr de soluții liniar independente ca și sistemul

$$y_0 [E - U(\omega)] = 0$$

deci matricea  $E - U(\omega)$  și matricea extinsă la care s-a adăugat coloana  $\int_0^\omega U(\omega) U^{-1}(s) f(s) ds$  au același rang. Dar conform teoremei lui Kronecker - Capelli, aceasta este suficient pentru ca sistemul

$$[E - U(\omega)] x_0 = \int_0^\omega U(\omega) U^{-1}(s) f(s) ds$$

să aibă soluții și teorema e demonstrată.

În cazul cînd condiția de ortogonalitate din teorema 3.2 nu este verificată, sistemul (1) nu admite soluții periodice și are loc *fenomenul de rezonanță*: toate soluțiile sistemului (1) sînt nemărginite.

**TEOREMA 3.3.** *Dacă sistemul (1) nu are soluții periodice, afară de soluția banală, atunci toate soluțiile sistemului sînt nemărginite.*

*Demonstrație.* Dacă sistemul (1) nu admite soluții periodice, există o soluție periodică de perioadă  $\omega$  a sistemului (3) astfel încît

$$\int_0^\omega y(t) f(t) dt \neq 0.$$

Notînd cu  $y_0$  valoarea inițială a acestei soluții avem

$$y_0 [E - U(\omega)] = 0$$

și

$$y_0 \int_0^\omega U^{-1}(t) f(t) dt \neq 0.$$

Fie  $x(t)$  o soluție oarecare a sistemului (1). Avem

$$x(t) = U(t) x(0) + \int_0^t C(t, s) f(s) ds = U(t) \left[ x(0) + \int_0^t U^{-1}(s) f(s) ds \right],$$

deci

$$x(\omega) = U(\omega) \left[ x(0) + \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds \right],$$

de unde deducem

$$\begin{aligned} y_0 x(\omega) &= y_0 U(\omega) x(0) + y_0 U(\omega) \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds = \\ &= y_0 x(0) + y_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds. \end{aligned}$$

Mai departe, putem scrie

$$x(t + \omega) = U(t) x(\omega) + \int_0^t C(t, s) f(s) ds,$$



căci în ambii membri avem soluții ale ecuației care coincid pentru  $t = 0$ .  
**Rezultă**

$$x(2\omega) = U(\omega) \left[ x(\omega) + \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds \right],$$

de unde

$$y_0 x(2\omega) = y_0 x(\omega) + y_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds = y_0 x(0) + 2y_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds.$$

**Arătăm prin inducție că**

$$y_0 x(n\omega) = y_0 x(0) + ny_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds.$$

**Avem**

$$x(t + n\omega) = U(t) x(n\omega) + \int_0^t C(t, s) f(s) ds,$$

căci în ambii membri sînt soluții ale sistemului și acestea coincid pentru  $t = 0$ . **Rezultă**

$$x[(n+1)\omega] = U(\omega) \left[ x(n\omega) + \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds \right],$$

deci

$$\begin{aligned} y_0 x[(n+1)\omega] &= y_0 x(n\omega) + y_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds = \\ &= y_0 x(n\omega) + (n+1)y_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds. \end{aligned}$$

Cum din felul în care a fost ales  $y_0$  rezultă

$$y_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds \neq 0$$

din formula

$$y_0 x(n\omega) = y_0 x(0) + ny_0 \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s) ds$$

rezultă că soluția  $x(t)$  nu poate fi mărginită, căci atunci șirul numeric  $y_0 x(n\omega)$  ar trebui să fie mărginit. Teorema este demonstrată.

## § 2. SOLUȚII APROAPE-PERIODICE ALE SISTEMELOR LINIARE

Teoremele demonstrate pînă acum au avut un caracter pronunțat algebric. Vom stabili acum o teoremă mai slabă decît teorema 3.1, folosind o funcție Liapunov; interesul acestei teoreme constă în faptul că ea se poate extinde în cazul sistemelor aproape-periodice.

Să începem cu următoarea observație simplă : *Dacă un sistem periodic*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t + \omega, x) = f(t, x)$$

*admite o soluție mărginită  $x_0(t)$  astfel încât*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_0(t + \omega) - x_0(t)] = 0,$$

*atunci el admite o soluție periodică.*

Într-adevăr, șirul

$$x_n = x(n\omega)$$

este mărginit, deci din el se poate extrage un subșir  $x_{n_k}$  convergent către un punct  $x^*$ . Din ipoteză rezultă pentru orice  $n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x_0((n+1)\omega) - x_0(n\omega)] = 0,$$

deci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k+1} = x^*.$$

Din

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x^*$$

rezultă

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t; x_{n_k}) = x(t; x^*)$$

și din

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k+1} = x^*$$

rezultă

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t; x_{n_k+1}) = x(t; x^*).$$

Dar

$$\begin{aligned} x(t; x_{n_k+1}) &= x(t; x_0[(n_k+1)\omega]) = x_0(t + (n_k+1)\omega) = \\ &= x_0(t + \omega + n_k\omega) = x(t + \omega; x_0(n_k\omega)) = x(t + \omega; x_{n_k}). \end{aligned}$$

Rezultă

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t; x_{n_k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t + \omega; x_{n_k}) = x(t + \omega; x^*),$$

deci

$$x(t; x^*) = x(t + \omega; x^*)$$

și soluția determinată pentru  $t = 0$  prin valoarea  $x^*$  este periodică.

Să considerăm acum sistemul (1) și să presupunem că soluția banală a sistemului (2) este asimptotic stabilă.

Fie  $x_0(t)$  o soluție oarecare a sistemului (1); deoarece  $x_0(t + \omega)$  este de asemenea soluție a sistemului (1), rezultă că  $x_0(t + \omega) - x_0(t)$  este soluție a sistemului (2), deci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [x_0(t + \omega) - x_0(t)] = 0.$$

Prin urmare, pentru a deduce că sistemul (1) admite o soluție periodică este suficient să arătăm că soluția banală a sistemului (2) este asimptotic stabilă și că sistemul (1) admite o soluție mărginită. Vom arăta însă că, chiar în condiții mai generale, dacă soluția banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă, atunci sistemul (1) admite o soluție mărginită.

LEMĂ. *Se consideră sistemul (1) unde  $A(t)$  și  $f(t)$  sînt presupuse mărginite pentru  $t \geq 0$ . Dacă soluția banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă, atunci toate soluțiile sistemului sînt mărginite pentru  $t \geq 0$ .*

*Demonstrație.* Conform teoremei 1.6'' există o formă pătratică  $(V(t)x, x)$  cu proprietățile :

$$\mu |x|^2 \leq (V(t)x, x) \leq M |x|^2,$$

$$\left( \frac{dV}{dt} x, x \right) + 2(Vx, A(t)x) = -|x|^2.$$

Folosind aceleași calcule ca în demonstrația teoremei 1.7, deducem

$$\frac{dV^*}{dt} = -|x(t; t_0, x_0)|^2 + 2(V(t)x(t; t_0, x_0), f(t)),$$

unde  $x(t; t_0, x_0)$  este soluția generală a sistemului (1) și

$$V^*(t) = (V(t)x(t; t_0, x_0), x(t; t_0, x_0)).$$

Dacă

$$L = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$$

deducem

$$\frac{dV^*}{dt} \leq -|x(t; t_0, x_0)|^2 + 2ML|x(t; t_0, x_0)|.$$

Să considerăm acum o soluție oarecare cu  $|x_0| < 2LM$ .

Rezultă

$$V^*(t_0) = (V(t_0)x_0, x_0) < M|x_0|^2 < 4L^2M^3.$$

Demonstrăm că pentru orice  $t \geq 0$  avem

$$V^*(t) < 4L^2M^3.$$

Dacă afirmația nu ar fi adevărată, ar exista  $t_1 > t_0$  astfel încît

$$V^*(t_1) = 4L^2M^3$$

și

$$V^*(t) < 4L^2M^3$$

pentru  $t_0 \leq t < t_1$ . Dar atunci

$$\left. \frac{dV^*}{dt} \right|_{t=t_1} \geq 0.$$

Pe de altă parte,

$$4L^2M^3 = V^*(t_1) < M |x(t_1; t_0, x_0)|^2,$$

deci

$$|x(t_1; t_0, x_0)|^2 > 4L^2M^2, \quad |x(t_1; t_0, x_0)| > 2LM.$$

Avem

$$\left. \frac{dV^*}{dt} \right|_{t=t_1} \leq |x(t_1; t_0, x_0)| (2LM - |x(t_1; t_0, x_0)|) < 0,$$

ceea ce contrazice inegalitatea găsită mai sus. Existența lui  $t_1$  este contradictorie, deci

$$V^*(t) < 4L^2M^3$$

pentru orice  $t \geq t_0$ , deci

$$\mu |x(t; t_0, x_0)|^2 \leq V^*(t) < 4L^2M^3,$$

ceea ce arată că soluțiile cu  $|x_0| < 2ML$  sînt mărginite pentru  $t \geq t_0$ , și anume  $|x(t; t_0, x_0)| \leq KL$ . Din cauza stabilității asimptotice uniforme rezultă că toate soluțiile sînt mărginite și lema e demonstrată.

Ținînd seamă de această lema și de considerațiile preliminare făcute rezultă că *dacă soluția banală a sistemului (2) este asimptotic stabilă, atunci sistemul (1) admite o soluție periodică unică, asimptotic stabilă.*

**TEOREMA 3.4.** *Se consideră sistemul (1) cu  $A(t)$  și  $f(t)$  aproape-periodice. Dacă soluția banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă, atunci sistemul (1) admite o soluție aproape-periodică unică, uniform asimptotic stabilă și care verifică o evaluare de forma :*

$$|x(t)| \leq K \sup |f(t)|.$$

*Demonstrație.* Din lema precedentă rezultă existența unei soluții mărginite  $u(t)$ . Din

$$\dot{u}(t) = A(t) u(t) + f(t),$$

$$u(t + \tau) = A(t + \tau) u(t + \tau) + f(t + \tau),$$

rezultă

$$\begin{aligned} \dot{u}(t + \tau) - \dot{u}(t) &= A(t) [u(t + \tau) - u(t)] + \\ &+ [A(t + \tau) - A(t)] u(t + \tau) + f(t + \tau) - f(t). \end{aligned}$$

Fie  $M_1 = \sup |u(t)| + 1$ ,  $\tau \in \frac{\varepsilon}{2M_1K}$  — aproape perioadă comună

pentru  $A$  și  $f$ ;  $K$  e constanta, depinzînd numai de sistemul (2) a cărei existență a rezultat în lema.

Fie  $y(t)$  soluția sistemului (2) cu :

$$y(0) = u(\tau) - u(0),$$

$$v(t) = u(t + \tau) - u(t) - y(t).$$

Avem

$$v(0) = 0$$

și

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{u}(t + \tau) - \dot{u}(t) - \dot{y}(t) = A(t) [u(t + \tau) - u(t)] + \\ &+ [A(t + \tau) - A(t)] u(t + \tau) + f(t + \tau) - f(t) - A(t) y(t) = \\ &= A(t) v(t) + [A(t + \tau) - A(t)] u(t + \tau) + f(t + \tau) - f(t). \end{aligned}$$

Conform lemei rezultă

$$\begin{aligned} |v(t)| &\leq K \sup | [A(t + \tau) - A(t)] u(t + \tau) + f(t + \tau) - f(t) | \leq \\ &\leq K (\sup |A(t + \tau) - A(t)| \sup |u(t + \tau)| + \sup |f(t + \tau) - f(t)|) \leq \\ &\leq K \left( \frac{\varepsilon}{2M_1K} \sup |u(t + \tau)| + \frac{\varepsilon}{2M_1K} \right) = K \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Prin urmare  $|u(t + \tau) - u(t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$  pentru  $t \geq 0$ .

Deoarece soluția banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă, avem

$$|y(t)| \leq Be^{-\alpha t} |y(0)| < 2M_1 Be^{-\alpha t}.$$

Există  $T > 0$  astfel încît dacă  $t > T$  să avem

$$|y(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dar atunci, pentru  $t > T$ , rezultă

$$|u(t + \tau) - u(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Rezultă că pentru  $\varepsilon > 0$  dat există  $l(\varepsilon)$  și  $T(\varepsilon)$  astfel încît în orice interval de lungime  $l$  să existe un număr  $\tau$  cu proprietatea că  $|u(t + \tau) - u(t)| < \varepsilon$  pentru  $t > T$ .

Dar aceasta înseamnă că  $u(t)$  este o funcție asimptotic aproape-periodică. Atunci, pe baza teoremei fundamentale a lui Fréchet avem

$$u(t) = x_0(t) + \omega(t),$$

unde  $x_0(t)$  este aproape-periodică și

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0.$$

Avem

$$\dot{x}_0(t) + \dot{\omega}(t) = A(t) x_0(t) + A(t) \omega(t) + f(t).$$

Dar  $A(t) \omega(t)$  are limita zero și  $A(t) x_0(t) + f(t)$  este aproape-periodică; pe baza teoremei fundamentale de descompunere a lui Fréchet rezultă:

$$\dot{x}_0(t) = A(t) x_0(t) + f(t),$$

deci  $x_0(t)$  este o soluție aproape-periodică a sistemului (1).<sup>†</sup> Din

$$|u(t)| \leq K \sup |f|$$

rezultă

$$|x_0(t)| \leq ML + |\omega(t)|.$$

Fie  $\varepsilon > 0$ ; din

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0$$

rezultă că există  $T > 0$  astfel încît pentru  $t > T$  să avem

$$|\omega(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rezultă

$$|x_0(t)| \leq ML + \frac{\varepsilon}{2},$$

pentru  $t > T$ . Fie acum  $t$  arbitrar; există o  $\frac{\varepsilon}{2}$  — aproape-perioadă astfel

încît  $t + \tau > T$ . Atunci  $|x_0(t + \tau)| \leq ML + \frac{\varepsilon}{2}$

și

$$|x_0(t + \tau) - x_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

deci

$$|x_0(t)| \leq ML + \varepsilon.$$

Deoarece  $\varepsilon > 0$  a fost arbitrar, rezultă

$$|x_0(t)| \leq ML.$$

Teorema este complet demonstrată.

### § 3. SISTEME CVASILINIARE

Trecînd la studiul sistemelor neliniare începem cu cazul cel mai simplu al sistemelor cvasiliniare de forma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(x,t), \quad (4)$$

unde  $A(t)$  este o matrice periodică și  $f(x,t)$  este periodică în raport cu  $t$  cu aceeași perioadă  $\omega$  ca și  $A(t)$ .

Vom presupune că sistemul liniar

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

nu admite alte soluții periodice de perioadă  $\omega$  decât soluția banală. În acest caz am văzut că există o matrice  $G(t,s)$  astfel încât soluția periodică unică a sistemului neomogen

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t)$$

se scrie sub forma

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,s) g(s) ds.$$

Formăm ecuația integrală neliniară

$$x(t) = \int_0^\omega G(t,s) f[x(s), s] ds. \quad (5)$$

Orice soluție continuă a acestei ecuații reprezintă o soluție periodică a sistemului, căci dacă ținem seama de expresia matricii  $G(t,s)$ , ecuația integrală devine

$$x(t) = U(t) [E - U(\omega)]^{-1} \int_0^\omega C(\omega; s) f[x(s), s] ds + \int_0^t C(t, s) f[x(s), s] ds$$

și deci

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t) U(t) [E - U(\omega)]^{-1} \int_0^\omega C(\omega; s) f[x(s), s] ds + f[x(t), t] + \\ &+ \int_0^t A(t) C(t, s) f[x(s), s] ds = A(t) x(t) + f[x(t), t]. \end{aligned}$$

Reciproc, dacă  $x_0(t)$  este o soluție periodică a sistemului (4), ea poate fi considerată ca soluție a sistemului liniar

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f[x_0(t), t]$$

și această soluție periodică e unică și reprezentată de formula

$$x_0(t) = \int_0^\omega G(t,s) f[x_0(s), s] ds,$$

deci  $x_0(t)$  este soluție a ecuației integrale (5).

Rezultă că problema găsirii soluțiilor periodice ale sistemului de ecuații diferențiale considerat este echivalentă cu problema găsirii soluțiilor unei ecuații integrale neliniare. Pentru demonstrarea existenței soluțiilor acestei ecuații vom folosi metoda punctului fix.

Considerăm spațiul Banach al funcțiilor vectoriale continue și periodice, de perioadă  $\omega$ , cu norma

$$\|x(t)\| = \max_{0 \leq t \leq \omega} |x(t)|.$$

Definim în acest spațiu operatorul

$$\Omega[x(t)] = \int_0^\omega G(t,s) f[x(s), s] ds$$

care aplică acest spațiu în el însuși. Într-adevăr, din cele ce precedă se știe că  $\Omega[x(t)]$  este soluția periodică a sistemului liniar

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f[x(t), t],$$

deci este o funcție continuă și periodică de perioadă  $\omega$ .

Ecuția integrală se scrie

$$x(t) = \Omega[x(t)]$$

deci soluțiile ei sînt acele puncte ale spațiului care sînt transformate de către operatorul  $\Omega$  în ele însele, deci punctele fixe ale operatorului  $\Omega$ . În acest fel problema demonstrării existenței soluțiilor periodice pentru sistemul de ecuații diferențiale considerat se reduce la aceea a demonstrării existenței punctelor fixe ale operatorului  $\Omega$ . Cea mai simplă teoremă de punct fix o constituie așa-numitul principiu al contractiei, valabil în orice spațiu metric complet. Anume, dacă un operator  $\Omega$  aplică o sferă a spațiului în ea însăși și în plus contractă distanțele, atunci operatorul admite un punct fix și acest punct fix e unic. Condiția de contractare a distanțelor se scrie

$$\rho[\Omega(x), \Omega(y)] \leq \mu \rho(x, y), \quad 0 < \mu < 1.$$

Principiul contractiei reprezintă, după cum se știe, forma abstractă a metodei aproximațiilor succesive.

Să presupunem că pentru orice  $x_1$  și  $x_2$  avem relația :

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leq \beta(t) |x_1 - x_2|, \quad \int_0^\omega \beta(s) ds < \frac{q}{M}, \quad q < 1,$$

$$M = \sup_{0 \leq t, s \leq \omega} |G(t, s)|.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} |\Omega[x_1(t)] - \Omega[x_2(t)]| &= \left| \int_0^\omega G(t, s) \{f[x_1(s), s] - f[x_2(s), s]\} ds \right| \leq \\ &\leq \int_0^\omega |G(t, s)| |f[x_1(s), s] - f[x_2(s), s]| ds \leq \int_0^\omega |G(t, s)| \beta(s) |x_1(s) - \\ &- x_2(s)| ds \leq M \|x_1 - x_2\| \int_0^\omega \beta(s) ds < M \frac{q}{M} \|x_1 - x_2\| = q \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

deci  $\Omega$  este o contracție.

Deducem că  $\Omega$  are un punct fix unic, deci sistemul considerat admite o soluție periodică unică.



Condițiile impuse funcției  $f$  sînt foarte puternice; se cere ca această funcție să fie lipschitziană în tot spațiul, de exemplu ca derivatele ei parțiale să fie mărginite în tot spațiul. De aceea este de dorit să înlocuim această condiție cu o condiție Lipschitz locală. Pentru aceasta să punem

$$f(0, t) = g(t), \quad F(x, t) = f(x, t) - f(0, t).$$

Sistemul (4) se scrie

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t) + F(x, t).$$

Ecuatia integrală echivalentă cu sistemul devine

$$x(t) = \int_0^\omega G(t, s) g(s) ds + \int_0^\omega G(t, s) F[x(s), s] ds.$$

Dar  $\int_0^\omega G(t, s) g(s) ds$  reprezintă soluția periodică unică a sistemului

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t);$$

să notăm această soluție cu  $\Phi(t)$ . Ecuatia integrală (5) se scrie deci

$$x(t) = \Phi(t) + \int_0^\omega G(t, s) F[x(s), s] ds.$$

Să presupunem că există  $0 < q < 1$  astfel încît în sfera  $\|x - \Phi\| \leq L$  cu  $L \geq \frac{q}{1-q} \|\Phi\|$ , funcția  $F$  să verifice condiția

$$|F(x_1, t) - F(x_2, t)| < \beta(t) |x_1 - x_2|, \quad \int_0^\omega \beta(s) ds < \frac{q}{M}.$$

Atunci operatorul  $\Omega$  aplică sfera  $\|x - \Phi\| < L$  în ea însăși și este în această sferă o contracție, deci sistemul admite o soluție periodică unică în sfera  $\|x - \Phi\| \leq L$ .

Într-adevăr, fie  $x(t)$  astfel ca  $\|x - \Phi\| \leq L$ . Avem

$$\begin{aligned} |\Omega[x(t)] - \Phi(t)| &= \left| \int_0^\omega G(t, s) F[x(s), s] ds \right| \leq M \int_0^\omega |F[x(s), s]| ds \leq \\ &\leq M \int_0^\omega \beta(s) |x(s)| ds \leq M \|x\| \int_0^\omega \beta(s) ds < q \|x\| = q \|x - \Phi + \Phi\| \leq \end{aligned}$$

$$\leq q \|x - \Phi\| + q \|\Phi\| \leq qL + q\|\Phi\| \leq qL + q \frac{1-q}{q} L = L$$

deci  $\|\Omega(x) - \Phi\| \leq L$ . Faptul că  $\Omega$  este o contracție se vede ca mai sus.

Dacă înlocuim principiul contracției cu o teoremă de punct fix mai fină, putem înlocui condiția ca  $f$  să fie lipschitziană cu alte condiții mai

slabe. Vom folosi în cele ce urmează teorema lui Schauder sub forma următoare: dacă operatorul  $\Omega$  aplică o sferă a spațiului Banach în ea însăși și în plus  $\Omega$  este complet continuu (compact), atunci  $\Omega$  admite cel puțin un punct fix. Reamintim că un operator se numește complet continuu, dacă aplică orice mulțime mărginită într-o mulțime relativ compactă. În spațiul Banach al funcțiilor vectoriale continue, periodice de perioadă  $\omega$ , condiția ca o mulțime să fie compactă e dată de teorema lui Arzelà: e suficient ca această mulțime să fie formată din funcții uniform mărginite și egal continue.

Să arătăm că operatorul  $\Omega$  considerat mai sus este complet continuu. Dacă  $\|x\| \leq \alpha$ , rezultă  $\|\Omega(x)\| = \sup \left| \int_0^\omega G(t,s) f[x(s), s] ds \right| \leq M \omega L$ , unde  $L = \sup_{|x| \leq \alpha, 0 \leq t \leq \omega} |f(x, t)|$ , deci mulțimea funcțiilor  $\Omega[x(t)]$  este uniform mărginită. Pe de altă parte, funcțiile  $\Omega[x(t)]$  sînt chiar derivabile și avem

$$\frac{d}{dt} \Omega[x(t)] = A \Omega[x(t)] + f[x(t), t]$$

deci

$$\left\| \frac{d}{dt} \Omega[x(t)] \right\| \leq \sup_{0 \leq t \leq \omega} |A(t)| M \omega L + L,$$

deci derivatele funcțiilor  $\Omega[x(t)]$  sînt uniform mărginite, ceea ce arată că aceste funcții sînt egal continue. Mulțimea  $\Omega[x(t)]$  rezultă relativ compactă dacă  $\|x\| \leq \alpha$ , deci operatorul  $\Omega$  este complet continuu. Pentru a putea deduce existența unui punct fix rămîne să găsim condiții care asigură că există o sferă pe care  $\Omega$  o aplică în ea însăși.

Fie  $|f(x, t)| \leq \beta(|x|)$ ; dacă există  $\alpha_0$  astfel încît  $\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0} \leq \frac{1}{M \omega}$ , atunci operatorul  $\Omega$  aplică sfera  $\|x\| \leq \alpha_0$  în ea însăși.

Într-adevăr, dacă  $\|x\| < \alpha_0$  rezultă

$$|f(x(t), t)| < \beta(\alpha_0) \text{ și}$$

$$\|\Omega(x)\| \leq M \omega \beta(\alpha_0) \leq M \omega \frac{\alpha_0}{M \omega} = \alpha_0.$$

În particular, dacă există  $\beta$  și  $K$  astfel încît în tot spațiul  $|f(t, x)| \leq \beta|x| + K$  și  $\beta < \frac{1}{M \omega}$ , atunci  $\beta(\alpha) = \beta \alpha + K$ ,  $\frac{\beta(\alpha)}{\alpha} = \beta + \frac{K}{\alpha}$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\beta(\alpha)}{\alpha} = \beta < \frac{1}{M \omega}$  și există  $\alpha_0$  astfel încît  $\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0} \leq \frac{1}{M \omega}$ .

Rezultă că dacă  $|f(t, x)| \leq \beta|x| + K$  și  $\beta < \frac{1}{M \omega}$ , atunci sistemul (4) admite cel puțin o soluție periodică de perioadă  $\omega$ .

Vom stabili acum un rezultat mai fin care permite anumite aplicații în teoria servomecanismelor neliniare.

TEOREMA 3.5. *Considerăm sistemul*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \lambda e(t) + F(x, t), \quad \lambda > 0.$$

Presupunem că  $A(t)$  și  $e(t)$  sînt periodice de perioadă  $\omega$ , sistemul liniar  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$  nu are alte soluții periodice de perioadă  $\omega$  decît soluția banală,  $F(x, t)$  e periodică în  $t$  de perioadă  $\omega$ ,  $|F(x, t)| \leq L$  pentru orice  $x$  și  $t$ ,  $|F(x_1, t) - F(x_2, t)| < B|x_1 - x_2|$  pentru orice  $x_1, x_2$  și  $t$ . În plus, presupunem că există  $r_0 > 0$  astfel încît pentru  $|x_1| \geq r_0$ ,  $|x_2| \geq r_0$  să avem

$$|F(x_1, t) - F(x_2, t)| \leq \beta|x_1 - x_2|, \quad \beta < \frac{1}{M\omega}, \quad M = \sup |G(t, s)|.$$

În sfîrșit, presupunem că există  $\eta > 0$  astfel încît

$$\text{mes } E = \text{mes } \{t \in [0, \omega], |\Phi(t)| < \eta\} < \frac{1 - M\omega\beta}{MB},$$

$\Phi(t)$  fiind soluția periodică unică a sistemului  $\frac{dx}{dt} = A(t)x + e(t)$ . În aceste condiții, pentru  $\lambda > \lambda_0 = \frac{r_0 + ML\omega}{\eta}$  sistemul admite o soluție periodică unică de perioadă  $\omega$ .

**Observație.** Ipoteza  $|F(x, t)| \leq L$  este suficientă pentru a permite, pe baza considerațiilor precedente, să deducem existența soluției periodice pentru orice  $\lambda$ . De aceea esențialul în teorema pe care o demonstrăm este unicitatea soluției periodice pentru  $\lambda > \lambda_0$ . În ceea ce privește ipotezele ele diferă de cele al rezultatului bazat pe principiul contracției prin faptul că funcției  $F$  i se cere să admită o constantă Lipschitz mică numai pentru  $|x| > r_0$  și în schimb se impune o condiție suplimentară soluției  $\Phi(t)$ . Subliniem faptul că în condițiile teoremei unicitatea se obține numai pentru  $\lambda > \lambda_0$ .

**Demonstrație.** Soluțiile periodice de perioadă  $\omega$  ale sistemului verifică ecuația integrală

$$x(t) = \lambda \Phi(t) + \int_0^\omega G(t, s) F[x(s), s] ds.$$

Rezultă că pentru toate soluțiile periodice avem

$$|x(t) - \lambda \Phi(t)| \leq L\omega M,$$

deci

$$|x(t)| \geq \lambda |\Phi(t)| - L\omega M.$$

Pentru  $t \in [0, \omega] - E_\eta = CE_\eta$  va rezulta  $|x(t)| \geq \lambda \eta - L \omega M > r_0$  dacă  $\lambda > \lambda_0$ . Dacă  $x_1$  și  $x_2$  sînt două soluții periodice de perioadă  $\omega$  avem

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_2(t) &= \int_0^\omega G(t, s) \{F[x_1(s), s] - F[x_2(s), s]\} ds = \\ &= \int_{E_\eta} G(t, s) \{F[x_1(s), s] - F[x_2(s), s]\} ds + \\ &+ \int_{CE_\eta} G(t, s) \{F[x_1(s), s] - F[x_2(s), s]\} ds \end{aligned}$$

deci

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq MB \|x_1 - x_2\| \text{mes } E_\eta + \omega M \beta \|x_1 - x_2\|$$

căci  $\text{mes } CE_\eta \leq \omega$  și pe  $CE_\eta$  avem  $|x_1(t)| > r_0$ ,  $|x_2(t)| > r_0$ .

Rezultă

$$\|x_1 - x_2\| \leq M(B \text{mes } E_\eta + \omega \beta) \|x_1 - x_2\|.$$

Din

$$\text{mes } E_\eta < \frac{1 - M\omega\beta}{MB}$$

rezultă

$$MB \text{mes } E_\eta + M\omega\beta < 1$$

și inegalitatea obținută implică  $\|x_1 - x_2\| = 0$ , deci  $x_1 = x_2$ . Teorema e demonstrată.

**TEOREMA 3.6.** *Dacă la condițiile teoremei precedente adăugăm condiția ca soluția banală a sistemului*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y$$

să fie uniform asimptotic stabilă, deci  $|y(t; t_0, y_0)| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)} |y_0|$ , și în plus

$$\beta < \min \left\{ \frac{\alpha}{K}, \frac{1}{M\omega} \right\},$$

și

$$\text{mes } \{t \in [0, \omega], |\Phi(t)| = 0\} = 0,$$

atunci există  $\lambda_0$  astfel încît pentru  $\lambda > \lambda_0$  soluția periodică unică este uniform asimptotic stabilă.

*Demonstrație.* Fie  $\mu > 0$  arbitrar,  $\tau > \frac{\ln K + BK\mu}{\alpha - K\beta}$ ; atunci

$$q = Ke^{BK\mu} e^{-(\alpha - K\beta)\tau} < 1.$$

Fie  $N$  cel mai mic număr natural astfel ca  $N\omega \geq \tau$ . Deoarece mulțimea punctelor pe care  $\Phi(t)$  se anulează are măsura nulă, rezultă că există  $\eta > 0$  astfel încît

$$\text{mes } \{t \in [t_0, t_0 + N\omega], |\Phi(t)| < \eta\} < \mu.$$

Într-adevăr, funcția  $\Phi(t)$  fiind periodică avem pentru orice  $t_0 \geq 0$

$$\text{mes } \{t \in [t_0, t_0 + N\omega], |\Phi(t)| = 0\} = 0.$$

Dar

$$\{t \in [t_0, t_0 + N\omega], |\Phi(t)| = 0\} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \{t \in [t_0, t_0 + N\omega], |\Phi(t)| < \eta_i\},$$

unde  $\eta_i$  este un șir monoton descrescător care tinde către zero.

Rezultă

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{mes } \{t \in [t_0, t_0 + N\omega], |\Phi(t)| < \eta_i\} = 0,$$

deci există  $\eta > 0$  astfel ca

$$\text{mes } \{t \in [t_0, t_0 + N\omega], |\Phi(t)| < \eta\} < \mu,$$

$\eta$  depinzînd numai de  $\mu$  și nu de  $t_0$  (căci măsura translatatei unei mulțimi este aceeași cu cea a mulțimii date, iar  $\{t \in [t_0, t_0 + N\omega], |\Phi(t)| < \eta_i\}$  este translatata cu  $t_0$  a mulțimii  $\{t \in [0, N\omega], |\Phi(t)| < \eta_i\}$  din cauza periodicității funcției  $\Phi$ ).

Pentru  $\eta$  astfel găsit luăm

$$\lambda_0 = \frac{2r_0 + LM\omega}{\eta}.$$

Punem

$$F_\eta^t = \{s \in [t_0, t], |\Phi(s)| < \eta\}.$$

Pentru  $0 \leq t_0 \leq t \leq t_0 + N\omega$  avem  $\text{mes } F_\eta^t < \mu$ . Fie  $x_0(t)$  soluția periodică unică a sistemului, care există pentru  $\lambda > \lambda_0$  conform teoremei precedente. Din relația

$$x_0(t) = \lambda \Phi(t) + \int_0^\omega G(t, s) F[x_0(s), s] ds$$

rezultă

$$\|x_0(t) - \lambda \Phi(t)\| < LM\omega,$$

deci

$$|x_0(t)| \geq \lambda |\Phi(t)| - LM\omega.$$

De aici deducem că pentru  $s \in [t_0, t] - F_\eta^t = CF_\eta^t$  vom avea  $|x_0(s)| \geq \lambda \eta - LM\omega \geq 2r_0$ . Fie  $x(t)$  o soluție a sistemului,

$$y_0 = x(t_0) - x_0(t_0), \quad y(t) = x(t) - x_0(t).$$

Avem

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + F[y(t) + x_0(t), t] - F[x_0(t), t].$$

**Rezultă**

$$\begin{aligned} y(t) &= C(t; t_0) y_0 + \int_{t_0}^t C(t, s) \{F[y(s) + x_0(s), s] - F[x_0(s), s]\} ds = \\ &= C(t; t_0) y_0 + \int_{F_\eta^t} C(t, s) \{F[y(s) + x_0(s), s] - F[x_0(s), s]\} ds + \\ &+ \int_{CF_\eta^t} C(t, s) \{F[y(s) + x_0(s), s] - F[x_0(s), s]\} ds. \end{aligned}$$

**Fie**

$$K^* = e^{(\alpha - K\beta)\tau}, \quad |y_0| \leq \frac{r_0}{K^*}.$$

Deoarece  $K^* > 1$ , există un interval dincolo de  $t_0$  pentru care  $|y(s)| < r_0$ ; avem

$$|y(s) + x_0(s)| \geq |x_0(s)| - |y(s)|,$$

deci pentru valorile lui  $s$  pentru care  $|y(s)| < r_0$  și care aparțin lui  $CF_\eta^t$  va rezulta

$$|y(s) + x_0(s)| \geq 2r_0 - r_0 = r_0.$$

Rezultă că pentru  $0 \leq t_0 \leq t \leq t_0 + \tau \leq t_0 + N\omega$  vom avea

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)} |y_0| + BK \int_{F_\eta^t} e^{-\alpha(t-s)} |y(s)| ds + \\ &+ K\beta \int_{CF_\eta^t} e^{-\alpha(t-s)} |y(s)| ds \end{aligned}$$

dacă pentru  $t_0 \leq s < t$  avem  $|y(s)| < r_0$ .

Punînd

$$u(t) = |y(t)| e^{\alpha t},$$

inegalitatea se scrie

$$u(t) \leq Ke^{\alpha t_0} |y_0| + \int_{F_\eta^t} BK u(s) ds + \int_{CF_\eta^t} \beta Ku(s) ds.$$

Considerăm funcția măsurabilă

$$k(s) = \begin{cases} BK & \text{pentru } s \in F_\eta^t, \\ \beta K & \text{pentru } s \in CF_\eta^t \end{cases}$$

Inegalitatea precedentă devine

$$u(t) \leq Ke^{\alpha t_0} |y_0| + \int_{t_0}^t k(s) u(s) ds.$$

De aici deducem

$$\begin{aligned} u(t) &\leq K e^{\alpha t_0} |y_0| e^{\int_{t_0}^t k(s) ds} = K e^{\alpha t_0} |y_0| e^{\int_{\eta}^t BK ds} e^{\int_{CF_{\eta}}^t \beta K ds} \leq \\ &\leq K e^{\alpha t_0} |y_0| e^{BK\mu} e^{\beta K(t-t_0)}, \end{aligned}$$

deci

$$|y(t)| < K e^{BK\mu} |y_0| e^{-(\alpha - K\beta)(t-t_0)};$$

de unde

$$|y(t)| \leq K e^{\beta K\mu} |y_0| = q K^* |y_0| \leq q r_0$$

pentru orice  $t \geq t_0$ , ceea ce arată că inegalitatea  $|y(t)| < r_0$  se menține în tot intervalul  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ , deci în tot acest interval avem

$$|y(t)| \leq q K^* |y_0| e^{-(\alpha - K\beta)(t-t_0)}.$$

În particular

$$|y(t_0 + \tau)| \leq q K^* |y_0| e^{-(\alpha - K\beta)\tau} = q |y_0|.$$

Deoarece constanta  $q$  nu depinde de  $t_0$ , putem lua ca moment inițial pe  $t_0 + \tau$  și deducem

$$|y(t_0 + 2\tau)| \leq q |y(t_0 + \tau)| \leq q^2 |y_0|$$

și prin inducție obținem

$$|y(t_0 + n\tau)| \leq q^n |y_0|.$$

Fie acum  $t \geq t_0 \geq 0$ . Există  $n$  astfel ca

$$n\tau \leq t - t_0 < (n+1)\tau$$

deci

$$|y(t)| \leq q K^* |y(t_0 + n\tau)| \leq q K^* q^n |y_0|.$$

Din

$$n+1 > \frac{t-t_0}{\tau}, \quad q < 1$$

rezultă

$$q^{n+1} < q^{\frac{t-t_0}{\tau}} = e^{\frac{t-t_0}{\tau} \ln q};$$

luând

$$\alpha^* = -\frac{\ln q}{\tau},$$

deducem

$$|y(t)| \leq K^* e^{-\alpha^*(t-t_0)} |y_0|,$$

ceea ce arată că soluția  $x_0(t)$  este exponențial stabilă și teorema e demonstrată.

Să observăm că dacă

$$\lambda \geq \frac{m r_0 + LM\omega}{\eta}, \quad m \geq 2,$$

stabilitatea asimptotică va fi asigurată dacă

$$|y_0| \leq \frac{(m-1)r_0}{K^*},$$

deci domeniul de atracție poate fi oricît de mare cu condiția ca  $\lambda$  să fie suficient de mare.

*Aplicații.* 1° Considerăm sistemul

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = \begin{cases} M(t) [\lambda e(t) + C\dot{x} + Dx] & \text{pentru } |\lambda e(t) + C\dot{x} + Dx| \leq 1, \\ \frac{M(t) [\lambda e(t) + C\dot{x} + Dx]}{|\lambda e(t) + C\dot{x} + Dx|} & \text{pentru } |\lambda e(t) + C\dot{x} + Dx| \geq 1, \end{cases}$$

unde  $A, B, C, D$  sînt matrici pătratice constante, de ordinul  $n$ ,  $M(t)$  o matrice pătratică de ordinul  $n$ , cu derivată continuă, periodică de perioadă  $\omega$ ,  $\lambda > 0$ . Presupunem verificate condițiile:

- a) matricile  $C$  și  $D$  sînt permutabile cu  $A$  și cu  $B$ .
- b) Părțile reale ale rădăcinilor ecuațiilor

$$\det (\lambda^2 E + A\lambda + B) = 0,$$

$$\det (C^{-1} D + E \lambda) = 0$$

sînt negative;  $E$  este ca de obicei matricea unitate.

c)  $e(t)$  este periodică, de perioadă  $\omega$ , admite derivată de ordinul al doilea continuă și

$$\text{mes } \{t \in [0, \omega], |e(t)| = 0\} = 0.$$

Atunci există  $\lambda_0$  astfel încît pentru  $\lambda > \lambda_0$  sistemul admite o soluție periodică unică și această soluție este asimptotic stabilă; domeniul ei de atracție crește cu  $\lambda$  și tinde la infinit cînd  $\lambda \rightarrow \infty$ .

*Demonstrație.* Fie

$$g(u) = \begin{cases} u & \text{pentru } |u| \leq 1, \\ \frac{u}{|u|} & \text{pentru } |u| \geq 1. \end{cases}$$

Considerăm sistemul auxiliar

$$\dot{x} = -C^{-1} Dx + C^{-1} y - \lambda C^{-1} e(t),$$

$$\dot{y} = -Ay + z + CM(t)g(y) + \lambda (\dot{e}(t) + Ae(t)),$$

$$\dot{z} = -By + DM(t)g(y) + \lambda Be(t).$$

Acest sistem verifică toate condițiile din teorema precedentă. Sistemul liniar corespunzător se scrie

$$\dot{x} = -C^{-1} Dx + y, \quad \dot{y} = -Ay + z, \quad \dot{z} = -By.$$



Matricea lui este

$$\begin{pmatrix} -C^{-1}D & C^{-1} & O \\ O & -A & E \\ O & -B & O \end{pmatrix};$$

valorile proprii ale acestei matrici vor fi cele ale matricii

$$\begin{pmatrix} -A & E \\ -B & O \end{pmatrix}$$

și cele ale matricii  $-C^{-1}D$ .

Deoarece rădăcinile ecuației

$$\det (C^{-1}D + \lambda E) = 0$$

au părți reale negative, matricea  $-C^{-1}D$  este hurwitziană. Ecuația

$$\det \begin{pmatrix} -A - \lambda E & E \\ -B & -\lambda E \end{pmatrix} = 0$$

se mai poate scrie

$$\det \begin{pmatrix} -A - \lambda E & E \\ -B - A \lambda - \lambda^2 E & O \end{pmatrix} = 0$$

deci

$$\det (\lambda^2 E + \lambda A + B) = 0$$

deci conform ipotezelor și matricea

$$\begin{pmatrix} -A & E \\ -B & O \end{pmatrix}$$

este hurwitziană. Rezultă că soluția banală a sistemului liniar de primă aproximație este asimptotic stabilă.

Considerăm acum sistemul liniar neomogen

$$\dot{x} = -C^{-1}Dx + C^{-1}y - C^{-1}e(t),$$

$$\dot{y} = -Ay + z + (\dot{e}(t) + Ae(t)),$$

$$\dot{z} = -By + Be(t).$$

Acest sistem admite soluția periodică  $x = 0$ ,  $y = e(t)$ ,  $z = 0$ . Datorită proprietăților sistemului omogen, această soluție periodică e unică; conform ipotezei făcute asupra funcției  $e(t)$ , soluția periodică verifică condiția din teorema precedentă. Rămâne deci să verificăm proprietățile termenilor neliniari. Primul grup de ecuații nu conține asemenea termeni. Termenii din ultimele două grupuri sînt de forma  $CM(t)g(y)$  și  $DM(t)g(y)$ .

Cum  $|g(u)| \leq 1$ , condiția de mărginire e verificată.

Mai departe, dacă  $|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1$  avem

$$|g(u_1) - g(u_2)| = |u_1 - u_2|.$$

Dacă  $1 \leq |u_1| \leq |u_2|$  fie  $u_3 = \frac{|u_1|}{|u_2|} u_2$ ; atunci  $|g(u_1) - g(u_2)| =$

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{u_1}{|u_1|} - \frac{u_2}{|u_2|} \right| = \frac{1}{|u_1|} \left| u_1 - \frac{|u_1|}{|u_2|} u_2 \right| = \frac{1}{|u_1|} |u_1 - u_3| \leq \\ &\leq \frac{1}{|u_1|} |u_1 - u_2|. \end{aligned}$$

Dacă

$$|u_1| < 1 < |u_2|,$$

atunci

$$|g(u_1) - g(u_2)| = \left| u_1 - \frac{u_2}{|u_2|} \right| < |u_1 - u_2|.$$

Rezultă că pentru toți  $u_1$  și  $u_2$  avem

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leq |u_1 - u_2|$$

deci  $g$  este lipschitziană. Dacă  $|u_2| \geq |u_1| \geq r_0$ , rezultă

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leq \frac{1}{|u_1|} |u_1 - u_2| \leq \frac{1}{r_0} |u_1 - u_2|$$

deci dacă  $r_0$  este suficient de mare constanta Lipschitz în regiunea  $r \geq r_0$  poate fi luată oricât de mică. Deducem că sînt îndeplinite toate condițiile din teorema precedentă și deci pentru  $\lambda > \lambda_0$  există o soluție periodică unică a sistemului și această soluție este exponențial stabilă. Sistemul dat inițial se poate scrie

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -Bx - Ay + \varphi(x, y, t),$$

unde

$$\varphi(x, y, t) = \begin{cases} M(t) [\lambda e(t) + Cy + Dx] & \text{pentru } |\lambda e(t) + Cy + Dx| \leq 1 \\ \frac{M(t) [\lambda e(t) + Cy + Dx]}{|\lambda e(t) + Cy + Dx|} & \text{pentru } |\lambda e(t) + Cy + Dx| \geq 1. \end{cases}$$

Se vede că  $\varphi$  e mărginită și cum sistemul liniar

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -Bx - Ay$$

are matricea  $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -B & -A \end{pmatrix}$  hurwitziană, rezultă că sistemul dat admite

o soluție periodică de perioadă  $\omega$ . Pentru a deduce unicitatea și stabilitatea acestei soluții vom arăta că orice soluție a sistemului dat verifică sistemul auxiliar; cum soluția periodică a sistemului auxiliar e unică, soluția periodică a sistemului dat, care există, rezultă unică. Din stabi-

litatea asimptotică a soluției periodice a sistemului auxiliar va rezulta stabilitatea asimptotică a soluției periodice și pentru sistemul dat.

Fie deci  $x(t)$  o soluție oarecare a ecuației date. Punem

$$y(t) = \lambda e(t) + C\dot{x}(t) + Dx(t).$$

Avem

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = M(t)g(y(t)).$$

Pentru  $|u| \neq 1$  funcția  $g(u)$  e derivabilă, deci pentru valorile  $t$  pentru care  $|y(t)| \neq 1$  avem

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = M(t) \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y} + \dot{M}g(y).$$

Deducem

$$\begin{aligned} \ddot{y} + A\dot{y} + By &= \lambda \ddot{e} + C\ddot{x} + D\ddot{x} + A(\lambda \dot{e} + C\dot{x} + D\dot{x}) + B(\lambda e + C\dot{x} + Dx) \\ &= \lambda(\ddot{e} + A\dot{e} + Be) + C(\ddot{x} + A\dot{x} + Bx) + D(\ddot{x} + A\dot{x} + Bx) = \\ &= \lambda(\ddot{e} + A\dot{e} + Be) + C(M(t) \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y} + \dot{M}g(y)) + DMg(y). \end{aligned}$$

Să punem

$$z(t) = \dot{y}(t) + Ay(t) - CM(t)g(y(t)) - \lambda(\dot{e}(t) + Ae(t)).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \ddot{y}(t) + A\dot{y}(t) - C\dot{M}(t)g(y(t)) - CM(t) \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y}(t) - \lambda(\ddot{e}(t) + \\ &+ A\dot{e}(t)) = -By(t) + \lambda(\ddot{e}(t) + A\dot{e}(t) + Be(t)) + CM(t) \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y}(t) + \\ &+ C\dot{M}(t)g(y(t)) + DM(t)g(y(t)) - C\dot{M}(t)g(y(t)) - \lambda(\ddot{e}(t) + A\dot{e}(t)) - \\ &- CM(t) \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y}(t). \end{aligned}$$

deci

$$\dot{z}(t) = -By(t) + \lambda Be(t) + DM(t)g(y(t)).$$

În definitiv, dacă  $x(t)$  este o soluție oarecare a sistemului dat, funcțiile  $x(t)$ ,  $y(t) = \lambda e(t) + C\dot{x}(t) + Dx(t)$ ,  $z(t) = \dot{y}(t) + Ay(t) - CM(t)g(y(t)) - \lambda(\dot{e}(t) + Ae(t))$  formează o soluție a sistemului auxiliar. Cu aceasta demonstrația este încheiată.

2° Să considerăm sistemul

$$\dot{x} = A(t)x + \sum_{i=1}^m k^i(t)f(\sigma_i) + \lambda e(t),$$

unde  $A(t)$  este o matrice pătratică, continuă și periodică de perioadă  $\omega$ ,  $k^i(t)$  funcții vectoriale continue și periodice de perioadă  $\omega$ ,  $f(u)$  o funcție scalară de variabilă reală, definită prin :

$$f(u) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } |u| \geq 1, \\ u & \text{pentru } |u| \leq 1, \end{cases}$$

iar  $\sigma_i = (\beta^i(t), x) + \lambda \eta_i(t)$ , unde  $\beta^i(t)$  sînt vectori periodici, de perioadă  $\omega$ , cu derivate de ordinul întîi continue,  $\eta_i$  sînt funcții scalare, periodice de perioadă  $\omega$ , cu derivate de ordinul întîi continue,  $e(t)$  periodică de perioadă  $\omega$ , cu derivată continuă.

Presupunem că :

a) există un determinant de ordinul  $m$  al matricii vectorilor  $\beta^i(t)$  care e diferit de zero pentru toți  $t$ ;

b) sistemul  $\dot{x} = A(t)x$  are soluția banală uniform asimptotic stabilă ;

c) dacă  $\Phi_i(t)$  sînt componentele soluției periodice unice de perioadă  $\omega$  a sistemului  $\frac{dx}{dt} = A(t)x + e(t)$  avem pentru  $i = 1, 2, \dots, m$  :

$$\text{mes} \left\{ t \in [0, \omega], \left| \eta_i(t) + \sum_{k=1}^n \beta_k^i(t) \Phi_k(t) \right| = 0 \right\} = 0.$$

În aceste condiții există  $\lambda_0 > 0$  astfel încît pentru  $\lambda \geq \lambda_0$  sistemul dat să admită o soluție periodică unică de perioadă  $\omega$  și această soluție este exponențial stabilă.

*Demonstrație.* Presupunem că este diferit de zero determinantul format cu primele  $m$  linii și  $m$  coloane ale matricii vectorilor  $\beta^i(t)$ . Considerăm matricea nesingulară

$$B(t) = \begin{pmatrix} \beta_1^1(t) & \beta_2^1(t) & \dots & \beta_m^1(t) & \beta_{m+1}^1(t) & \dots & \beta_n^1(t) \\ \beta_1^2(t) & \beta_2^2(t) & \dots & \beta_m^2(t) & \beta_{m+1}^2(t) & \dots & \beta_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^m(t) & \beta_2^m(t) & \dots & \beta_m^m(t) & \beta_{m+1}^m(t) & \dots & \beta_n^m(t) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

vectorul

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_m(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

și transformarea liniară

$$y = B(t)x + \lambda \eta(t)$$

Avem

$$\begin{aligned} y_1 = \sigma_1, y_2 = \sigma_2, \dots, y_m = \sigma_m, y_{m+1} = x_{m+1}, \dots, y_n = x_n, \\ \dot{y} = \dot{B}x + B\dot{x} + \lambda\dot{\eta} = \dot{B}B^{-1}(y - \lambda\eta) + B(Ax + \Sigma k^i f(\sigma_i) + \lambda e) + \lambda\dot{\eta} = \\ = \dot{B}B^{-1}y - \lambda\dot{B}B^{-1}\eta + BAB^{-1}(y - \lambda\eta) + \lambda Be + \lambda\dot{\eta} + \Sigma B k^i f(\sigma_i) = \\ = (BAB^{-1} + \dot{B}B^{-1})y + \lambda Be(t) + \lambda\dot{\eta}(t) - \lambda(\dot{B}B^{-1} + BAB^{-1})\eta(t) + \\ + B \sum_{i=1}^m k^i(t) f(y_i). \end{aligned}$$

Acest sistem îndeplinește toate condițiile teoremei 3.6.

Într-adevăr, sistemul liniar

$$\frac{dz}{dt} = (BAB^{-1} + \dot{B}B^{-1})z$$

se obține din

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

prin transformarea  $z = B(t)x$  și are soluția banală uniform asimptotic stabilă.

Sistemul liniar neomogen

$$\dot{y} = (BAB^{-1} + \dot{B}B^{-1})y + Be(t) + \dot{\eta}(t) - (BAB^{-1} + \dot{B}B^{-1})\eta(t)$$

admite soluția periodică  $\eta(t) + B\Phi(t)$  și conform ipotezei această soluție se anulează pe o mulțime de măsură nulă. Termenii neliniari sînt dați de  $B \Sigma k^i f(y_i)$  și se vede că sînt mărginiți, lipschitzieni și că dacă  $|y_i| \geq 1$  pentru  $i = 1, 2, \dots, m$ , constanta lipschitziană este nulă. Rezultă că sistemul în  $y$  admite o soluție periodică unică, asimptotic stabilă.

Dacă  $y(t)$  este această soluție, atunci

$$x(t) = B^{-1}(t)[y(t) - \lambda\eta(t)]$$

este soluția periodică a sistemului dat și se vede imediat că și ea este unică și asimptotic stabilă.

#### § 4. SISTEME CU PARAMETRU MIC

O metodă foarte importantă din punct de vedere practic în studiul sistemelor neliniare este așa-numita *metodă a parametrului mic*. De multe ori elementele neliniare intervin în ecuații înmulțite cu un parametru mic. Aceasta face să apară ideea că ele pot fi neglijate, studiindu-se numai ecuațiile care se obțin pentru valoarea nulă a parametrului. Această neglijare trebuie însă justificată și teoria stabilește tocmai cazurile cînd ea este permisă, indicînd în același timp fenomenele noi care apar din considerarea termenilor neliniari.

Să considerăm un sistem de forma

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x, t) + \varepsilon X_1(x, t, \varepsilon), \quad (6)$$

unde  $X_0$  și  $X_1$  sînt periodice în raport cu  $t$  cu perioadă  $\omega$  și verifică condițiile obișnuite de regularitate (vom presupune că admit derivate parțiale continue). Pentru  $\varepsilon = 0$  se obține sistemul

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x, t) \quad (7)$$

pe care-l vom numi *sistem generator*. Presupunem că sistemul generator admite o soluție periodică  $x_0(t)$ ; vom numi această soluție, *soluție generatoare*. Problema constă în a stabili unele condiții care să asigure că există  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încît dacă  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  sistemul (6) admite o soluție periodică  $x(t, \varepsilon)$  cu proprietatea

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t),$$

deci o soluție pentru care  $x_0(t)$  reprezintă o bună aproximație pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic.

Fie  $x(t, p, \varepsilon)$  soluția sistemului (6) cu  $x(0, p, \varepsilon) = p$ . Condiția ca această soluție să fie periodică se scrie  $x(\omega, p, \varepsilon) = x(0, p, \varepsilon)$ , deci  $x(\omega, p, \varepsilon) - p = 0$ . Observăm că  $x(t, p, 0) = x_0(t, p)$ , unde  $x_0(t, p)$  este soluția sistemului (7) cu  $x_0(0, p) = p$ . Notăm  $f(p, \varepsilon) = x(\omega, p, \varepsilon) - p$ .

Constatăm că ecuația  $f(p, \varepsilon) = 0$  e verificată de punctul  $(p_0, 0)$ , unde  $p_0 = x_0(0)$ , căci sistemul generator admite soluția periodică  $x_0(t)$ .

Pe baza teoremei funcțiilor implicite rezultă că dacă  $\det \frac{\partial f}{\partial p} \neq 0$  în punctul  $(p_0, 0)$ , atunci există  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încît pentru  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  există  $p(\varepsilon)$  continuă, cu  $p(0) = 0$  și  $f[p(\varepsilon), \varepsilon] \equiv 0$ . Soluția  $x(t, p(\varepsilon), \varepsilon)$  a sistemului va fi soluția periodică  $x(t, \varepsilon)$  căutată.

Rămîne deci să găsim semnificația condiției  $\det \frac{\partial f}{\partial p} \neq 0$  în punctul

$(p_0, 0)$ . Observăm că  $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} x(\omega, p, \varepsilon) - E$ ,  $E$  fiind matricea unitate.

Rezultă de aici că  $\det \frac{\partial f}{\partial p} \neq 0$  în punctul  $(p_0, 0)$  e echivalent cu a cere

ca matricea  $\frac{\partial}{\partial p} x(\omega, p, \varepsilon)$  pentru  $\varepsilon = 0$ ,  $p = p_0$  să nu admită valoarea

proprie 1. Mai departe,  $\frac{\partial}{\partial p} x(\omega, p, \varepsilon)$  pentru  $\varepsilon = 0$ ,  $p = p_0$  coincide cu

$\frac{\partial}{\partial p} x(\omega, p, 0)$  pentru  $p = p_0$ , deci cu  $\frac{\partial}{\partial p} x(t, p, 0)$  pentru  $t = \omega$ ,  $p = p_0$ ,

sau  $\frac{\partial}{\partial p} x_0(t, p)$  pentru  $t = \omega$ ,  $p = p_0$ .

Rezultă de aici că existența soluției periodice pentru  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  depinde numai de sistemul generator (7). Din

$$\frac{dx_0(t, p)}{dt} = X_0[x_0(t, p), t]$$

rezultă

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{dx_0(t, p)}{dt} = \frac{\partial}{\partial p} X_0[x_0(t, p), t] = \frac{\partial}{\partial x} X_0[x_0(t, p), t] \frac{\partial}{\partial p} x_0(t, p),$$

deci

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial p} x_0(t, p) = \frac{\partial}{\partial x} X_0[x_0(t, p), t] \frac{\partial}{\partial p} x_0(t, p).$$

Pentru  $p = p_0$  se capătă

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial p} x_0(t, p_0) = \frac{\partial}{\partial x} X_0[x_0(t, p_0), t] \frac{\partial}{\partial p} x_0(t, p_0).$$

Rezultă că matricea  $\frac{\partial}{\partial p} x_0(t, p_0)$  reprezintă o matrice de soluții a sistemului liniar

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} X_0[x_0(t), t] u \quad (8)$$

(sistemul în variații corespunzător soluției generatoare).

Cum  $x_0(0, p) = p$ , rezultă că  $\frac{\partial}{\partial p} x_0(t, p)$  pentru  $t = 0$  este chiar  $E$ , deci

$\frac{\partial}{\partial p} x_0(t, p_0)$  este o matrice fundamentală de soluții a sistemului în variații. Deoarece  $x_0(t)$  este periodică de perioadă  $\omega$ , matricea  $\frac{\partial}{\partial x} X_0[x_0(t), t]$  este periodică de perioadă  $\omega$ . Matricea  $\frac{\partial}{\partial p} x_0(t, p)$  pentru  $p = p_0$ ,  $t = \omega$  este deci chiar matricea de monodromie a sistemului liniar (8). Condiția ca această matrice să nu aibă valoarea proprie 1 este echivalentă cu cererea ca sistemul în variații să nu aibă soluție periodică de perioadă  $\omega$ . Am obținut astfel:

**TEOREMA 3.7.** *Dacă sistemul în variații corespunzător soluției generatoare nu are altă soluție periodică de perioadă  $\omega$  decât soluția banală, atunci există  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încât pentru  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  sistemul (6) admite o soluție periodică  $x(t, \varepsilon)$  unică cu proprietatea*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t),$$

și această soluție depinde continuu de  $\varepsilon$ .

Un caz particular important este cel în care sistemul generator este liniar, deci cazul sistemelor de forma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + P(t) + \varepsilon X(x, t, \varepsilon).$$

Sistemul (8) coincide în acest caz cu

$$\frac{du}{dt} = A(t)u$$

și teorema arată că dacă soluția generatoare reprezintă o oscilație forțată în cazul de nerezonanță, atunci pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic sistemul neliniar admite o soluție periodică unică a cărei primă aproximație este soluția generatoare.

Să considerăm acum cazul când sistemul în variații (8) are soluții periodice de perioadă  $\omega$ ; atunci sistemul adjunct sistemului (8) are același număr de soluții periodice de perioadă  $\omega$  liniar independente. Notăm cu  $W(t)$  matricea ale cărei linii sînt aceste soluții.

Să presupunem că sistemul (6) admite o soluție periodică  $x(t, \varepsilon)$  astfel ca

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t).$$

Notăm

$$y(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - x_0(t).$$

Deducem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t, \varepsilon) &= X_0[x(t, \varepsilon), t] + \varepsilon X_1[x(t, \varepsilon), t, \varepsilon] - X_0[x_0(t), t] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} X_0[x_0(t), t] y(t, \varepsilon) + Y_0[y(t, \varepsilon), t] + \varepsilon X_1[y(t, \varepsilon) + x_0(t), t, \varepsilon], \end{aligned}$$

unde  $Y_0(0, t) \equiv 0$ .

Deoarece  $y(t, \varepsilon)$  este periodică, rezultă de aici că sistemul

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} X_0[x_0(t), t] u + Y_0[y(t, \varepsilon), t] + \varepsilon X_1[y(t, \varepsilon) + x_0(t), t, \varepsilon]$$

admite o soluție periodică. Pe baza teoremei 3.2 rezultă

$$\int_0^\omega W(s) \{Y_0[y(s, \varepsilon), s] + \varepsilon X_1[y(s, \varepsilon) + x_0(s), s, \varepsilon]\} ds = 0.$$

De aici rezultă că

$$\int_0^\omega W(s) X_1[x_0(s), s, 0] ds = 0.$$

Într-adevăr, dacă nu ar fi așa, am avea

$$\left| \int_0^\omega W(s) X_1[x_0(s), s, 0] ds \right| = c > 0.$$



Din  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(s, \varepsilon) = 0$  și din continuitatea funcției  $X_1$  rezultă că există

$\varepsilon_0 > 0$  astfel ca pentru  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  să avem

$$\left| \int_0^\omega W(s) X_1[y(s, \varepsilon) + x_0(s), s, \varepsilon] ds \right| > \frac{c}{2}.$$

Dacă  $X_1$  e derivabilă în raport cu  $\varepsilon$ , atunci  $x(t, \varepsilon)$  e derivabilă în raport cu  $\varepsilon$ , deci  $y(t, \varepsilon)$  e derivabilă în raport cu  $\varepsilon$ , deci  $|y(t, \varepsilon)| < L|\varepsilon|$  pentru  $t \in [0, \omega]$ . Din diferențiabilitatea lui  $X_0(x, t)$  în raport cu  $x$  rezultă

$$|Y_0[y(s, \varepsilon), s]| = o(|y(s, \varepsilon)|) = o(\varepsilon).$$

Rezultă

$$\left| \varepsilon \int_0^\omega W(s) X_1[y(s, \varepsilon) + x_0(s), s, \varepsilon] ds \right| > \frac{c}{2} \varepsilon$$

și

$$\left| \int_0^\omega W(s) Y_0[y(s, \varepsilon), s] ds \right| = o(\varepsilon)$$

ceea ce este contradictoriu căci cele două mărimi sînt egale.

Am stabilit astfel următoarea :

PROPOZIȚIE. *Dacă sistemul (8) admite soluții periodice de perioadă  $\omega$  și dacă sistemul (6) admite o soluție periodică  $x(t, \varepsilon)$  astfel că  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t)$ , atunci*

$$\int_0^\omega W(s) X_1[x_0(s), s, 0] ds = 0,$$

$W(t)$  fiind matricea ale cărei linii sînt soluțiile periodice ale sistemului adjunct sistemului (8).

Dacă soluția generatoare face parte dintr-o familie de soluții periodice depinzînd de un număr de parametri, sîntem în condițiile propoziției deoarece derivatele soluțiilor în raport cu parametrii sînt soluții periodice ale sistemului (8).

Condiția din propoziție permite să se găsească acele valori ale parametrilor pentru care soluția corespunzătoare este efectiv prima aproximație a unei soluții periodice a sistemului (6).

Vom redemonstra pe o cale puțin diferită propoziția de mai sus; această nouă demonstrație ne va da posibilitatea de a merge mai departe în studiul cazului cînd soluția generatoare face parte dintr-o familie de soluții depinzînd de un număr de parametri.

Fie  $U(t)$  matricea fundamentală de soluții a sistemului (8),  $l_j$  vectorii inițiali ai soluțiilor periodice ale sistemului adjunct sistemului (8); avem  $l_j \{U(\omega) - E\} = 0$ . Dacă  $\rho_j$  sînt vectorii inițiali ai soluțiilor periodice ale sistemului (8) avem

$$\{U(\omega) - E\} \rho_j = 0, (j = n - k + 1, \dots, n).$$

Considerăm acum vectorii  $l_1, \dots, l_{n-k}$  și  $\rho_1, \dots, \rho_{n-k}$  astfel încât sistemele de vectori  $l_i$  și  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), să fie formate din vectori liniar independenți. Fie  $S$  matricea ale cărei linii sînt  $l_i$  și  $T$  matricea ale cărei coloane sînt  $\rho_i$ . Avem

$$S [U(\omega) - E] T = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dacă sistemul (8) admite exact  $k$  soluții periodice liniar independente, atunci matricea  $U(\omega) - E$  are rangul  $n - k$ , deci  $\det \Delta \neq 0$ . Condiția ca soluția  $x(t, p, \varepsilon)$  a sistemului (6) să fie periodică se scrie  $x(\omega, p, \varepsilon) - p = 0$ . Putem scrie

$$x(\omega, p, \varepsilon) = x(\omega, p_0, 0) + \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial p} (p - p_0) + \varepsilon \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + o(|\varepsilon| + |p - p_0|).$$

Cum

$$x(\omega, p_0, 0) = p_0,$$

condiția de periodicitate se scrie

$$\left\{ \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial p} - E \right\} (p - p_0) + \varepsilon \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + o(|\varepsilon| + |p - p_0|) = 0.$$

Dar am văzut că

$$\frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial p} = U(\omega),$$

deci condiția de periodicitate se scrie

$$\{U(\omega) - E\} (p - p_0) + \varepsilon \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + o(|\varepsilon| + |p - p_0|) = 0.$$

Calculăm pe  $\frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon}$ . Avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x(t, p, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{d}{dt} x(t, p, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_0[x(t, p, \varepsilon), t] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon X_1[x(t, p, \varepsilon), t, \varepsilon] = \frac{\partial X_0[x(t, p, \varepsilon), t]}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x(t, p, \varepsilon) + \\ &+ X_1[x(t, p, \varepsilon), t, \varepsilon] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_1[x(t, p, \varepsilon), t, \varepsilon]. \end{aligned}$$

De aici, pentru  $\varepsilon = 0, p = p_0$ , se capătă

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x(t, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial X_0(x_0(t), t)}{\partial x} \frac{\partial x(t, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + X_1[x_0(t), t, 0]$$

deci  $\frac{\partial x(t, p_0, 0)}{\partial \varepsilon}$  verifică sistemul

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial X_0[x_0(t), t]}{\partial x} z + X_1[x_0(t), t, 0]$$

și condiția inițială  $z(0) = 0$ , deoarece  $x(0, p, \varepsilon) = p$ , deci

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} x(0, p, \varepsilon) = 0.$$

Rezultă de aici, pe baza formulei variației constantelor că

$$\frac{\partial x(t, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} = U(t) \int_0^t U^{-1}(s) X_1[x_0(s), s, 0] ds,$$

deci

$$\frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} = U(\omega) \int_0^\omega U^{-1}(s) X_1[x_0(s), s, 0] ds.$$

Vectorii  $l_i$  fiind liniar independenți condiția de periodicitate se poate scrie sub forma echivalentă

$$l_i [U(\omega) - E](p - p_0) + \varepsilon l_i \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + o(|\varepsilon| + |p - p_0|) = 0,$$

$$(i = 1, \dots, n - k)$$

$$l_j [U(\omega) - E](p - p_0) + \varepsilon l_j \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + o(|\varepsilon| + |p - p_0|) = 0,$$

$$(j = n - k + 1, \dots, n).$$

Dar

$$l_j [U(\omega) - E] = 0,$$

deci al doilea grup de ecuații se scrie

$$\varepsilon l_j \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + o(|\varepsilon| + |p - p_0|) = 0.$$

Căutăm soluția  $p(\varepsilon)$  sub forma

$$p(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon \sum_{i=1}^{n-k} \beta_i(\varepsilon) \rho_i$$

Sistemul de ecuații devine

$$\varepsilon \sum_j l_i [U(\omega) - E] \rho_j \beta_j(\varepsilon) + \varepsilon l_i \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + o(|\varepsilon| + |p - p_0|) = 0,$$

$$(i = 1, \dots, n - k)$$

$$\varepsilon l_j \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + o(|\varepsilon| + |p - p_0|) = 0, (j = n - k + 1, \dots, n).$$

Dar

$|p - p_0| = O(\varepsilon)$  și ecuațiile se scriu

$$\sum_i l_i [U(\omega) - E] \rho_i \beta_i + l_i \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + O(|\varepsilon|) = 0, (i = 1, \dots, n-k)$$

$$l_j \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} + O(|\varepsilon|) = 0, (j = n-k+1, \dots, n). \quad (9)$$

Pentru ca acest sistem să admită soluții e necesar în primul rând ca

$$l_j \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad (j = n-k+1, \dots, n),$$

ceea ce conduce la

$$l_j U(\omega) \int_0^\omega U^{-1}(s) X_1[x_0(s), s, 0] ds = 0$$

deci

$$\int_0^\omega l_j U^{-1}(s) X_1[x_0(s), s, 0] ds = 0$$

sau

$$\int_0^\omega W(s) X_1[x_0(s), s, 0] ds = 0.$$

În afară de aceasta este necesar ca sistemul

$$\sum_i l_i [U(\omega) - E] \rho_i \beta_i + l_i \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} = 0$$

să aibă soluții.

Matricea acestui sistem este însă chiar  $\Delta$  și  $\det \Delta \neq 0$  deci sistemul are întotdeauna soluții.

Să presupunem acum că soluția  $x_0(t)$  face parte dintr-o familie de soluții periodice, de perioadă  $\omega$ , depinzând de  $k$  parametri; notăm cu

$x_0(t, \alpha)$  această familie. Atunci  $\frac{\partial x_0(t, \alpha)}{\partial \alpha_i}$  vor fi soluții periodice ale sis-

temului (8), liniar independente, dacă  $k$  parametri sînt independenți. Presupunem că sistemul (8) nu are alte soluții periodice independente, deci că are exact  $k$  soluții periodice independente. Atunci putem repeta calculele de mai sus plecînd de la o soluție  $x_0(t, \alpha)$  oarecare și obținem condiția necesară ca să existe o soluție periodică de perioadă  $\omega$ ,  $x(t, \varepsilon, \alpha)$ , a sistemului (6) astfel ca

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon, \alpha) = x_0(t, \alpha),$$

sub forma

$$P(\alpha) \equiv \int_0^\omega W_\alpha(s) X_1[x_0(s, \alpha), s, 0] ds = 0.$$

Presupunem că ecuația  $P(\alpha) = 0$  admite o soluție  $\alpha = \alpha_0$  astfel încât  $\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha}$  pentru  $\alpha = \alpha_0$  să fie nesingulară.

Arătăm că în acest caz sistemul (6) admite o soluție periodică de perioadă  $\omega$ ,  $x(t, \varepsilon)$ , astfel ca

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \alpha_0).$$

Sistemul de ecuații (9) este verificat pentru  $\varepsilon = 0$ ,  $\alpha = \alpha_0$  de valorile  $\beta = \beta_0$  date de

$$\sum_j l_j [U_{\alpha_0}(\omega) - E] \rho_j \beta_j + l_i \frac{\partial x(\omega, p_0, 0)}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Jacobianul sistemului (9) în raport cu  $\beta$  și  $\alpha$  pentru  $\varepsilon = 0$ ,  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta = \beta_0$  este egal cu

$$\det \begin{pmatrix} \Delta & \Delta_1 \\ 0 & \frac{\partial P(\alpha_0)}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \det \Delta \det \frac{\partial P(\alpha_0)}{\partial \alpha}$$

și în ipotezele noastre este diferit de zero. Pe baza teoremei funcțiilor implicite există  $\varepsilon_0 > 0$  și funcțiile  $\alpha(\varepsilon)$ ,  $\beta(\varepsilon)$  definite pentru  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , verificând sistemul (9) și astfel ca  $\alpha(0) = \alpha_0$ ,  $\beta(0) = \beta_0$ .

Punînd

$$p(\varepsilon) = p_0(\alpha(\varepsilon)) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n-k} \beta_i(\varepsilon) \rho_i[\alpha(\varepsilon)]$$

soluția  $x(t, p(\varepsilon), \varepsilon)$  va fi periodică de perioadă  $\omega$  și pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  devine

$$x_0(t, p_0(\alpha_0)) = x_0(t, \alpha_0).$$

Am demonstrat astfel următoarea teoremă:

**TEOREMA 3.8.** *Dacă sistemul (7) admite o familie de soluții  $x_0(t, \alpha)$  periodice de perioadă  $\omega$ , astfel încît sistemul în variații corespunzător să admită pentru orice  $\alpha$  exact  $k$  soluții periodice independente de perioadă  $\omega$ , atunci pentru orice valoare  $\alpha_0$  astfel ca*

$$P(\alpha_0) = 0, \quad \det \frac{\partial P(\alpha_0)}{\partial \alpha} \neq 0,$$

unde

$$P(\alpha) \equiv \int_0^\omega W_\alpha(s) X_1[x_0(s, \alpha), s, 0] ds,$$

există o soluție  $x(t, \varepsilon)$  a sistemului (6), periodică de perioadă  $\omega$  și astfel ca  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \alpha_0)$ .

*Aplicații.* 1° Un caz particular important este cel al ecuației

$$\ddot{x} + n^2 x + f(t) = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \varepsilon).$$

unde  $f$  și  $F$  sînt periodice în raport cu  $t$  cu perioadă  $2\pi$ . Sistemul în variații este aici

$$\ddot{x} + n^2 x = 0$$

și are soluțiile periodice cu perioadă  $\frac{2\pi}{n}$  deci și de perioadă  $2\pi$ . Funcția

$f(t)$  este presupusă astfel încît ecuația generatoare

$$\ddot{x} + n^2 x + f(t) = 0$$

să aibă soluție periodică de perioadă  $2\pi$ . Atunci toate soluțiile sistemului generator sînt periodice cu perioadă  $2\pi$  și formează o familie cu doi parametri,

$$x_0 = \varphi(t) + M_0 \cos nt + N_0 \sin nt.$$

Avem

$$U(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos nt & \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nt \\ -\sqrt{n} \sin nt & \sqrt{n} \cos nt \end{pmatrix}, \quad U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{n} \cos nt & -\frac{1}{\sqrt{n}} \sin nt \\ \sqrt{n} \sin nt & \frac{1}{\sqrt{n}} \cos nt \end{pmatrix}$$

$$X_1[x_0(s, \alpha), s, 0] = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

$$F = F[s, \varphi(s) + M_0 \cos ns + N_0 \sin ns, \dot{\varphi}(s) - M_0 n \sin ns + N_0 n \cos ns, 0].$$

Ecuațiile care determină pe  $M_0$  și  $N_0$  se scriu

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin ns F[s, x_0(s), \dot{x}_0(s), 0] ds = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos ns F[s, x_0(s), \dot{x}_0(s), 0] ds = 0$$

deci

$$P(M_0, N_0) \equiv \int_0^{2\pi} F[s, \varphi(s) + M_0 \cos ns + N_0 \sin ns, \dot{\varphi}(s) - M_0 n \sin ns + N_0 n \cos ns, 0] \sin ns ds = 0,$$

$$Q(M_0, N_0) \equiv \int_0^{2\pi} F[s, \varphi(s) + M_0 \cos ns + N_0 \sin ns, \dot{\varphi}(s) - M_0 n \sin ns + N_0 n \cos ns, 0] \cos ns ds = 0,$$

$$\frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)} \neq 0.$$

2° Să considerăm ecuația

$$\ddot{x} + \frac{1}{n^2} x + f(t) = \varepsilon F[t, x, \dot{x}, \varepsilon].$$

Sistemul în variații nu are alte soluții de perioadă  $2\pi$  decât soluția banală, deci pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic există o soluție periodică de perioadă  $2\pi$  unică. În același timp, toate soluțiile sistemului generator sînt periodice cu perioadă  $2n\pi$ , funcțiile  $f$  și  $F$  avînd perioadă  $2\pi$  au și perioadă  $2n\pi$ , deci în vecinătatea soluțiilor sistemului generator care verifică relațiile din teorema 3.8 pot apărea pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic soluții periodice de perioadă  $2n\pi$  care nu mai au perioadă  $2\pi$ . Oscilațiile de acest tip se numesc subarmonice iar fenomenul descris mai sus a fost numit de Mandelstamm și Papalexi care l-au descoperit în 1932, rezonanță de genul  $n$ .

În încheierea acestui punct să facem cîteva observații asupra stabilității soluției periodice a sistemului (6) în cazul cel mai simplu. Să presupunem că soluția banală a sistemului (8) este asimptotic stabilă; atunci, evident, sistemul (8) nu are alte soluții periodice decât cea banală și pe baza teoremei 3.7 sistemul (6) admite o soluție periodică unică  $x(t, \varepsilon)$  cu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t).$$

Să facem în sistemul (6) schimbarea de variabile  $y = x - x(t, \varepsilon)$ . Obținem

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} = X_0[y + x(t, \varepsilon), t] + \varepsilon X_1[y + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon] - \\ &- X_0[x(t, \varepsilon), t] - \varepsilon X_1[x(t, \varepsilon), t, \varepsilon] = \frac{\partial X_0[x(t, \varepsilon), t]}{\partial x} y + o(|y|) + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial X_1[x(t, \varepsilon), t, \varepsilon]}{\partial x} y + o(|y|) = \frac{\partial X_0[x_0(t), t]}{\partial x} y + \left[ \frac{\partial X_0[x(t, \varepsilon), t]}{\partial x} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial X_0[x_0(t), t]}{\partial x} \right] y + \varepsilon \frac{\partial X_1[x(t, \varepsilon), t, \varepsilon]}{\partial x} y + o(|y|). \end{aligned}$$

Pentru  $|\varepsilon|$  și  $|y|$  suficient de mici avem

$$\begin{aligned} \left| \left[ \frac{\partial X_0[x(t, \varepsilon), t]}{\partial x} - \frac{\partial X_0[x_0(t), t]}{\partial x} \right] y + \varepsilon \frac{\partial X_1[x(t, \varepsilon), t, \varepsilon]}{\partial x} y + \right. \\ \left. + o(|y|) \right| < \beta |y| \end{aligned}$$

cu  $\beta$  oricît de mic; cum prin ipoteză soluția banală a sistemului (8) este asimptotic stabilă (sistemul (8) fiind un sistem liniar cu coeficienți perio-

deci, soluția este uniform asimptotic stabilă, deci exponențial stabilă), rezultă că putem aplica teorema fundamentală de stabilitate după prima aproximație și deducem că soluția banală a sistemului în  $y$  este asimptotic stabilă. Am stabilit astfel următoarea :

PROPOZIȚIE. *Dacă soluția banală a sistemului în variații (8) este asimptotic stabilă, atunci pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic sistemul (6) admite o soluție periodică unică  $x(t, \varepsilon)$  cu proprietatea*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t)$$

*și această soluție este asimptotic stabilă.*

## § 5. METODA LUĂRII MEDIEI

În cele ce urmează vom prezenta unele cazuri particulare ale metodei generale elaborate de N. M. Krilov și N. N. Bogoliubov, cunoscută sub numele de „metoda luării mediei”. Această metodă se aplică și în problema soluțiilor aproape-periodice.

Să presupunem că sistemul generator (7) admite toate soluțiile periodice de perioadă  $\omega$ . Fie  $x_0(t, h)$  soluția generală a sistemului generator. Facem schimbarea de variabile  $x = x_0(t, z)$ . Obținem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x_0(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial x_0(t, z)}{\partial z} \frac{dz}{dt} = X_0[x_0(t, z), t] + \varepsilon X_1[x_0(t, z), t, \varepsilon].$$

Dar

$$\frac{\partial x_0(t, z)}{\partial t} = X_0[x_0(t, z), t],$$

iar faptul că  $x_0(t, h)$  este soluția generală a sistemului (7) arată că matricea  $\frac{\partial x_0(t, z)}{\partial z}$  este inversabilă, deci,

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon Z(t, z, \varepsilon), \quad (10)$$

unde

$$Z(t, z, \varepsilon) = \left[ \frac{\partial x_0(t, z)}{\partial z} \right]^{-1} X_1[x_0(t, z), t, \varepsilon].$$

Fie

$$Z_0(z, \varepsilon) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega Z(t, z, \varepsilon) dt$$

și fie  $\zeta^\circ$  o soluție a ecuației  $Z_0(z, 0) = 0$ . Facem schimbarea de variabile  $z = \zeta^\circ + b$ .



Obținem sistemul

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon B(t, b, \varepsilon),$$

unde  $B(t, b, \varepsilon) = Z(t, \zeta^\circ + b, \varepsilon)$ , deci  $B(t, b, \varepsilon)$  are aceleași proprietăți de regularitate ca și  $Z$  și e periodică în  $t$  cu perioadă  $\omega$ . Fie

$$B_0(b, \varepsilon) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega B(t, b, \varepsilon) dt.$$

Avem evident  $B_0(0, 0) = 0$ .

Notăm

$$B^*(t, b, \varepsilon) = B(t, b, \varepsilon) - B_0(b, \varepsilon);$$

rezultă

$$\frac{1}{\omega} \int_0^\omega B^*(t, b, \varepsilon) dt = 0.$$

Fie

$$\begin{aligned} B_\eta^*(t, b, \varepsilon) &= \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-s)} B^*(s, b, \varepsilon) ds = \int_0^\infty e^{-\eta\sigma} B^*(t - \sigma, b, \varepsilon) d\sigma = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta\omega} \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} B^*(t - \sigma, b, \varepsilon) e^{-\eta(\sigma - n\omega)} d\sigma = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta\omega} \int_0^\omega e^{-\eta s} B^*(t - s, b, \varepsilon) ds = \frac{1}{1 - e^{-\eta\omega}} \int_0^\omega e^{-\eta s} B^*(t - s, b, \varepsilon) ds. \end{aligned}$$

Fie

$$B^{**}(\sigma, b, \varepsilon) = \int_0^\sigma B^*(\xi, b, \varepsilon) d\xi.$$

Avem

$$\begin{aligned} B_\eta^*(t, b, \varepsilon) &= \frac{1}{1 - e^{-\eta\omega}} \int_0^\omega e^{-\eta s} B^*(t - s, b, \varepsilon) ds = \\ &= \frac{-1}{1 - e^{-\eta\omega}} \int_t^{t-\omega} e^{-\eta t} e^{\eta\sigma} B^*(\sigma, b, \varepsilon) d\sigma = \frac{e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta\omega}} \int_{t-\omega}^t e^{\eta\sigma} B^*(\sigma, b, \varepsilon) d\sigma = \\ &= \frac{e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta\omega}} \int_{t-\omega}^t e^{\eta\sigma} dB^{**} = \\ &= \frac{e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta\omega}} \left\{ e^{\eta t} B^{**}(t, b, \varepsilon) - e^{\eta(t-\omega)} B^{**}(t - \omega, b, \varepsilon) \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta \omega}} \int_{t-\omega}^t e^{\eta \sigma} B^{**}(\sigma, b, \varepsilon) d\sigma = B^{**}(t, b, \varepsilon) - \\
& - \frac{\eta e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta \omega}} \int_{t-\omega}^t e^{\eta \sigma} B^{**}(\sigma, b, \varepsilon) d\sigma = \\
& = B^{**}(t, b, \varepsilon) - \frac{\eta}{1 - e^{-\eta \omega}} \int_0^{\omega} e^{-\eta s} B^{**}(t-s, b, \varepsilon) ds.
\end{aligned}$$

Deoarece  $B^*(t, b, \varepsilon)$  are valoare medie nulă, rezultă că  $B^{**}(t, b, \varepsilon)$  este periodică deci mărginită. Obținem astfel evaluarea

$$|B_{\eta}^*(t, b, \varepsilon)| \leq M + M \frac{\eta}{1 - e^{-\eta \omega}} \int_0^{\omega} e^{-\eta s} ds = 2M.$$

Facem schimbarea de variabile  $b = h + \varepsilon B_{\eta}^*(t, h, \varepsilon)$ .  
Obținem

$$\frac{dh}{dt} + \varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial b} \frac{dh}{dt} = \varepsilon B = \varepsilon B_0 + \varepsilon B^*,$$

$B_0(h + \varepsilon B_{\eta}^*, \varepsilon) = B_0(h, \varepsilon) + O(\varepsilon) = B_0(h, 0) + O(\varepsilon) = Hh + B_1(h) + O(\varepsilon)$ ,  
unde

$$H = \frac{\partial}{\partial b} B_0(0, 0), \quad |B_1(h)| \leq \mu |h|^2.$$

Din

$$B_0(b, \varepsilon) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} B(t, b, \varepsilon) dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} Z(t, \zeta^{\circ} + b, \varepsilon) dt = Z_0(\zeta^{\circ} + b, \varepsilon)$$

rezultă că

$$H = \frac{\partial Z_0(\zeta^{\circ}, 0)}{\partial z}.$$

Mai departe, avem

$$B^*(t, h + \varepsilon B_{\eta}^*, \varepsilon) = B^*(t, h, \varepsilon) + O(\varepsilon)$$

și

$$\frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial t} = B^* - \eta B_{\eta}^*.$$

Rezultă

$$\begin{aligned}
\left(E + \varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial b}\right) \frac{dh}{dt} &= \varepsilon Hh + \varepsilon B_1(h) + \varepsilon B^*(t, h, \varepsilon) - \varepsilon B^*(t, h, \varepsilon) + \\
&+ \varepsilon \eta B_{\eta}^*(t, h, \varepsilon) + \varepsilon O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Luăm  $\eta = \varepsilon$ ; din  $|B_{\eta}^*| < 2M$  rezultă

$$\eta B_{\eta}^*(t, h, \varepsilon) = O(\varepsilon),$$

deci sistemul devine

$$\left(E + \varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial b}\right) \frac{dh}{dt} = \varepsilon Hh + \varepsilon B_1(h) + \varepsilon O(\varepsilon).$$

Dar

$$\frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial b} = \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-s)} \frac{\partial B^*}{\partial b} ds;$$

$\frac{\partial B^*}{\partial b}$  este ca și  $B^*$  periodică de perioadă  $\omega$  și cu valoare medie nulă,

deci  $\frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial b}$  este ca și  $B_{\eta}^*$  mărginită. Rezultă  $\varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial b} = O(\varepsilon)$  deci

$$\left(E + \varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial b}\right)^{-1} = E + O(\varepsilon).$$

Obținem în definitiv

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon Hh + \varepsilon B_1(h) + \varepsilon O(\varepsilon).$$

Facem schimbarea de variabilă independentă  $\tau = \varepsilon t$ .

Sistemul devine

$$\frac{dh}{d\tau} = Hh + B_1(h) + O(\varepsilon), \quad (11)$$

unde termenii  $O(\varepsilon)$  sînt periodici în  $\tau$  cu perioadă  $\varepsilon \omega$ . Presupunem că valorile proprii ale matricii  $H$  au părți reale diferite de zero. În acest caz sistemul  $\frac{dh}{d\tau} = Hh$  nu poate avea nici un fel de soluții periodice diferite de cea banală. Matricea Green corespunzătoare condițiilor de periodicitate  $h(0) = h(\varepsilon \omega)$  este

$$G(t, s) = e^{Ht} [E - e^{\varepsilon H \omega}]^{-1} e^{-Hs} = e^{H(t-s)} [E - e^{\varepsilon \omega H}]^{-1}, \quad 0 \leq s \leq t \leq \varepsilon \omega,$$

$$G(t, s) = e^{H(t+\varepsilon \omega - s)} [E - e^{\varepsilon \omega H}]^{-1}, \quad 0 \leq t \leq s \leq \varepsilon \omega.$$

Rezultă că avem  $|G(t, s)| \leq \frac{M}{\varepsilon}$  căci  $[E - e^{\varepsilon \omega H}]^{-1}$  admite o astfel de evaluare. Sistemul (11) va avea soluție periodică de perioadă  $\varepsilon \omega$  dacă ecuația integrală

$$h(\tau) = \int_0^{\varepsilon \omega} G(\tau, s) [B_1(h(s)) + O(\varepsilon)] ds$$

are soluție. Fie  $\Omega(h)$  operatorul definit de

$$\Omega(h) = \int_0^{\varepsilon \omega} G(\tau, s) [B_1(h(s)) + O(\varepsilon)] ds;$$

pentru  $\|h\| < l$  avem

$$|\Omega(h(t))| \leq \varepsilon \omega \frac{M}{\varepsilon} (\beta \|h\| + N\varepsilon);$$

dacă  $\beta < \frac{1}{2\omega M}$  și  $\varepsilon < \frac{l}{2\omega MN}$  rezultă  $\|\Omega(h)\| < l$ , deci  $\Omega$  aplică sfera  $\|h\| < l$  în ea însăși.

La fel se vede că

$$|\Omega(h_1) - \Omega(h_2)| \leq \varepsilon \omega \frac{M}{\varepsilon} (\beta \|h_1 - h_2\| + N_1 \varepsilon \|h_1 - h_2\|)$$

și dacă  $\varepsilon$  e suficient de mic,  $\Omega$  este contracție.

Deducem că pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic  $\Omega$  admite un punct fix unic, căruia îi corespunde o soluție periodică de perioadă  $\varepsilon \omega$ , unică, a sistemului (11); această soluție pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către soluția banală  $h = 0$ .

Revenind la variabila independentă  $t$  deducem existența unei soluții  $h(t, \varepsilon)$ , periodică de perioadă  $\omega$ , unică, care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către soluția banală  $h = 0$ .

Ținând seama de schimbările de variabile făcute deducem existența unei soluții periodice de perioadă  $\omega$ ,  $b(t, \varepsilon)$ , care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către zero și deci existența unei soluții periodice  $z(t, \varepsilon)$  a sistemului (10) care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către  $\zeta^0$ . În sfârșit, va rezulta existența unei soluții periodice  $x(t, \varepsilon) = x_0(t, z(t, \varepsilon))$ , de perioadă  $\omega$ , a sistemului (6), care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către  $x_0(t, \zeta^0)$ .

În plus, dacă valorile proprii ale matricii  $H$  au părți reale negative se vede ca mai înainte că soluția  $h(\tau, \varepsilon)$  este asimptotic stabilă, deci soluția  $x(t, \varepsilon)$  rezultă asimptotic stabilă. Să observăm în încheiere că cererea ca  $H$  să nu aibă valori proprii pur imaginare poate fi înlocuită cu aceea mai slabă ca  $\det H \neq 0$ , căci dacă  $H$  nu are valori proprii nule, pentru  $\varepsilon$  suficient de mic, sistemul  $\frac{dx}{dt} = Hx$  nu poate avea soluții periodice de perioadă  $\varepsilon \omega$ . Am

demonstrat astfel următoarea teoremă.

**TEOREMA 3.9.** *Dacă soluția generală  $x_0(t, h)$  a sistemului generator (7) este periodică de perioadă  $\omega$ , iar  $\zeta^0$  este o soluție a ecuației*

$$Z_0(z, 0) = 0$$

astfel ca

$$\det \frac{\partial Z(\zeta^0, 0)}{\partial z} \neq 0,$$

unde

$$Z_0(z, 0) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left( \frac{\partial x_0(t, z)}{\partial z} \right)^{-1} X_1[x_0(t, z), t, 0] dt,$$

atunci pentru  $\varepsilon$  suficient de mic există o soluție periodică unică de perioadă  $\omega$  a sistemului (6) cu proprietatea  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \zeta^0)$ .

Dacă valorile proprii ale matricii  $\frac{\partial Z(\zeta^0, 0)}{\partial z}$  au părți reale negative, această soluție este asimptotic stabilă.

*Observație.* Afirmatia teoremei, în afară de concluzia asupra stabilității decurge și din teorema 3.8 căci dacă soluția generală a sistemului (7) e periodică, de perioadă  $\omega$ , atunci sistemul (8) are  $n$  soluții periodice de perioadă  $\omega$  liniar independente și matricea  $W$  coincide cu  $\left[ \frac{\partial x_0}{\partial z} \right]^{-1}$ . Interesul

metodei luării mediei constă în faptul că ea se poate aplica și la cazuri mult mai generale, în particular la problema soluțiilor aproape-periodice.

Pentru a formula un rezultat relativ la soluțiile aproape-periodice avem nevoie de o leamnă datorată lui N. N. Bogoliubov.

LEMĂ. Fie  $f(t, x)$  o funcție definită pentru  $t$  real și  $x \in E$ , unde  $E$  este o mulțime compactă dintr-un spațiu metric. Presupunem că în orice punct din  $E$  avem

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t, x) dt = 0$$

uniform în raport cu  $t$ , și în plus că există  $M$  și  $\lambda$  astfel ca

$$|f(t, x)| < M, \quad |f(t, x') - f(t, x'')| \leq \lambda \rho(x', x'');$$

de aici rezultă că limita e uniformă nu numai în raport cu  $t$  ci și cu  $(t, x)$ . Fie

$$f_\eta(t, x) = \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} f(\tau, x) d\tau.$$

Atunci

$$|f_\eta(t, x)| \leq \frac{\zeta(\eta)}{\eta} \text{ pentru } -\infty < t < \infty, \quad x \in E,$$

unde  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \zeta(\eta) = 0$ .

Condițiile lemei sînt verificate în particular dacă  $f(t, x)$  este aproape-periodică în raport cu  $t$ , uniform în raport cu  $x$ , și are valoare medie nulă.

*Demonstrație.* Avem

$$f_\eta(t, x) = \int_0^\infty e^{-\eta\tau} f(t-\sigma, x) d\sigma = \sum_{n=0}^\infty e^{-n\eta T} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-\sigma, x) e^{-\eta(\sigma-nT)} d\sigma.$$

Mai departe

$$\begin{aligned} |f_\eta(t, x)| &= \left| \sum_{n=0}^\infty e^{-n\eta T} \int_{nT}^{(n+1)T} \{f(t-\sigma, x) e^{-\eta(\sigma-nT)} + \right. \\ &\quad \left. + f(t-\sigma, x) - f(t-\sigma, x)\} d\sigma \right| = \left| \sum_{n=0}^\infty e^{-n\eta T} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-\sigma, x) d\sigma - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^\infty e^{-n\eta T} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-\sigma, x) (1 - e^{-\eta(\sigma-nT)}) d\sigma \right| \leq \sum_{n=0}^\infty e^{-n\eta T} \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-\sigma, x) d\sigma \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T} \int_{nT}^{(n+1)T} (1 - e^{-\eta(\sigma - nT)}) d\sigma = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T} \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t - \sigma, x) d\sigma \right| + M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T} \int_0^T (1 - e^{-\eta s}) ds = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T} \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t - \sigma, x) d\sigma \right| + M \frac{1}{1 - e^{-\eta T}} \left( T + \frac{1}{\eta} (e^{-\eta T} - 1) \right) = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T} \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t - \sigma, x) d\sigma \right| + \frac{M T}{1 - e^{-\eta T}} - \frac{M}{\eta} = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\eta T} \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t - \sigma, x) d\sigma \right| + \frac{\zeta_1(\eta)}{\eta}
\end{aligned}$$

unde am notat

$$\frac{\zeta_1(\eta)}{\eta} = M \left( \frac{T}{1 - e^{-\eta T}} - \frac{1}{\eta} \right).$$

Avem

$$e^{-\eta T} = 1 - \eta T + o(\eta),$$

deci

$$1 - e^{-\eta T} = \eta T + o(\eta),$$

deci

$$\frac{\zeta_1(\eta)}{\eta} = M \left( \frac{T}{\eta T + o(\eta)} - \frac{1}{\eta} \right) = M \frac{T\eta - \eta T + o(\eta)}{\eta(T\eta - o(\eta))}.$$

Rezultă

$$\zeta_1(\eta) = M \frac{o(\eta)}{\eta T + o(\eta)},$$

deci

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \zeta_1(\eta) = 0.$$

Conform ipotezelor,

$$\left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(s, x) ds \right| \leq \varepsilon(T), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \varepsilon(T) = 0.$$

Rezultă

$$|f_\eta(t, x)| \leq T \varepsilon(T) \frac{1}{1 - e^{-\eta T}} + \frac{\zeta_1(\eta)}{\eta}.$$

Alegem pe  $T$  ca funcție de  $\eta$  definit de ecuația  $1 - e^{-\eta T} = \varepsilon(T)$ .

Cînd  $\eta \rightarrow 0$ , se capătă  $\eta T(\eta) \rightarrow 0$ ; într-adevăr, dacă  $T$  este mărginit, relația e evidentă, iar dacă  $T \rightarrow \infty$  rezultă  $\varepsilon(T) \rightarrow 0$ , deci  $\eta T \rightarrow 0$ . Notăm  $\eta T(\eta) = \zeta_2(\eta)$  și deducem

$$|f_\eta(t, x)| \leq \frac{\zeta_2(\eta)}{\eta} + \frac{\zeta_1(\eta)}{\eta},$$

unde  $\zeta_2(\eta) \rightarrow 0$  și  $\zeta_1(\eta) \rightarrow 0$ .

Lema e demonstrată.

Să considerăm acum sistemul (6) presupunînd că  $X_0$  și  $X_1$  sînt aproape-periodice în  $t$ , uniform în raport cu celelalte argumente. Presupunem de asemenea că soluția generală  $x_0(t, h)$  a sistemului (7) este aproape-periodică în  $t$ , uniform în raport cu  $h$ .

Facem din nou schimbarea de variabile  $x = x_0(t, z)$  și obținem sistemul (10) unde de data aceasta  $Z(t, z, \varepsilon)$  este aproape-periodică în  $t$ , uniform în raport cu celelalte argumente.

Fie

$$Z_0(z, \varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t, z, \varepsilon) dt$$

și  $\zeta^0$  o soluție a ecuației  $Z_0(z, 0) = 0$ . Facem schimbarea de variabile  $z = \zeta^0 + b$ . Obținem sistemul

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon B(t, b, \varepsilon),$$

unde  $B(t, b, \varepsilon)$  are aceleași proprietăți de regularitate ca și  $Z$  și e aproape-periodică în  $t$ , uniform în raport cu celelalte argumente. Fie

$$B_0(b, \varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(t, b, \varepsilon) dt;$$

avem  $B_0(0, 0) = 0$ . Notînd

$$B^*(t, b, \varepsilon) = B(t, b, \varepsilon) - B_0(b, \varepsilon),$$

rezultă

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B^*(t, b, \varepsilon) dt = 0.$$

Pe baza lemei deducem  $|B_\eta| \leq \frac{\zeta(\eta)}{\eta}$ .

Facem schimbarea de variabile  $b = h + \varepsilon B_\eta^*$  și obținem, alegînd  $\eta = \varepsilon$ , sistemul

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon Hh + \varepsilon B_1(h) + \varepsilon \Gamma(t, h, \varepsilon), \quad (12)$$

unde  $\Gamma$  e aproape-periodică în  $t$ , uniform în raport cu celelalte argumente și  $|\Gamma| < \gamma(\varepsilon)$ ,  $\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial h} \right| < \gamma(\varepsilon)$  cu  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma(\varepsilon) = 0$ .

Vom presupune că valorile proprii ale matricii  $H$  sînt cu părți reale negative și vom demonstra că pentru  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  sistemul (12) are o soluție aproape-periodică unică, care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către zero. Considerăm sistemul

$$\frac{dy}{dt} = Hy$$

și formăm funcția

$$V(y) = \int_0^\infty |y(t, y)|^2 dt + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\sigma \geq 0} |y(\sigma, y)|^2$$

Avem

$$\frac{1}{\varepsilon} |y|^2 \leq V(y) \leq \frac{K_1}{\varepsilon} |y|^2,$$

căci

$$|y(t, y)| \leq K e^{-\varepsilon \alpha t},$$

$$|V(y_1) - V(y_2)| \leq \frac{L_0}{\varepsilon} (|y_1| + |y_2|) |y_1 - y_2|$$

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[y(t+h, y_0)] - V[y(t, y_0)]}{h} \leq -|y(t, y_0)|^2.$$

Folosind această funcție, deducem ca în demonstrația teoremei 3.4 că sistemul

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon Hh + f(t)$$

admite pentru orice  $f$  aproape-periodică o soluție aproape-periodică unică,  $h_0(t)$ , pentru care are loc evaluarea

$$|h_0(t)| \leq \frac{L}{\varepsilon} \sup |f|.$$

Fie  $h_0(t)$  soluția aproape-periodică a sistemului

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon Hh + \varepsilon \Gamma(t, 0, \varepsilon).$$

Avem

$$|h_0(t)| \leq \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \gamma(\varepsilon) = L \gamma(\varepsilon).$$

Fie  $h_k(t)$  soluția aproape-periodică a sistemului

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon Hh + \varepsilon B_1(h_{k-1}(t)) + \varepsilon \Gamma(t, h_{k-1}(t), \varepsilon).$$

Presupunem prin inducție  $|h_{k-1}(t)| < 2L\gamma(\varepsilon)$ . Atunci

$$|B_1(h_{k-1}(t))| < 4\mu L^2 \gamma^2(\varepsilon),$$

deci

$$|h_k(t)| < \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \{4\mu L^2 \gamma^2(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon)\} = L \gamma(\varepsilon) [4\mu L^2 \gamma(\varepsilon) + 1].$$



Pentru  $\varepsilon$  suficient de mic rezultă  $\gamma(\varepsilon) < \frac{1}{4\mu L^2}$  și deci

$$|h_k(t)| < 2L\gamma(\varepsilon);$$

pe baza raționamentului prin inducție rezultă că pentru toți  $k$  avem evaluarea scrisă. Fie acum

$$l_k(t) = h_k(t) - h_{k-1}(t).$$

Avem

$$\begin{aligned} \frac{dl_{k+1}(t)}{dt} &= \frac{dh_{k+1}}{dt} - \frac{dh_k}{dt} = \varepsilon Hh_{k+1}(t) + \varepsilon B_1(h_k(t)) + \\ &+ \varepsilon \Gamma(t, h_k(t), \varepsilon) - \varepsilon Hh_k(t) - \varepsilon B_1(h_{k-1}(t)) - \varepsilon \Gamma(t, h_{k-1}(t), \varepsilon) = \\ &= \varepsilon Hl_{k+1}(t) + \varepsilon [B_1(h_k(t)) - B_1(h_{k-1}(t))] + \varepsilon [\Gamma(t, h_k(t), \varepsilon) - \Gamma(t, h_{k-1}(t), \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Avem

$$|B_1(u) - B_1(v)| \leq \mu(|u| + |v|)|u - v|,$$

deci

$$|B_1(h_k(t)) - B_1(h_{k-1}(t))| \leq 4\mu L\gamma(\varepsilon) \sup |l_k|.$$

Rezultă

$$|l_{k+1}(t)| \leq \frac{L}{\varepsilon} \{4\mu L\gamma(\varepsilon) \sup |l_k| + \gamma(\varepsilon) \sup |l_k|\} \leq L_1\gamma(\varepsilon) \sup |l_k|$$

de unde pentru  $\gamma(\varepsilon) < \frac{1}{L_1}$  rezultă convergența uniformă a șirului de apro-

ximații succesive către o soluție aproape-periodică a sistemului (12). Ținând seama de evaluările aproximațiilor succesive se deduce că această soluție tinde către zero când  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dar atunci, ținând seama de schimbările de variabile efectuate, rezultă existența unei soluții aproape-periodice unice asimptotic stabile,  $x(t, \varepsilon)$ , cu proprietatea  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \zeta^0)$ . Am

obținut următoarea teoremă:

**TEOREMA 3.10.** *Dacă în sistemul (6) funcțiile  $X_0$  și  $X_1$  sînt aproape-periodice în  $t$ , uniform în raport cu celelalte argumente, iar soluția generală  $x_0(t, h)$  a sistemului (7) este aproape periodică în  $t$ , uniform în raport cu  $h$ , și  $\zeta^0$  este o soluție a ecuației  $Z_0(z, 0) = 0$  astfel ca valorile proprii ale matricii  $\frac{\partial Z_0(\zeta^0, 0)}{\partial z}$  să aibă părți reale negative, atunci pentru  $\varepsilon$  suficient de mic există o soluție aproape-periodică unică a sistemului (6) cu proprietatea*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \zeta^0).$$

Aici

$$Z_0(z, 0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\partial x_0(t, z)}{\partial z} \right)^{-1} X_1[x_0(t, z), t, 0] dt.$$

## § 6. METODE TOPOLOGICE

Folosind unele metode topologice se pot obține în teoria sistemelor cu parametru mic rezultate puternice, în care condițiile impuse sistemului generator sînt foarte generale și au un caracter intrinsec.

**TEOREMA 3.11.** *Dacă sistemul generator (7) admite o soluție periodică  $x_0(t)$  asimptotic stabilă, atunci pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic sistemul (6) admite o soluție periodică  $x(t, \varepsilon)$  cu proprietatea că*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t).$$

*Demonstrație.* Ne sprijinim pe următoarea teoremă a lui F. Browder. Fie  $X$  un spațiu Banach,  $S$  și  $S_1$  mulțimi deschise și convexe din  $X$ ,  $S_0$  închisă și convexă,  $S_0 \subset S_1 \subset S$ ,  $f$  o aplicație compactă a lui  $S$  în  $X$ ; presupunem că există  $m$  natural astfel încît  $f^m$  este definită pe  $S_1$ ,  $f^j(S_0) \subset S_1$  pentru  $0 \leq j \leq m$ ,  $f^m(S_1) \subset S_0$ ; atunci  $f$  are un punct fix în  $S_0$ . Vom aplica această teoremă în cazul particular cînd  $X$  este spațiul euclidian  $n$ -dimensional; în acest caz va fi suficient ca  $f$  să fie continuă.

Fie  $x(t, p, \varepsilon)$  soluția generală a sistemului (6) cu  $x(0, p, \varepsilon) = p$ . Considerăm transformarea  $f(p, \varepsilon) = x(\omega, p, \varepsilon)$  și demonstrăm că ea îndeplinește toate condițiile din teorema lui Browder, dacă  $\varepsilon$  e suficient de mic; va rezulta că pentru  $\varepsilon$  suficient de mic există un punct fix, și din  $x(\omega, p, \varepsilon) = p$  rezultă că soluția corespunzătoare e periodică. Vom face demonstrația luînd  $x_0(t) \equiv 0$  deoarece ajungem la acest caz printr-o simplă schimbare de variabile. Sistemul (7) fiind periodic, stabilitatea asimptotică e uniformă, deci există  $\delta_0 > 0$  și două funcții  $\delta(\eta)$  și  $T(\eta)$  astfel încît  $|p| < \delta(\eta)$  implică  $|x_0(t, p)| < \eta$  pentru  $t \geq 0$  și  $|p| < \delta_0$ ,  $t > T(\eta)$  implică  $|x_0(t, p)| < \eta$ .

$$\text{Fie } \delta_1 = \delta\left(\frac{\alpha}{2}\right), 0 < \eta < \min\left\{\delta_0, \delta\left(\frac{1}{2}\delta_1\right)\right\}, T = T\left[\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)\right],$$

$m$  cel mai mic număr natural astfel ca  $m\omega > T$ . Fie  $S$  sfera  $|p| < \delta_1$ . Atunci  $|x_0(t, p)| < \frac{\alpha}{2}$  pentru  $p \in S$ ,  $t \geq 0$ . Dacă  $|\varepsilon|$  e suficient de mic, rezultă

$|x(t, p, \varepsilon)| < \alpha$  pentru  $p \in S$ ,  $0 \leq t \leq m$ , pe baza teoremei de continuitate a soluției în raport cu parametrul. De aici rezultă că pentru  $p \in S$  avem  $|f(p, \varepsilon)| < \alpha$ . Rezultă tot de aici că soluțiile  $x(t, p, \varepsilon)$  sînt prelungibile dacă  $p \in S$  deci operatorul  $f$  și iteratele sale  $f^j$ , ( $j=1, \dots, m$ ), sînt definite pe  $S$ .

Fie  $S_1$  sfera  $|p| < \eta$  și  $S_0$  sfera  $|\varphi| < \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$ . Pentru  $|p| < \eta$ ,  $t \geq 0$

avem  $|x_0(t, p)| < \frac{1}{2}\delta_1$  căci  $\eta < \delta\left(\frac{1}{2}\delta_1\right)$ ; pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic rezultă  $|x(t, p, \varepsilon)| < \delta_1$ , pentru  $0 \leq t \leq m\omega$ , deci  $f^j(S_1) \subset S$ , ( $j=1, \dots, m$ ).

Pentru  $|p| \leq \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$ ,  $t \geq 0$  avem  $|x_0(t, p)| < \frac{1}{2}\eta$ , deci pentru  $|\varepsilon|$  sufi-

cient de mic  $|x(t, p, \varepsilon)| < \eta$  dacă  $|p| \leq \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$ ,  $0 \leq t \leq m\omega$ , ceea ce arată că  $f^j(S_0) \subset S_1$  pentru  $0 \leq j \leq m$ .

Din  $\eta < \delta_0$  rezultă că pentru  $p \in S_1$ ,  $t > T$ , avem  $|x_0(t, p)| < \frac{1}{2} \delta \left( \frac{1}{2} \eta \right)$ , deci pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic rezultă  $|x(m\omega, p, \varepsilon)| \leq \frac{3}{4} \delta \left( \frac{1}{2} \eta \right)$  dacă  $p \in S_1$ , adică  $f^m(S_1) \subset S_0$ .

Toate condițiile din teorema lui Browder rezultă verificate, deci este demonstrată existența unui punct fix în  $S_0$ . Se vede că  $S_0$  poate fi aleasă arbitrar de mică, dar atunci  $\varepsilon$  trebuie luat mic. Aceasta înseamnă că soluția a cărei existență am demonstrat-o tinde către zero când  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 3.12. Fie  $X_0$  analitică :

$$X_0(x, t) = X_0^{(m)}(x, t) + X_0^{(m+1)}(x, t) + \dots, \quad m \geq 2$$

$X_0^{(k)}$  fiind forme de gradul  $k$  în coordonatele lui  $x$ ; presupunem că  $\int_0^\omega X_0^{(m)}(x, t) dt$  are punctul  $x = 0$  ca punct singular izolat. Dacă indicele punctului  $x = 0$  în câmpul de vectori  $\frac{1}{\omega} \int_0^\omega X_0^{(m)}(x, t) dt$  este diferit de zero, atunci pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic sistemul (6) admite o soluție periodică de perioadă  $\omega$  care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde la zero.

*Demonstrație.* Considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = X_0^{(m)}(x, t) + X_0^{(m+1)}(x, t) + \dots$$

Soluția lui generală se scrie

$$x = A_1(t)x_0 + A_2(t, x_0) + \dots + A_k(t, x_0) + \dots,$$

unde  $A_k(t, x_0)$  sînt vectori ale căror coordonate sînt forme de gradul  $k$  în raport cu coordonatele lui  $x_0$ , cu coeficienți funcții de  $t$ . Înlocuind în sistem se capătă

$$\begin{aligned} & \frac{dA_1}{dt} x_0 + \frac{\partial A_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial A_k}{\partial t} + \dots = \\ & = X_0^{(m)}(A_1 x_0 + A_2 + \dots + A_k + \dots, t) + \dots \end{aligned}$$

Se obțin relațiile

$$\frac{dA_1}{dt} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial t} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial A_m}{\partial t} = X_0^{(m)}(A_1 x_0, t), \quad \dots$$

$$A_1(0) = E, \quad A_2(0, x_0) \equiv \dots \equiv A_m(0, x_0) \equiv 0.$$

Rezultă de aici

$$A_1 = E, \quad A_2 \equiv \dots \equiv A_{m-1} \equiv 0, \quad A_m(t, x_0) = \int_0^t X_0^{(m)}(x_0, t) dt.$$

Deducem că soluția generală a sistemului (7) este de forma

$$x(t) = x_0 + \int_0^t X_0^{(m)}(x_0, t) dt + \dots,$$

unde termenii nescriși sînt de grad superior în coordonatele lui  $x_0$ .

Considerăm acum câmpul de vectori

$$u^*(x_0) \equiv x(\omega) - x_0 = \int_0^\omega X_0^{(m)}(x_0, t) dt + \dots$$

Acest câmp are punctul  $x_0 = 0$  drept punct singular izolat deoarece acest lucru este presupus pentru câmpul  $\int_0^\omega X_0^{(m)}(x_0, t) dt$ . Deoarece indicele punctului  $x_0 = 0$  în câmpul  $\frac{1}{\omega} \int_0^\omega X_0^{(m)}(x_0, t) dt$  este diferit de zero,

rezultă că indicele punctului  $x_0 = 0$  în câmpul  $u(x_0)$  este diferit de zero. Să considerăm și câmpul  $u_\varepsilon(x_0) = x(\omega, x_0, \varepsilon) - x_0$ ; avem  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\omega, x_0, \varepsilon) = x(\omega, x_0, 0)$ , deci pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic rotația câmpului  $u_\varepsilon(x_0)$  pe o sferă care conține originea va fi egală cu aceea a câmpului  $u(x_0)$ . Deoarece indicele originii în câmpul  $u(x_0)$  e diferit de zero, rezultă că dacă sfera e suficient de mică atunci rotația câmpului  $u_\varepsilon(x_0)$  pe această sferă va fi diferită de zero. Dar atunci câmpul  $u_\varepsilon(x_0)$  va avea în domeniul interior sferei un punct singular, deci un punct pentru care  $u_\varepsilon(x_0) = 0$ , adică  $x(\omega, x_0, \varepsilon) = x_0$ ; acest punct corespunde unei soluții periodice. Teorema e demonstrată.

*Observație.* Dacă punctul  $x = 0$  este asimptotic stabil pentru sistemul (7), indicele său în câmpul  $x(k\omega) - x_0$  este, pentru  $k$  suficient de mare, egal cu  $\pm 1$ , deci indicele său în câmpul  $\frac{1}{k\omega} \int_0^{k\omega} X_0^{(m)} dt$  este diferit de zero.

Dar

$$\frac{1}{k\omega} \int_0^{k\omega} X_0^{(m)} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega X_0^{(m)} dt$$

și condiția din enunț e verificată. Regăsim astfel un caz particular al teoremei 3.11.

**TEOREMA 3.13.** *Dacă sistemul (7) nu depinde explicit de  $t$ , dacă  $X_0(x)$  admite în  $x = 0$  un punct singular izolat care nu este punct de acumulare de soluții periodice cu perioadă  $\omega' \leq \omega$  și dacă indicele punctului  $x = 0$  în câmpul  $X_0(x)$  este diferit de zero, atunci pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic sistemul (7) admite o soluție periodică de perioadă  $\omega$ , care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către zero.*

*Demonstrație.* Ca în cazul teoremei precedente vom arăta că rotația câmpului  $u_\varepsilon(x_0)$  este diferită de zero pe o sferă suficient de mică cu centrul în origină, arătînd că indicele originii în câmpul  $u(x_0)$  este diferit de zero. Pentru aceasta vom arăta că indicele originii în câmpul  $u(x)$  coincide cu

indicele în câmpul  $X_0(x)$ . Definim câmpul  $W(x_0, \tau) \equiv \frac{1}{\omega\tau} [x(\omega\tau, x_0, 0) - x_0]$  pentru  $\tau \neq 0$ ,  $W(x_0, 0) = X_0(x_0)$ . Deoarece  $\frac{d}{dt} x(t, x_0, 0)$  pentru  $t = 0$  este chiar  $X_0(x_0)$ , rezultă că  $\lim_{\tau \rightarrow 0} W(x_0, \tau) = W(x_0, 0)$ , deci câmpul  $W(x_0, \tau)$  depinde continuu de  $\tau$ . Câmpul  $W(x_0, \tau) \neq 0$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , pe o sferă suficient de mică cu centrul în origină, deoarece am presupus că originea nu e punct de acumulare de soluții periodice cu perioadă  $\omega' \leq \omega$  și deci  $x(\omega\tau, x_0, 0) \neq x_0$  pentru  $0 \leq \tau \leq 1$ . Câmpul  $W(x_0, \tau)$  reprezintă o deformare continuă a câmpului  $X_0(x_0)$  în câmpul  $\frac{1}{\omega} u(x_0)$  și deoarece  $W(x_0, \tau) \neq 0$  rezultă că indicele originii în cele două câmpuri este același. Teorema este demonstrată.

## § 7. SISTEME AUTONOME

Problema soluțiilor periodice prezintă anumite particularități în cazul cînd funcțiile  $\bar{X}_0$  și  $X_1$  nu depind explicit de  $t$ , deoarece în acest caz soluțiile periodice ale sistemelor (6) și (7) au în general perioade diferite. În cele ce urmează vom prezenta teoria completă a sistemelor autonome cu parametru mic, urmînd calea geometrică folosită sistematic de M. Urabe.

Considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = X(x). \quad (13)$$

Presupunem că acest sistem admite o soluție periodică  $x = u(t)$  de perioadă  $\omega$ . Pe baza teoremei de unicitate rezultă că  $X[u(t)] \neq 0$  pentru toți  $t$ . Notăm  $\bar{X} = \frac{X[u(t)]}{|X[u(t)]|}$ . Dacă  $n \geq 3$  și dacă  $X$  verifică o

condiție Lipschitz locală, curba  $x = \bar{X}(t)$  nu acoperă întreaga sferă unitate, deci există un vector unitar  $e_1$ , astfel încît  $\bar{X}(t)$  să nu coincidă cu  $-e_1$  pentru nici o valoare a lui  $t$ . Plecînd de la vectorul constant  $e_1$  construim un sistem ortogonal și normat de vectori  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Notăm  $\cos \theta_i = (\bar{X}(t), e_i)$  și formăm vectorii  $\xi_v = e_v - \frac{\cos \theta_v}{1 + \cos \theta_1} (e_1 + \bar{X})$ ,

$v = 2, 3, \dots, n$ . Deoarece  $\bar{X}(t)$  nu coincide nicăieri cu  $-e_1$ , rezultă că  $1 + \cos \theta_1 \neq 0$ . Vectorii  $\xi_v$  sînt funcții de  $t$ , periodice cu perioadă  $\omega$  și au aceleași proprietăți de regularitate ca și  $\bar{X}(t)$ . Vectorii  $(\bar{X}(t), \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$  formează un sistem ortogonal, normat. Să verificăm aceasta:

$$\begin{aligned} (\xi_v, \bar{X}) &= \left( e_v - \frac{\cos \theta_v}{1 + \cos \theta_1} (e_1 + \bar{X}), \bar{X} \right) = (e_v, \bar{X}) - \frac{\cos \theta_v}{1 + \cos \theta_1} [(e_1, \bar{X}) + \\ &+ (\bar{X}, \bar{X})] = \cos \theta_v - \frac{\cos \theta_v}{1 + \cos \theta_1} (\cos \theta_1 + 1) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\xi_\nu, \xi_\mu) &= \left( e_\nu - \frac{\cos \theta_\nu}{1 + \cos \theta_1} e_1 - \frac{\cos \theta_\nu}{1 + \cos \theta_1} \bar{X}, \xi_\mu \right) = \\
&= \left( e_\nu - \frac{\cos \theta_\nu}{1 + \cos \theta_1} e_1, \xi_\mu \right) = \left( e_\nu - \frac{\cos \theta_\nu}{1 + \cos \theta_1} e_1, e_\mu - \frac{\cos \theta_\mu}{1 + \cos \theta_1} e_1 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos \theta_\mu}{1 + \cos \theta_1} \bar{X} \right) = \delta_{\mu\nu} - \frac{\cos \theta_\mu \cos \theta_\nu}{1 + \cos \theta_1} + \frac{\cos \theta_\nu \cos \theta_\mu}{(1 + \cos \theta_1)^2} + \\
&\quad + \frac{\cos \theta_\nu \cos \theta_\mu \cos \theta_1}{(1 + \cos \theta_1)^2} = \delta_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

În cazul  $n = 2$ , fie  $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}^1 \\ \bar{X}^2 \end{pmatrix}$ ; luăm  $\xi_2 = \begin{pmatrix} \bar{X}^2 \\ -\bar{X}^1 \end{pmatrix}$  și sistemul  $(\bar{X}, \xi_2)$

este ortogonal și normat.

În definitiv, rezultă că soluției periodice  $u(t)$  i s-a atașat un sistem de vectori ortogonal și normat, avînd drept unul din vectori pe  $\bar{X}$  (vectorul unitar al tangentei la curba  $x = u(t)$ ) format din vectori periodici de perioadă  $\omega$ , cu aceleași proprietăți de regularitate ca și  $\bar{X}(t)$ .

Cu ajutorul acestui sistem ortogonal normat facem schimbarea de variabile dată de relația

$$x = u(\theta) + S(\theta)y,$$

$S(\theta)$  fiind matricea ale cărei coloane sînt vectorii  $\xi_i(\theta)$ ;  $\theta$  este un scalar, iar  $y$  un vector de dimensiune  $n-1$ . Verificăm că relațiile care definesc schimbarea de variabile sînt inversabile în vecinătatea curbei  $x = u(t)$ . Avem

$$\frac{\partial (x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial (y^1, \dots, y^{n-1}, \theta)} \Big|_{y=0} = \det (S(\theta), X[u(\theta)]),$$

unde am notat cu  $(S, X)$  matricea ale cărei prime  $n-1$  coloane sînt formate din coloanele matricii  $S$ , iar ultima coloană este  $X$ .

Mai departe,

$$\begin{aligned}
\det (S(\theta), X[u(\theta)]) &= \det (S(\theta), |X[u(\theta)]| \bar{X}[u(\theta)]) = \\
&= |X[u(\theta)]| \det (S(\theta), \bar{X}[u(\theta)]) = |X[u(\theta)]| \neq 0.
\end{aligned}$$

Am folosit faptul că sistemul  $(\xi_2, \dots, \xi_n, \bar{X})$  este ortogonal și normat, deci determinantul matricii  $(S(\theta), \bar{X}(\theta))$  este 1. Rezultă  $\frac{\partial (x^1, \dots, x^n)}{\partial (y^1, \dots, y^{n-1}, \theta)} \neq 0$  și transformarea este inversabilă local. Prin această schimbare de variabile curba  $x = u(t)$  devine  $y = 0$ ,  $\theta = t$ . Să vedem ce formă capătă în noile variabile sistemul (13). Avem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{dS(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} y + S(\theta) \frac{dy}{dt} = X[u(\theta) + S(\theta)y]$$

deci

$$X[u(\theta)] \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \frac{dS(\theta)}{d\theta} y + S(\theta) \frac{dy}{dt} = X[u(\theta) + S(\theta)y]. \quad (14)$$

Înmulțind această relație cu  $X^*[u(\theta)]$  și ținând seama de faptul că  $X^*S = 0$ , obținem

$$\frac{d\theta}{dt} \left( |X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)] \frac{dS(\theta)}{d\theta} y \right) = X^*[u(\theta)] X[u(\theta) + S(\theta)y].$$

Pentru  $|y|$  suficient de mic coeficientul lui  $\frac{d\theta}{dt}$  nu se anulează, deci în vecinătatea curbei  $x = u(t)$  obținem

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{X^*[u(\theta)] X[u(\theta) + S(\theta)y]}{|X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)] \frac{dS(\theta)}{d\theta} y}.$$

Înmulțind relația (14) cu  $\xi_\mu^*(\theta)$  și ținând seama de proprietățile de ortogonalitate, obținem

$$\frac{d\theta}{dt} \xi_\mu^* \frac{dS}{d\theta} y + \frac{dy^\mu}{dt} = \xi_\mu^* X[u(\theta) + S(\theta)y]$$

deci

$$\begin{aligned} \frac{dy^\mu}{dt} &= \xi_\mu^*(\theta) X[u(\theta) + S(\theta)y] - \\ &- \frac{X^*[u(\theta)] X[u(\theta) + S(\theta)y]}{|X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)] \frac{dS(\theta)}{d\theta} y} \xi_\mu^*(\theta) \frac{dS(\theta)}{d\theta} y \end{aligned}$$

În definitiv sistemul (13) se înlocuiește cu un sistem de forma

$$\frac{dy}{dt} = Y(\theta, y), \quad \frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, y),$$

unde se vede imediat că  $Y$  și  $\Theta$  sînt periodice în  $\theta$  cu perioada  $\omega$ , verifică relațiile  $\Theta(\theta, 0) \equiv 1$ ,  $Y(\theta, 0) \equiv 0$  și au aceleași proprietăți de regularitate ca și  $X(x)$ .

Formăm acum sistemul

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{\Theta(\theta, y)} Y(\theta, y). \quad (15)$$

Funcția  $\frac{Y(\theta, y)}{\Theta(\theta, y)}$  este periodică în  $\theta$  cu perioada  $\omega$  și are pentru  $|y|$  suficient de mic aceleași proprietăți de regularitate ca și  $X$  deoarece din

$\Theta(\theta, 0) \equiv 1$  rezultă că pentru  $|y|$  suficient de mic  $\Theta(\theta, y) \neq 0$ . Să punem în evidență prima aproximație liniară în acest sistem. Avem

$$X[u(\theta) + S(\theta)y] = X[u(\theta)] + \frac{\partial X[u(\theta)]}{\partial x} S(\theta)y + O(|y|^2),$$

deci

$$X^*[u(\theta)]X[u(\theta) + S(\theta)y] = |X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)]A(\theta)S(\theta)y + O(|y|^2),$$

unde am notat  $A(\theta) = \frac{\partial X[u(\theta)]}{\partial x}$ . Rezultă

$$\begin{aligned} & \frac{1}{X^*[u(\theta)]X[u(\theta) + S(\theta)y]} = \\ &= \frac{1}{|X[u(\theta)]|^2} \frac{1}{1 + \frac{X^*[u(\theta)]A(\theta)S(\theta)y}{|X[u(\theta)]|^2} + o(|y|)} \\ &= \frac{1}{|X[u(\theta)]|^2} \left\{ 1 - \frac{X^*[u(\theta)]A(\theta)S(\theta)y}{|X[u(\theta)]|^2} + o(|y|) \right\}. \end{aligned}$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Theta(\theta, y)} &= \left\{ |X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)] \frac{dS(\theta)}{d\theta} y \right\}^{-1} \\ &\cdot \frac{1}{|X[u(\theta)]|^2} \left\{ 1 - \frac{X^*[u(\theta)]A(\theta)S(\theta)y}{|X[u(\theta)]|^2} + o(|y|) \right\} = 1 + O(|y|), \end{aligned}$$

$$Y^\mu(\theta, y) = \xi_\mu^*(\theta)X[u(\theta) + S(\theta)y] - \Theta(\theta, y)\xi_\mu^*(\theta)\frac{dS(\theta)}{d\theta}y$$

deci

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Theta(\theta, y)} Y^\mu(\theta, y) &= \frac{1}{\Theta(\theta, y)} \xi_\mu^*(\theta) \{ X[u(\theta)] + A(\theta)S(\theta)y + o(|y|) \} - \\ &- \xi_\mu^*(\theta) \frac{dS(\theta)}{d\theta} y = \{ 1 + O(|y|) \} \{ \xi_\mu^*(\theta)A(\theta)S(\theta)y + o(|y|) \} - \xi_\mu^*(\theta) \frac{dS(\theta)}{d\theta} y. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\frac{dy^\mu}{d\theta} = \xi_\mu^*(\theta) \left( A(\theta)S(\theta) - \frac{dS(\theta)}{d\theta} \right) y + o(|y|).$$

Sistemul (15) se scrie deci

$$\frac{dy}{d\theta} = B(\theta)y + o(|y|),$$



unde elementele  $b_{\mu\nu}$  ale matricii  $B(\theta)$  sînt date de

$$b_{\mu\nu}(\theta) = \xi_{\mu}^*(\theta) \left( A(\theta) \xi_{\nu}(\theta) - \frac{d\xi_{\nu}}{d\theta} \right)$$

și sînt funcții periodice de  $\theta$  cu perioadă  $\omega$ .

Vom numi sistemul

$$\frac{dy}{d\theta} = B(\theta) y$$

sistemul în variații normale. Să considerăm sistemul

$$\frac{dv}{d\theta} = A(\theta) v,$$

adică sistemul în variații corespunzător soluției  $u(\theta)$ . Scriem vectorul  $v$  în sistemul ortogonal normal  $(\bar{X}, \xi_2, \dots, \xi_n)$ :

$$v(\theta) = p(\theta) X[u(\theta)] + \sum_{\nu=2}^n p^{\nu}(\theta) \xi_{\nu}(\theta).$$

Căutăm ecuațiile pe care le verifică  $p^{\mu}(\theta)$ . Avem

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\theta} &= \frac{dp}{d\theta} X[u(\theta)] + p A(\theta) \frac{du}{d\theta} + \sum_{\nu=2}^n p^{\nu} \frac{d\xi_{\nu}}{d\theta} + \frac{dp^{\nu}}{d\theta} \xi_{\nu}(\theta) = \\ &= A p X[u(\theta)] + \sum_{\nu=2}^n p^{\nu}(\theta) A(\theta) \xi_{\nu}(\theta). \end{aligned}$$

Cum

$$\frac{du}{d\theta} = X[u(\theta)],$$

rezultă

$$\frac{dp}{d\theta} X[u(\theta)] + \sum_{\nu=2}^n p^{\nu} \frac{d\xi_{\nu}}{d\theta} + \frac{dp^{\nu}}{d\theta} \xi_{\nu} = \sum_{\nu=2}^n p^{\nu} A(\theta) \xi_{\nu}.$$

Înmulțind cu  $\xi_{\mu}^*$  căpătăm

$$\frac{dp^{\mu}}{d\theta} = \xi_{\mu}^* \sum_{\nu=2}^n \left( A(\theta) \xi_{\nu}(\theta) - \frac{d\xi_{\nu}}{d\theta} \right) p^{\nu} = \sum_{\nu=2}^n b_{\mu\nu}(\theta) p^{\nu}.$$

Am ajuns astfel la concluzia: *componentele normale  $p^{\nu}$  ale variațiilor  $v$  verifică sistemul în variații normale.*

Să observăm că din

$$\frac{du}{d\theta} = X[u(\theta)]$$

rezultă

$$\frac{d}{dt} \frac{du}{d\theta} = A(\theta) \frac{du}{d\theta}$$

deci

$$\frac{du}{d\theta} = X[u(\theta)]$$

este o soluție a sistemului în variații.

Fie  $\Phi(\theta)$  o matrice fundamentală de soluții pentru sistemul în variații, a cărei primă coloană e formată de soluția  $X[u(\theta)]$ . Avem

$$\Phi(\theta) = U(\theta)C,$$

unde  $U(\theta)$  este matricea de soluții cu  $U(0) = E$ . De aici

$$\Phi(\theta + \omega) = U(\theta + \omega)C = U(\theta)U(\omega)C = U(\theta)CC^{-1}U(\omega)C = \Phi(\theta)K,$$

unde  $K = C^{-1}U(\omega)C$ ; deoarece  $K$  este asemenea cu matricea de monodromie  $U(\omega)$ , valorile ei proprii sînt tocmai multiplicatorii sistemului în variații. Fie  $v_2, \dots, v_n$  soluțiile diferite de  $X[u(\theta)]$  care formează matricea  $\Phi$ . Scriem aceste soluții în sistemul ortogonal normat  $(\bar{X}, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ;

$$v_\nu = p_\nu X[u(\theta)] + \sum_{\mu} p_\nu^\mu \xi_\mu.$$

Relația

$$\Phi(\theta + \omega) = \Phi(\theta)K$$

devine

$$X[u(\theta + \omega)] = X[u(\theta)]k_1^1 + \sum_{\mu=2}^n v_\mu(\theta)k_1^\mu,$$

$$v_\nu(\theta + \omega) = X[u(\theta)]k_\nu^1 + \sum_{\mu=2}^n v_\mu(\theta)k_\nu^\mu.$$

Luînd  $\theta = 0$  și trecînd la baza  $(\bar{X}, \xi_2, \dots, \xi_n)$  se capătă

$$p_\nu(\omega)X[u(\omega)] + \sum_{\mu} p_\nu^\mu(\omega)\xi_\mu(\omega) = X[u(0)]k_\nu^1 + \\ + \sum_{\mu=2}^n [p_\mu(0)X[u(0)] + \sum_k p_\mu^k(0)\xi_k(0)]k_\nu^\mu.$$

Dar

$$u(\omega) = u(0), \quad \xi_\mu(\omega) = \xi_\mu(0),$$

deci

$$p_\nu(\omega)X[u(0)] + \sum_{\mu} p_\nu^\mu(\omega)\xi_\mu(0) = X[u(0)]k_\nu^1 + \sum_{\mu=2}^n \left[ p_\mu(0)X[u(0)] + \right. \\ \left. + \sum_k p_\mu^k(0)\xi_k(0) \right] k_\nu^\mu,$$

$$X[u(0)] = X[u(0)]k_1^1 + \sum_{\mu=2}^n v_\mu(0)k_1^\mu.$$

Vectorii  $X[u(0)]$ ,  $\xi_2(0), \dots, \xi_n(0)$ , sînt liniar independenți; tot liniar independenți sînt și  $X[u(0)]$ ,  $v_2(0), \dots, v_n(0)$ . Rezultă

$$k_1^1 = 1, \quad k_1^\mu = 0,$$

$$p_\nu(\omega) = k_\nu^1 + \sum_{\mu=2}^n k_\nu^\mu p_\mu(0), \quad p_\nu^k(\omega) = \sum_{\mu} \dot{k}_\nu^\mu p_\mu^k(0).$$

Avem  $\det(p_\nu^\mu(0)) \neq 0$ ; într-adevăr, dacă determinantul ar fi nul, ar exista constantele  $c^\nu$  nu toate nule astfel ca  $\sum_\nu c^\nu p_\nu^\mu = 0$ , deci

$$\begin{aligned} \sum_\nu c^\nu v_\nu(0) &= \sum_\nu c^\nu p_\nu(0) X[u(0)] + \sum_{\nu, \mu} c^\nu p_\nu^\mu \xi_\mu = \\ &= \sum_\nu c^\nu p_\nu(0) X[u(0)], \end{aligned}$$

deci  $c^\nu = 0$ ,  $\sum_\nu c^\nu p_\nu(0) = 0$ , ceea ce este contradictoriu.

Funcțiile  $v_\nu(\theta)$  sînt soluții ale sistemului în variații, deci după cum am văzut, componentele lor normale  $p_\nu^\mu(\theta)$  sînt soluții ale sistemului în variații normale. Deoarece  $\det p_\nu^\mu(0) \neq 0$ , rezultă că  $p_\nu^\mu(\theta)$ ,  $\nu = 2, \dots, n$ ,  $\mu = 2, \dots, n$ , reprezintă o matrice fundamentală de soluții pentru sistemul în variații normale. Fie  $P(\theta)$  această matrice și să notăm cu  $K_2$  matricea  $(k_\nu^\mu)_{\substack{\nu=2, \dots, n \\ \mu=2, \dots, n}}$ . Relația  $p_\nu^\mu(\omega) = \sum_\lambda p_\lambda^\mu(0) k_\nu^\lambda$  se scrie  $P(\omega) = P(0) K_2$  și arată că valorile proprii ale matricii  $K_2$  sînt tocmai multiplicatorii sistemului în variații normale. Deoarece  $k_1^1 = 1$ ,  $k_1^\mu = 0$ , rezultă că matricea  $K$  are forma

$$K = \begin{pmatrix} 1 & K_1 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}.$$

Am obținut următorul rezultat: *multiplicatorii sistemului în variații normale se obțin din multiplicatorii sistemului în variații eliminînd multiplicatorul egal cu 1 (care corespunde soluției periodice  $X[u(\theta)]$ ).*

Acum putem demonstra o teoremă de stabilitate a soluției periodice  $u(t)$ . Această teoremă a fost demonstrată pentru prima dată de Andronov și Witt.

**TEOREMA 3.14.** *Dacă  $(n - 1)$  multiplicatori ai sistemului în variații corespunzător soluției periodice  $x = u(t)$  se află în interiorul cercului unitate, atunci soluția periodică  $x = u(t)$  este orbital stabilă; aceasta înseamnă că dacă  $x(t)$  este o altă soluție a sistemului (13) pentru care  $x(t_0)$  e suficient de apropiată de curba  $x = u(t)$ , atunci*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - u(t + c)] = 0.$$

**Demonstrație.** Dacă  $n - 1$  multiplicatori ai sistemului în variații se află în interiorul cercului unitate, rezultă că multiplicatorii sistemului în variații normale se află în interiorul cercului unitate, deci soluția ba-

nală a sistemului în variații normale este uniform asimptotic stabilă, deci, pe baza teoremei de stabilitate după prima aproximație soluția banală a sistemului (15) este uniform asimptotic stabilă. Dar atunci, pentru  $|y(0)|$  suficient de mic, avem  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} y(\theta) = 0$ , deci din relația

$$x[t(\theta)] = u(\theta) + S(\theta)y(\theta)$$

deducem

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \{x[t(\theta)] - u(\theta)\} = 0.$$

Fie  $0 < \theta' < \theta''$ ; avem

$$\begin{aligned} [t(\theta'') - \theta''] - [t(\theta') - \theta'] &= \int_{\theta'}^{\theta''} \left( \frac{dt}{d\theta} - 1 \right) d\theta = \\ &= \int_{\theta'}^{\theta''} \left( \frac{1}{\Theta(\theta, y)} - 1 \right) d\theta = \int_{\theta'}^{\theta''} \{1 + O(|y|) - 1\} d\theta = \int_{\theta'}^{\theta''} O(|y|) d\theta. \end{aligned}$$

Dar

$$|y(\theta)| \leq k e^{-\alpha\theta},$$

deci

$$O(|y|) \leq M e^{-\alpha\theta};$$

de aici

$$|[t(\theta'') - \theta''] - [t(\theta') - \theta']| \leq M \int_{\theta'}^{\theta''} e^{-\alpha\theta} d\theta < M \int_{\theta'}^{\infty} e^{-\alpha\theta} d\theta = \frac{M}{\alpha} e^{-\alpha\theta'}.$$

Pentru  $\theta'$  suficient de mare,  $[t(\theta'') - \theta''] - [t(\theta') - \theta']$  poate fi făcut oricât de mic, deci  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} [t(\theta) - \theta]$  există; fie  $\theta_0$  această limită.

Pe de altă parte,

$$x[t(\theta)] - x(\theta + \theta_0) = \int_{\theta + \theta_0}^{t(\theta)} X[x(\alpha)] d\alpha,$$

deci

$$|x[t(\theta)] - x(\theta + \theta_0)| \leq |t(\theta) - (\theta + \theta_0)| \sup |X[x(\alpha)]|.$$

Dar dacă  $|y(0)| < \delta_0$ , rezultă  $|y(\theta)| < 1$  pentru  $\theta \geq 0$ , din cauza stabilității soluției banale a sistemului (15), deci  $|x[t(\theta)]|$  e mărginită, deci  $|X[x(\theta)]|$  e mărginită. Cum

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} [t(\theta) - (\theta + \theta_0)] = \lim_{\theta \rightarrow \infty} [t(\theta) - \theta - \theta_0] = 0$$

rezultă

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \{x[t(\theta)] - x(\theta + \theta_0)\} = 0.$$

Deoarece avem și

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \{x[t(\theta)] - u(\theta)\} = 0$$

rezultă

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \{x(\theta + \theta_0) - u(\theta)\} = 0.$$

Notînd  $\theta + \theta_0 = t$ ,  $c = -\theta_0$ , rezultatul obținut se scrie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{x(t) - u(t + c)\} = 0$$

și teorema este demonstrată.

## § 8. SISTEME AUTONOME CU PARAMETRU MIC

Să considerăm acum sistemul perturbat

$$\frac{dx}{dt} = Z(x, \varepsilon), \quad (16)$$

unde  $Z$  e continuu diferențiabilă și  $Z(x, 0) = X(x)$ .

Presupunem ca mai sus că sistemul (13) admite o soluție periodică  $x = u(t)$  de perioadă  $\omega$ . Considerăm sistemul de vectori  $\bar{X}(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$  și facem în sistemul (16) schimbarea de variabile  $x = u(\theta) + S(\theta)y$ . Obținem un sistem de forma

$$\frac{dy}{dt} = Y(\theta, y, \varepsilon), \quad \frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, y, \varepsilon), \quad Y(\theta, 0, 0) \equiv 0, \quad \Theta(\theta, 0, 0) \equiv 1.$$

Formăm sistemul

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} Y(\theta, y, \varepsilon).$$

Avem, cu aceleași calcule ca în paragraful precedent

$$\Theta(\theta, y, \varepsilon) = \frac{X^*[u(\theta)] Z[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon]}{|X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)] \frac{dS(\theta)}{d\theta} y},$$

$$Y^\mu(\theta, y, \varepsilon) = \xi_\mu^*(\theta) Z[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon] - \Theta(\theta, y, \varepsilon) \xi_\mu^*(\theta) \frac{dS(\theta)}{d\theta} y.$$

Mai departe

$$Z[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon] = Z[u(\theta), 0] + \frac{\partial Z[u(\theta), 0]}{\partial x} S(\theta)y + \varepsilon \frac{\partial Z[u(\theta), 0]}{\partial \varepsilon} +$$

$$+ o(|y| + |\varepsilon|) = X[u(\theta)] + A(\theta)S(\theta)y + \varepsilon \frac{\partial Z[u(\theta), 0]}{\partial \varepsilon} + o(|y| + |\varepsilon|).$$

Rezultă

$$\xi_{\mu}^*(\theta)Z[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon] = \xi_{\mu}^*(\theta)A(\theta)S(\theta)y + \varepsilon \xi_{\mu}^*(\theta) \frac{\partial Z[u(\theta), 0]}{\partial \varepsilon} + o(|y| + |\varepsilon|)$$

Ținând seama de faptul că

$$\Theta(\theta, y, \varepsilon) = 1 + O(|y|) + O(|\varepsilon|),$$

rezultă

$$\frac{dy^{\mu}}{d\theta} = \xi_{\mu}^*(\theta) \left[ A(\theta)S(\theta) - \frac{dS(\theta)}{d\theta} \right] y + \varepsilon \xi_{\mu}^*(\theta) \frac{\partial Z[u(\theta), 0]}{\partial \varepsilon} + o(|y| + |\varepsilon|).$$

În definitiv

$$\frac{dy}{d\theta} = B(\theta)y + \varepsilon \eta(\theta) + o(|y| + |\varepsilon|), \quad (17)$$

unde

$$\eta^{\mu}(\theta) = \xi_{\mu}^*(\theta) \frac{\partial Z[u(\theta), 0]}{\partial \varepsilon}.$$

**TEOREMA 3.15.** *Dacă sistemul (13) admite o soluție periodică  $x = u(t)$  de perioadă  $\omega$ , astfel încât sistemul în variații corespunzător admite un singur multiplicator egal cu 1, atunci pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic sistemul (16) admite o soluție periodică unică  $x = x(t, \varepsilon)$ , de perioadă  $\omega + O(\varepsilon)$ , cu proprietatea  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = u(t)$ . Dacă în plus nici unul din multiplicatori, cu excepția celui egal cu 1, nu este rădăcină a unității, sistemul (16) nu admite în vecinătatea soluției  $u(t)$  soluții de perioadă  $p\omega + O(\varepsilon)$ . Dacă multiplicatorii diferiți de 1 se află în interiorul cercului unitate, atunci soluția periodică a sistemului (16) este orbital stabilă.*

*Demonstrație.* Fie  $y(\theta, c, \varepsilon)$  soluția sistemului (17) cu  $y(0, c, \varepsilon) = c$ . Funcția  $y(\theta, c, \varepsilon)$  este continuu diferențiabilă în raport cu  $c$  și  $\varepsilon$ ; cum  $y(\theta, 0, 0) = 0$ , putem scrie

$$y(\theta, c, \varepsilon) = G(\theta)c + r(\theta)\varepsilon + o(|c| + |\varepsilon|).$$

Înlocuind în sistemul (17) obținem

$$\begin{aligned} \frac{dG(\theta)}{d\theta}c + \frac{dr(\theta)}{d\theta}\varepsilon + o(|c| + |\varepsilon|) &= B(\theta)[G(\theta)c + r(\theta)\varepsilon + \\ &+ o(|c| + |\varepsilon|)] + \varepsilon \eta(\theta) + o(|c| + |\varepsilon|). \end{aligned}$$

Rezultă

$$\frac{dG(\theta)}{d\theta} = B(\theta)G(\theta), \quad \frac{dr(\theta)}{d\theta} = B(\theta)r(\theta) + \eta(\theta),$$

$$G(0) = E, \quad r(0) = 0.$$

Prin urmare,  $G(\theta)$  e o matrice fundamentală a sistemului în variații normale, iar  $r(\theta)$  este o soluție a sistemului neomogen, dată de formula

$$r(\theta) = G(\theta) \int_0^\theta G^{-1}(s) \eta(s) ds.$$

Soluția  $y(\theta, c, \varepsilon)$  este periodică de perioadă  $p\omega$  dacă și numai dacă

$$y = (p\omega, c, \varepsilon) = y(0, c, \varepsilon) = c.$$

Dar

$$y(p\omega, c, \varepsilon) = G(p\omega)c + r(p\omega)\varepsilon + o(|c| + |\varepsilon|).$$

Rezultă că putem scrie condiția de periodicitate sub forma

$$[G(p\omega) - E]c + r(p\omega)\varepsilon + o(|c| + |\varepsilon|) = 0.$$

Dacă

$$\det[G(p\omega) - E] \neq 0$$

există pentru  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$  o funcție  $c(\varepsilon)$  continuu diferențiabilă, cu  $c(0) = 0$  și astfel ca

$$[G(p\omega) - E]c(\varepsilon) + r(p\omega)\varepsilon + o(|c(\varepsilon)| + |\varepsilon|) \equiv 0.$$

Soluția  $y(\theta, c(\varepsilon), \varepsilon)$  este o soluție periodică de perioadă  $p\omega$  a sistemului (17), care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către zero.

Acestei soluții periodice îi corespunde o soluție

$$x[t(\theta)] = u(\theta) + S(\theta)y(\theta, c(\varepsilon), \varepsilon)$$

a sistemului (16); curba  $x = x[t(\theta)]$  este curbă închisă vecină cu  $x = u(\theta)$  și pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către aceasta. Perioada  $\omega_p$  a soluției  $x(t)$  va fi dată de

$$\begin{aligned} t(p\omega) - t(0) &= \int_0^{p\omega} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{p\omega} \frac{d\theta}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} = \int_0^{p\omega} \{1 + O(|y|) + O(|\varepsilon|)\} d\theta = \\ &= p\omega + O(|y| + |\varepsilon|) = p\omega + O(|\varepsilon|) \end{aligned}$$

deoarece

$$|y| = O(|\varepsilon|).$$

Deoarece  $G(\theta)$  este o matrice fundamentală a sistemului în variații normale, avem  $G(p\omega) = G^p(\omega)$ , deci dacă  $G(\omega)$  are o valoare proprie egală cu 1, atunci  $G(p\omega)$  are o valoare proprie egală cu 1, deci dacă  $\det(G(\omega) - E) = 0$ , atunci  $\det(G(p\omega) - E) = 0$ . Rezultă de aici că dacă  $\det[G(p\omega) - E] \neq 0$ , atunci avem și  $\det[G(\omega) - E] \neq 0$ , deci există în vecinătatea soluției  $u(\theta)$  o soluție periodică de perioadă  $\omega + O(|\varepsilon|)$  a sistemului (16). Dar dacă  $\det[G(p\omega) - E] \neq 0$ , soluția periodică  $y(\theta, c(\varepsilon), \varepsilon)$  este unică de perioadă  $p\omega$  și deci coincide cu cea de perioadă  $\omega$ . Dacă  $\det[G(\omega) - E] \neq 0$  dar există  $p$  astfel ca  $\det[G(p\omega) - E] = 0$ , atunci pentru acest  $p$  pot exista soluții  $y(\theta, c(\varepsilon), \varepsilon)$  de perioadă  $p\omega$  care nu admit și perioada  $\omega$ . Condiția  $\det[G(\omega) - E] \neq 0$  înseamnă condiția ca multipli-

catorii sistemului în variații normale să nu fie egali cu 1, deci condiția ca sistemul în variații să admită un singur multiplicator egal cu 1.

Rămâne să demonstrăm afirmația relativă la stabilitatea soluției. Avem

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) &= \frac{\partial Z[x(t, \varepsilon), \varepsilon]}{\partial x} = \frac{\partial Z[u(t) + O(\varepsilon), \varepsilon]}{\partial x} = \frac{\partial Z[u(t), 0]}{\partial x} + O(\varepsilon) = \\ &= \frac{\partial [Xu(t)]}{\partial x} + O(\varepsilon) = A(t) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Conform ipotezei, sistemul

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v$$

are multiplicatorii în interiorul cercului unitate, cu excepția celui egal cu 1. Deoarece multiplicatorii depind continuu de matricea de monodromie, iar aceasta depinde continuu de coeficienții sistemului, rezultă că pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic multiplicatorii sistemului

$$\frac{dv}{dt} = A(t, \varepsilon)v,$$

cu excepția celui egal cu 1, se vor găsi în interiorul cercului unitate. Stabilitatea orbitală a soluției periodice  $x(t, \varepsilon)$  rezultă acum pe baza teoremei 3.14. Teorema este complet demonstrată.

Considerăm acum cazul când sistemul (13) admite o soluție periodică  $x = u(t)$  de perioadă  $\omega_0$ , astfel încât toate soluțiile vecine cu ea să fie tot periodice; în cazul  $n \geq 3$  vom presupune că perioadele acestor soluții sînt mărginite. Fie  $x_0$  un punct de pe curba închisă  $C_0$  dată de  $x = u(t)$ , și  $\Pi$  hiperplanul normal la  $C_0$  în  $x_0$ . Conform ipotezei, orice traiectorie care taie pe  $\Pi$  într-un punct vecin cu  $x_0$  este închisă și reciproc, orice traiectorie închisă din vecinătatea lui  $C_0$  taie pe  $\Pi$  într-un punct vecin cu  $x_0$ . Fie  $\omega(x)$  perioada unei astfel de traiectorii,  $\omega(x_0) = \omega_0$ . Demonstrăm că putem alege perioadele astfel încât funcția  $\tilde{\omega}(x)$ , care pentru orice  $x$  vecin cu  $x_0$  este o perioadă a traiectoriei care trece prin  $x$ , să fie continuă în  $x_0$ . Traietoriile considerate sînt date de soluțiile sistemului (15).

Conform ipotezei, soluțiile acestui sistem, pentru  $|y|$  suficient de mic, vor fi funcții periodice de  $\theta$  cu perioada  $p\omega_0$ ; într-adevăr, orice astfel de soluție corespunde unei soluții a sistemului (13) situată în vecinătatea curbei  $x = u(t)$ , periodică cu perioada

$$t(p\omega_0) - t(0) = \int_0^{p\omega_0} \frac{d\theta}{\Theta(\theta, y)}$$

și reciproc, dacă soluția  $x(t)$  e periodică cu perioada  $\omega$ , înseamnă că pentru această soluție,

$$\theta(t + \omega) = \theta(t) + p\omega_0, \quad y(t + \omega) = y(t),$$



ceea ce arată că  $y(\theta)$  e periodică cu perioada  $p\omega_0$ . Avem

$$t(p\omega_0) - t((p-1)\omega_0) - \omega_0 = \int_{(p-1)\omega_0}^{p\omega_0} \left[ \frac{1}{\Theta(\theta, y)} - 1 \right] d\theta = \int_{(p-1)\omega_0}^{p\omega_0} O(|y|) d\theta.$$

De aici rezultă că pentru  $H > 0$  suficient de mic există  $R > 0$  astfel încît dacă  $|y| < H$  să avem

$$|t(p\omega_0) - t((p-1)\omega_0) - \omega_0| \leq R \max |y|.$$

Dacă  $n = 2$ , din proprietățile generale ale sistemelor în plan rezultă că singurul caz posibil este  $p = 1$ , deci  $\omega(x) = t(\omega_0) - t(0)$ ; rezultă

$$|\omega(x) - \omega_0| \leq R \max |y|$$

și deci  $\omega(x)$  e continuă pentru  $x = x_0$ . Fie acum  $n \geq 3$ ,  $\omega(x) = t(p\omega_0) - t(0)$ . Avem

$$\omega(x) - p\omega_0 = [t(p\omega_0) - t((p-1)\omega_0) - \omega_0] + [t((p-1)\omega_0) - t((p-2)\omega_0) - \omega_0] + \dots + \dots + [t(\omega_0) - t(0) - \omega_0].$$

Rezultă

$$|\omega(x) - p\omega_0| \leq p R \max |y|,$$

deci

$$\omega(x) - p\omega_0 \geq -p R \max |y|, \quad \omega(x) \geq p[\omega_0 - R \max |y|].$$

Pentru  $|y|$  suficient de mic,

$$\omega_0 - R \max |y| > 0.$$

Deoarece am presupus că perioadele  $\omega(x)$  sînt mărginite, rezultă de aici

$$p < \frac{M}{\omega_0 - R \max |y|}$$

deci mulțimea întregilor  $p$  este mărginită. Fie  $S_p$  mulțimea punctelor  $x$  situate în hiperplanul  $\Pi$  în vecinătatea lui  $x$  și astfel încît perioada soluției care trece prin  $x$  să fie apropiată de  $p\omega_0$  și fie  $L$  cel mai mic multiplu comun al numerelor  $p$ . Pentru  $x \in S_p$  vom lua

$$\tilde{\omega}(x) = \frac{L}{p} \omega(x);$$

evident,  $\tilde{\omega}(x)$  continuă să fie perioadă pentru soluția care trece prin  $x$ . Avem

$$|\tilde{\omega}(x) - L\omega_0| = \frac{L}{p} |\omega(x) - p\omega_0| < \frac{L}{p} \bar{\varepsilon};$$

pentru  $\varepsilon > 0$  arbitrar, alegem pe  $\bar{\varepsilon}$  astfel ca  $\frac{L}{p} \bar{\varepsilon} < \varepsilon$  și apoi alegem veci-

năitatea lui  $x_0$  suficient de mică pentru ca  $|\omega(x) - p\omega_0| < \bar{\varepsilon}$ . Ținînd seama că  $\omega(x_0) = x_0$ , deci că  $x_0 \in S_1$ , rezultă

$$\tilde{\omega}(x_0) = L\omega_0 = L\omega(x_0),$$

deci

$$|\tilde{\omega}(x) - \tilde{\omega}(x_0)| < \varepsilon$$

dacă  $x$  este într-o vecinătate suficient de mică a lui  $x_0$ , ceea ce arată că  $\tilde{\omega}$  e continuă în punctul  $x_0$ . Vom numi perioada  $\tilde{\omega}(x)$  *perioada universală*. În cele ce urmează vom lucra numai cu perioadele universale.

Fie  $y(\theta, \alpha)$  soluția sistemului (15) cu  $y(0, \alpha) = \alpha$ ; dacă  $\omega_0$  e perioadă universală a lui  $C_0$ , pentru  $|\alpha|$  suficient de mic soluțiile  $y(\theta, \alpha)$  sînt toate periodice cu perioada  $\omega_0$ , deci  $y(\omega_0, \alpha) = \alpha$ . Curbele închise din vecinătatea curbei  $C_0$  se pot scrie

$$x(t) = u(\theta) + S(\theta)y(\theta, \alpha);$$

notăm cu  $C_\alpha$  curba corespunzătoare soluției  $y(\theta, \alpha)$ . Presupunînd  $t(0) = 0$  avem

$$t(\theta, \alpha) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\Theta[\theta, y(\theta, \alpha)]}$$

iar perioada universală  $\omega_\alpha$  este dată de

$$\omega_\alpha = t(\omega_0, \alpha).$$

Dacă scriem sistemul (15) sub forma

$$\frac{dy}{d\theta} = W(\theta, y), \quad (18)$$

sistemul (17) se scrie

$$\frac{dy}{d\theta} = W(\theta, y) + \varepsilon W_1(\theta, y, \varepsilon). \quad (19)$$

Soluția generală  $y(\theta, \alpha)$  a sistemului (18) este pentru  $|\alpha|$  suficient de mic, periodică în  $\theta$  cu perioada  $\omega_0$ . Pentru studiul soluțiilor periodice de perioadă  $\omega_0$  ale sistemului (19) putem folosi teorema 3.9.

În cazul cînd soluția  $u(t)$  a sistemului (13) face parte dintr-o familie de soluții periodice depinzînd de  $k+1$  parametri, presupunînd din nou că perioadele sînt mărginite va rezulta existența unei perioade universale. Sistemul (18) va avea o familie de soluții periodice de perioadă  $\omega_0$ , depinzînd de  $k$  parametri și pentru studiul soluțiilor periodice de perioadă  $\omega_0$  ale sistemului (19) se poate folosi teorema 3.8.

*Aplicații.* 1°. Presupunem  $n = 2$  și considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

$x, y$  fiind scalari. Fie  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  o soluție periodică a acestui si-

tem. Sistemul ortogonal normat legat de această curbă e format din vectorii

$$\left( \frac{X[\varphi(t), \psi(t)]}{R}, \frac{Y[\varphi(t), \psi(t)]}{R} \right), \left( -\frac{Y[\varphi(t), \psi(t)]}{R}, \frac{X[\varphi(t), \psi(t)]}{R} \right), \quad R = \sqrt{X^2[\varphi, \psi] + Y^2[\varphi, \psi]}.$$

Matricea  $A(\theta)$  a coeficienților sistemului în variații este

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X[\varphi(\theta), \psi(\theta)]}{\partial x} & \frac{\partial X[\varphi(\theta), \psi(\theta)]}{\partial y} \\ \frac{\partial Y[\varphi(\theta), \psi(\theta)]}{\partial x} & \frac{\partial Y[\varphi(\theta), \psi(\theta)]}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

De aici

$$A(\theta) \begin{pmatrix} -\frac{Y}{R} \\ \frac{X}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{Y}{R} \\ \frac{X}{R} \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\frac{\partial X}{\partial x} Y + \frac{\partial X}{\partial y} X \\ -\frac{\partial Y}{\partial x} Y + \frac{\partial Y}{\partial y} X \end{pmatrix}.$$

Produsul scalar dintre vectorul  $\begin{pmatrix} -\frac{Y}{R} \\ \frac{X}{R} \end{pmatrix}$  și vectorul  $A(\theta) \begin{pmatrix} -\frac{Y}{R} \\ \frac{X}{R} \end{pmatrix}$  este

egal cu  $\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial X}{\partial x} Y^2 - \frac{\partial X}{\partial y} X Y - \frac{\partial Y}{\partial x} X Y + \frac{\partial Y}{\partial y} X^2 \right)$ , iar produsul sca-

lar dintre vectorul unitar  $\begin{pmatrix} -\frac{Y}{R} \\ \frac{X}{R} \end{pmatrix}$  și derivata lui este nul, deci

$$b(\theta) = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial X}{\partial x} Y^2 - \frac{\partial X}{\partial y} X Y - \frac{\partial Y}{\partial x} X Y + \frac{\partial Y}{\partial y} X^2 \right).$$

Avem mai departe

$$\frac{d}{d\theta} \ln R = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \ln R^2 = \frac{1}{2} \frac{\frac{dR^2}{d\theta}}{R^2} = \frac{1}{R^2} (X\dot{X} + Y\dot{Y}).$$

Dar

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial X}{\partial y} \dot{y}, \quad \dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \dot{y},$$

deci

$$\frac{d}{d\theta} \ln R = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial X}{\partial x} X^2 + \frac{\partial X}{\partial y} XY + \frac{\partial Y}{\partial x} XY + \frac{\partial Y}{\partial y} Y^2 \right).$$

Rezultă

$$b(\theta) + \frac{d}{d\theta} \ln R = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial X}{\partial x} (Y^2 + X^2) + \frac{\partial Y}{\partial y} (X^2 + Y^2) \right) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y},$$

deci

$$b(\theta) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{d}{d\theta} \ln \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Sistemul în variații normale se reduce la ecuația

$$\frac{dv}{d\theta} = b(\theta) v$$

și soluția ei cu  $v(0) = 1$  este

$$v(\theta) = e^{\int_0^\theta \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) d\theta} - \int_0^\theta \frac{d}{d\theta} \ln \sqrt{X^2 + Y^2} d\theta = \frac{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2}} e^{h(\theta)}$$

unde

$$h(\theta) = \int_0^\theta \left[ \frac{\partial X[\varphi(t), \psi(t)]}{\partial x} + \frac{\partial Y[\varphi(t), \psi(t)]}{\partial y} \right] dt.$$

Condiția de stabilitate orbitală este dată de  $h(\omega) < 0$ . Dacă  $h(\omega) \neq 0$ , în vecinătatea soluției periodice considerate apare o soluție periodică a sistemului perturbat.

2°. Considerăm cazul când  $X(x) = Ax$ ,  $A$  fiind o matrice constantă care are două valori proprii pur imaginare. Vom presupune că matricea  $A$  este de ordinul al treilea și că are valorile proprii  $i$ ,  $-i$ ,  $\alpha$ . Printr-o transformare liniară cu coeficienți constanți,  $A$  se poate aduce la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vom presupune de la început că are această formă. Sistemul (13) se va scrie, în acest caz,

$$\frac{dx^1}{dt} = \alpha x^1, \quad \frac{dx^2}{dt} = -x^3, \quad \frac{dx^3}{dt} = x^2$$

și admite matricea fundamentală de soluții

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Fie

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Considerăm soluția

$$u(t, \alpha) = \alpha (\cos t e_2 + \sin t e_3).$$

Avem

$$X[u(t, \alpha)] = \dot{u}(t, \alpha) = \alpha (-\sin t e_2 + \cos t e_3), \quad |X[u(t, \alpha)]| = |\alpha|,$$

$$\bar{X}[u(t, \alpha)] = -\sin t e_2 + \cos t e_3,$$

$$\cos \theta_1 = 0, \quad \cos \theta_2 = -\sin t, \quad \cos \theta_3 = \cos t,$$

$$\xi_2 = e_2 + \sin t (e_1 - \sin t e_2 + \cos t e_3) = \sin t e_1 + \cos^2 t e_2 + \sin t \cos t e_3,$$

$$\xi_3 = e_3 - \cos t (e_1 - \sin t e_2 + \cos t e_3) = -\cos t e_1 + \sin t \cos t e_2 + \sin^2 t e_3.$$

Fie

$$Z(x, \varepsilon) = Ax + \varepsilon X(x, \varepsilon).$$

Vom avea

$$\begin{aligned} \Theta(\theta, y, \varepsilon) &= \frac{X^*[u(\theta)] \cdot Z[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon]}{|X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)] \frac{dS(\theta)}{d\theta} y} = \\ &= \frac{X^*[u(\theta)] (X[u(\theta) + S(\theta)y] + \varepsilon X[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon])}{|X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)] \frac{dS(\theta)}{d\theta} y}. \end{aligned}$$

Dar

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X^*[u(\theta)] \frac{dS(\theta)}{d\theta} &= (0 \quad -\alpha \sin \theta \quad \alpha \cos \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha \sin \theta \sin 2\theta + \alpha \cos \theta \cos 2\theta, -\alpha \sin \theta \cos 2\theta + \alpha \cos \theta \sin 2\theta) = \\ &= (\alpha \cos \theta \quad \alpha \sin \theta) = \alpha (\cos \theta \quad \sin \theta), \end{aligned}$$

deci numitorul în expresia lui  $\Theta(\theta, y, \varepsilon)$  este  $\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)$ . Numărătorul este de forma

$$X^*[u(\theta)](Au(\theta) + AS(\theta)y + \varepsilon X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)) = \\ = |X[u(\theta)]|^2 + X^*[u(\theta)]AS(\theta)y + \varepsilon X^*[u(\theta)]X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon).$$

Avem

$$X^*[u(\theta)]A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \sin \theta & \alpha \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \cos \theta & \alpha \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$X^*[u(\theta)]AS(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \cos \theta & \alpha \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \\ = (\alpha \cos \theta \quad \alpha \sin \theta),$$

$$X^*[u(\theta)]AS(\theta)y = \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta).$$

Rezultă

$$\Theta(\theta, y, \varepsilon) = \frac{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta) + \varepsilon X^*[u(\theta)]X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} = \\ = 1 + \varepsilon \frac{X^*[u(\theta)]X[u(\theta) + S(\theta)y, 0]}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} + o(\varepsilon).$$

Mai departe

$$Y^\mu(\theta, y, \varepsilon) = \xi_\mu^*(\theta)Z[u(\theta) + S(\theta)y, \varepsilon] - \Theta(\theta, y, \varepsilon)\xi_\mu^*(\theta)\frac{dS(\theta)}{d\theta}y,$$

deci

$$\frac{Y^\mu(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} = \frac{\xi_\mu^*(\theta)[X[u(\theta)] + AS(\theta)y + \varepsilon X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)]}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} - \\ - \xi_\mu^*(\theta)\frac{dS(\theta)}{d\theta}y = \frac{\xi_\mu^*(\theta)AS(\theta)y + \varepsilon \xi_\mu^*(\theta)X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} - \\ - \xi_\mu^*(\theta)\frac{dS(\theta)}{d\theta}y.$$

Avem

$$AS(\theta) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin \theta & -a \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\xi_2^*(\theta)AS(\theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \sin \theta & -a \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} = \\ = (a \sin^2 \theta \quad -a \sin \theta \cos \theta),$$

$$\begin{aligned}\xi_3^*(\theta) AS(\theta) &= \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \sin \theta & -a \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= (-a \sin \theta \cos \theta \quad a \cos^2 \theta),\end{aligned}$$

$$\xi_2^*(\theta) \frac{dS(\theta)}{d\theta} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\xi_3^*(\theta) \frac{dS(\theta)}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned}\frac{Y^2(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} &= y_3 + \\ &+ \frac{a \sin \theta (y_2 \sin \theta - y_3 \cos \theta) + \varepsilon \xi_2^*(\theta) X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)}{1 + \varepsilon \frac{X^*[u(\theta)] X[u(\theta) + S(\theta)y, 0]}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} + o(\varepsilon)} \\ \frac{Y^3(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} &= -y_2 + \\ &+ \frac{a \cos \theta (-y_2 \sin \theta + y_3 \cos \theta) + \varepsilon \xi_3^*(\theta) X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)}{1 + \varepsilon \frac{X^*[u(\theta)] X[u(\theta) + S(\theta)y, 0]}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)}}.\end{aligned}$$

De aici

$$\begin{aligned}\frac{Y^2(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} &= y_3 + [a \sin \theta (y_2 \sin \theta - y_3 \cos \theta) + \varepsilon \xi_2^*(\theta) X[u(\theta) + \\ &+ S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)] \left[ 1 - \varepsilon \frac{X^*[u(\theta)] X[u(\theta) + S(\theta)y, 0]}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} + o(\varepsilon) \right] = \\ &= y_3 + a \sin \theta (y_2 \sin \theta - y_3 \cos \theta) + \varepsilon \xi_2^*(\theta) X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] - \\ &- \varepsilon \frac{a \sin \theta (y_2 \sin \theta - y_3 \cos \theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} X^*[u(\theta)] X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon), \\ \frac{Y^2(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} &= y_2 a \sin^2 \theta + y_3 (1 - a \sin \theta \cos \theta) + \\ &+ \varepsilon \left[ \xi_2^*(\theta) - \frac{a \sin \theta (y_2 \sin \theta - y_3 \cos \theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} X^*[u(\theta)] \right] X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{Y^3(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} &= -y_2 + a \cos \theta (-y_2 \sin \theta + y_3 \cos \theta) + \varepsilon \xi_3^*(\theta) X[u(\theta) + \\
&+ S(\theta)y, 0] - \varepsilon \frac{a \cos \theta (-y_2 \sin \theta + y_3 \cos \theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} X^*[u(\theta)] X[u(\theta) + \\
&+ S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon) = -y_2(1 + a \sin \theta \cos \theta) + y_3 a \cos^2 \theta + \varepsilon \left[ \xi_3^*(\theta) - \right. \\
&\left. - \frac{a \cos \theta (-y_2 \sin \theta + y_3 \cos \theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} X^*[u(\theta)] \right] X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned}
&\left[ \xi_2^*(\theta) - \frac{a \sin \theta (y_2 \sin \theta - y_3 \cos \theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} X^*[u(\theta)] \right] X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] = \\
&= X_1[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \sin \theta + X_2[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \left[ \cos^2 \theta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a \sin \theta (y_2 \sin \theta - y_3 \cos \theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} \alpha \sin \theta \right] + X_3[u(\theta) + \\
&\quad + S(\theta)y, 0] \left[ \sin \theta \cos \theta - \frac{a \sin \theta (y_2 \sin \theta - y_3 \cos \theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} \alpha \cos \theta \right] = \\
&= X_1[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \sin \theta + X_2[u(\theta) + \\
&\quad + S(\theta)y, 0] \frac{\alpha \cos^2 \theta + y_2 \cos^3 \theta + y_3 \cos^2 \theta \sin \theta + a y_2 \sin^3 \theta - a y_3 \sin^2 \theta \cos \theta}{\alpha + y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta} + \\
&\quad + X_3[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \cdot \\
&\quad \cdot \frac{\alpha \sin \theta \cos \theta + y_2 \sin \theta \cos^2 \theta + y_3 \sin^2 \theta \cos \theta - a y_2 \sin^2 \theta \cos \theta + a y_3 \sin \theta \cos^2 \theta}{\alpha + y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta} = \\
&= X_1[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \sin \theta + X_2[u(\theta) + \\
&\quad + S(\theta)y, 0] \frac{\alpha \cos^2 \theta + y_2(\cos^3 \theta + a \sin^3 \theta) + y_3 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta)}{\alpha + y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta} + \\
&\quad + X_3[u(\theta) + \\
&\quad + S(\theta)y, 0] \frac{\alpha \sin \theta \cos \theta + y_2 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta) + y_3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta)}{\alpha + y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta}.
\end{aligned}$$

La fel

$$\left[ \xi_3^*(\theta) - \frac{a \cos \theta (-y_2 \sin \theta + y_3 \cos \theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} X^*[u(\theta)] \right] X[u(\theta) + S(\theta)y, 0] =$$



$$\begin{aligned}
&= -X_1[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \cos \theta + X_2[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \left[ \sin \theta \cos \theta + \right. \\
&+ \left. \frac{a \cos \theta (-y_2 \sin \theta + y_3 \cos \theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} \alpha \sin \theta \right] + X_3[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \left[ \sin^2 \theta - \right. \\
&- \left. \frac{a \cos \theta (-y_2 \sin \theta + y_3 \cos \theta)}{\alpha^2 + \alpha(y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta)} \alpha \cos \theta \right] = -X_1[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \cos \theta + \\
&+ X_2[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \frac{\alpha \sin \theta \cos \theta + y_2 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta) + y_3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta)}{\alpha + y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta} + \\
&+ X_3[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \frac{\alpha \sin^2 \theta + y_2 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta) + y_3 (\sin^3 \theta - a \cos^3 \theta)}{\alpha + y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta}.
\end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned}
\frac{dy_2}{dt} &= y_2 a \sin^2 \theta + y_3 (1 - a \sin \theta \cos \theta) + \varepsilon \left\{ X_1[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \sin \theta + \right. \\
&+ X_2[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \frac{\alpha \cos^2 \theta + y_2 (\cos^3 \theta + a \sin^3 \theta) + y_3 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta)}{\alpha + y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta} + \\
&+ X_3[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \frac{\alpha \sin \theta \cos \theta + y_2 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta) + y_3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta)}{\alpha + y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta} \left. \right\} + o(\varepsilon) \\
\frac{dy_3}{dt} &= -y_2 (1 + a \sin \theta \cos \theta) + y_3 a \cos^2 \theta + \varepsilon \left\{ -X_1[u(\theta) + \right. \\
&+ S(\theta)y, 0] \cos \theta + X_2[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \frac{\alpha \sin \theta \cos \theta + y_2 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta) + y_3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta)}{\alpha + y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta} + \\
&+ X_3[u(\theta) + S(\theta)y, 0] \frac{\alpha \sin^2 \theta + y_2 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta) + y_3 (\sin^3 \theta - a \cos^3 \theta)}{\alpha + y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta} \left. \right\} + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Am obținut astfel forma explicită a sistemului (19). Sistemul (18) este în acest caz

$$\begin{aligned}
\frac{dy_2}{d\theta} &= y_2 a \sin^2 \theta + y_3 (1 - a \sin \theta \cos \theta), \\
\frac{dy_3}{d\theta} &= -y_2 (1 + a \sin \theta \cos \theta) + y_3 a \cos^2 \theta.
\end{aligned}$$

Pentru a obține o matrice fundamentală de soluții a acestui sistem să observăm că el coincide cu sistemul în variații normale, deci soluțiile lui vor fi componentele normale ale soluțiilor sistemului în variații, care în acest caz este  $\frac{dx}{dt} = Ax$ . Descompunem deci soluțiile acestui sistem după vectorii  $(\bar{X}, \xi_2, \xi_3)$ . Avem

$$e^{a\theta} e_1 = p_1^1 \bar{X} + p_1^2 \xi_2 + p_1^3 \xi_3,$$

$$\cos \theta e_2 + \sin \theta e_3 = p_2^1 \bar{X} + p_2^2 \xi_2 + p_2^3 \xi_3,$$

$$-\sin \theta e_2 + \cos \theta e_3 = p_3^1 \bar{X} + p_3^2 \xi_2 + p_3^3 \xi_3.$$

Din ultima relație obținem

$$-\sin \theta = -p_3^1 \sin \theta + p_3^2 \cos^2 \theta + p_3^3 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\cos \theta = p_3^1 \cos \theta + p_3^2 \sin \theta \cos \theta + p_3^3 \sin^2 \theta,$$

$$0 = p_3^2 \sin \theta - p_3^3 \cos \theta.$$

Rezultă

$$p_3^1 = \frac{\begin{vmatrix} -\sin \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{vmatrix}} = 1, \quad p_3^2 = 0, \quad p_3^3 = 0.$$

Celelalte relații dau

$$e^{a\theta} = p_1^2 \sin \theta - p_1^3 \cos \theta,$$

$$0 = -p_1^1 \sin \theta + p_1^2 \cos^2 \theta + p_1^3 \sin \theta \cos \theta$$

$$0 = p_1^1 \cos \theta + p_1^2 \sin \theta \cos \theta + p_1^3 \sin^2 \theta$$

$$\cos \theta = -p_2^1 \sin \theta + p_2^2 \cos^2 \theta + p_2^3 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\sin \theta = p_2^1 \cos \theta + p_2^2 \sin \theta \cos \theta + p_2^3 \sin^2 \theta.$$

$$0 = p_2^2 \sin \theta - p_2^3 \cos \theta,$$

Aceste două sisteme au același determinant (același cu determinantul sistemului precedent); coloanele acestui determinant sînt componentele vectorilor  $\bar{X}, \xi_2, \xi_3$  în baza  $e_1, e_2, e_3$  și cum acești vectori formează un sistem ortogonal și normat, determinantul este egal cu 1. Rezultă

$$p_1^2 = e^{a\theta} \sin \theta, \quad p_1^3 = -e^{a\theta} \cos \theta, \quad p_2^2 = \cos \theta, \quad p_2^3 = \sin \theta,$$

deci sistemul (18) admite matricea fundamentală de soluții

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -e^{a\theta} \sin \theta \\ \sin \theta & e^{a\theta} \cos \theta \end{pmatrix}$$

și deci familia de soluții periodice de perioadă  $2\pi$ ,

$$y_2 = \beta \cos \theta, \quad y_3 = \beta \sin \theta.$$

Sistemul adjuncț are ca matrice fundamentală pe

$$G^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -e^{-a\theta} \sin \theta & e^{-a\theta} \cos \theta \end{pmatrix}$$

și soluția periodică de aceeași formă.

Vom aplica teorema 3.8 la sistemul (19). Avem de calculat pe  $P(\gamma)$ .  
Avem

$$S(\theta)y = \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \cos \theta \\ \beta \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \cos \theta \\ \beta \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$u(\theta) + S(\theta)y = (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta = \beta,$$

$$\begin{aligned} & y_2 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta) + y_3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta) = \\ &= \beta \sin \theta \cos^2 \theta (\cos \theta - a \sin \theta) + \beta \sin^2 \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta) = \\ &= \beta \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - a \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta + a \sin \theta \cos \theta) = \beta \sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y_2 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta) + y_3 (\sin^3 \theta - a \cos^3 \theta) = \\ &= \beta \sin \theta \cos^2 \theta (\sin \theta + a \cos \theta) + \beta \sin \theta (\sin^3 \theta - a \cos^3 \theta) = \\ &= \beta (\sin^2 \theta \cos^2 \theta + a \sin \theta \cos^3 \theta + \sin^4 \theta - a \sin \theta \cos^3 \theta) = \beta \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y_2 (\cos^3 \theta + a \sin^3 \theta) + y_3 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta) = \\ &= \beta \cos \theta (\cos^3 \theta + a \sin^3 \theta) + \beta \sin^2 \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta) = \\ &= \beta (\cos^4 \theta + a \cos \theta \sin^3 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta - a \sin^3 \theta \cos \theta) = \beta \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y_2 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta) + y_3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta) = \\ &= \beta \sin \theta \cos^2 \theta (\cos \theta - a \sin \theta) + \beta \sin^2 \theta \cos \theta (\sin \theta + a \cos \theta) = \\ &= \beta \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - a \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta + a \sin \theta \cos \theta) = \beta \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Rezultă că în sistemul (19) termenii în  $\varepsilon$ , scriși pentru soluția generatoare  $y_2 = \beta \cos \theta$ ,  $y_3 = \beta \sin \theta$ , devin

$$\begin{aligned} & X_1(0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0) \sin \theta + X_2(0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0) \cos^2 \theta + \\ &+ X_3(0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0) \sin \theta \cos \theta - X_1(0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0) \cos \theta + \\ &+ X_2(0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0) \sin \theta \cos \theta + X_3(0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0) \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

**Rezultă**

$$\begin{aligned}
 P(\gamma) &\equiv \int_0^{2\pi} \{(X_1 \sin \theta + X_2 \cos^2 \theta + X_3 \sin \theta \cos \theta) \cos \theta + (-X_1 \cos \theta + \\
 &\quad + X_2 \sin \theta \cos \theta + X_3 \sin^2 \theta) \sin \theta\} d\theta \equiv \\
 &\equiv \int_0^{2\pi} \{X_2[0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0] \cos \theta + X_3[0, \gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta, 0] \sin \theta\} d\theta.
 \end{aligned}$$

Cu aceasta, teorema 3.8 permite rezolvarea completă a problemei. Aplicația considerată putea fi tratată mai simplu <sup>\*</sup>), dar am ținut să dăm un exemplu de calcul efectiv pe baza metodei prezentată teoretic.

**§ 9. SOLUȚII PERIODICE DE SPEȚA A DOUA**

În studiul unor sisteme electromecanice, de exemplu al motoarelor sincrone, al generatorului de curent alternativ, care lucrează în rețeaua comună în paralel cu alte mașini etc. după unele ipoteze simplificatoare se ajunge la aceeași problemă matematică, care apare în studiul pendulului cu frecare liniară, aflat sub acțiunea unui moment constant. Ecuația de mișcare are forma

$$I \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + b \frac{d\vartheta}{dt} + mg a \sin \vartheta = M_0$$

și intră în tipul general (dacă notăm  $\frac{d\vartheta}{dt} = z$ )

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \Phi(\vartheta, z), \quad \frac{dz}{dt} = F(\vartheta, z),$$

unde funcțiile  $\Phi$  și  $F$  sînt periodice în raport cu  $\vartheta$  cu perioada  $2\pi$ .

În studiul acestor sisteme un rol însemnat îl joacă soluțiile de forma

$$z(t) = \varphi(t), \quad \vartheta(t) = \omega t + \psi(t),$$

unde  $\varphi, \psi$  sînt periodice cu perioada  $T = \frac{2N\pi}{\omega}$ .

Într-adevăr, să observăm că

$$z(t+T) = z(t), \quad \vartheta(t+T) = \omega \left( t + \frac{2N\pi}{\omega} \right) + \psi(t+T) = \vartheta(t) + 2N\pi.$$

Datorită caracterului unghiular al variabilei  $\vartheta$ , starea sistemului nu se schimbă atunci cînd  $\vartheta$  se înlocuiește cu  $\vartheta + 2N\pi$ , deci putem considera

<sup>\*</sup>) O tratare a unor sisteme generale conținînd pe cel de mai sus drept caz particular există într-o lucrare a lui E. A. Coddington și N. Levinson.

că  $z(t+T)$ ,  $\vartheta(t+T)$  corespund aceleiași stări a sistemului ca și  $z(t)$ ,  $\vartheta(t)$ . Aceasta justifică faptul că soluțiile de forma considerată sînt asimilate cu soluțiile periodice ale sistemului și se numesc *soluții periodice de speța a doua*.

Semnificația geometrică a acestor fapte este următoarea :

Punînd în corespondență biunivocă stările sistemului cu punctele unui spațiu al fazelor, se vede că pentru sistemele considerate, din cauza periodicității în raport cu  $\vartheta$ , spațiul fazelor corespunzător este un cilindru. Soluțiile periodice de speța a doua corespund unor curbe închise situate pe acest cilindru, care înconjoară cilindrul ; curbele sînt închise deoarece cînd  $t$  variază cu  $T$ , punctul  $(\vartheta(t), z(t))$  se întoarce în același punct de pe cilindru și înconjoară cilindrul deoarece cînd  $t$  variază cu  $T$ ,  $\vartheta$  variază cu un multiplu de  $2\pi$ .

În cele ce urmează vom considera sisteme de formă generală, care conțin drept cazuri particulare pe cele de mai sus și vom pune în evidență o teoremă de stabilitate a soluțiilor periodice de speța a doua, analogă cu teorema lui Andronov-Witt, precum și o teorie a sistemelor cu parametru mic.

Considerăm un sistem autonom de forma

$$\dot{x} = f(x)$$

unde  $f(x + 2\pi p) = f(x)$ ,  $p$  fiind un vector cu unele componente egale cu 1 și cu celelalte componente nule.

Aceasta înseamnă că  $f$  este periodică de perioadă  $2\pi$  în raport cu o parte a componentelor vectorului  $x$ .

Presupunem că sistemul admite o soluție periodică de speța a doua

$$u(t) = \omega t p + \psi(t),$$

unde  $\psi$  este periodică de perioadă  $T = \frac{2\pi N}{\omega}$  ; aceasta înseamnă că

$$u(t+T) = \left(t + \frac{2\pi N}{\omega}\right)p + \psi(t+T) = u(t) + 2\pi Np,$$

deci acele componente ale lui  $u$  în raport cu care  $f$  este periodică variază cu un multiplu de  $2\pi$ , iar celelalte rămîn neschimbate. Rezultă de aici că  $f[u(t)]$  este periodică în  $t$  cu perioadă  $T$  :

$$f[u(t+T)] = f[u(t) + 2\pi Np] = f[u(t)].$$

Cu ajutorul formulelor lui M. Urabe formăm sistemul ortogonal normat legat de curba  $u(t)$  ; fie  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  vectorii acestui sistem, unde am notat  $\xi_1 = \frac{f[u(t)]}{|f[u(t)]|}$ .

Ținînd seama de modul în care a fost efectuată construcția, toți vectorii  $\xi_k$  rezultă periodici de perioadă  $T$ .

Ca și în studiul soluțiilor periodice ale sistemelor autonome facem schimbarea de variabile  $x = u(\theta) + S(\theta)y$  și obținem un sistem de forma

$$\frac{dy}{d\theta} = Y(\theta, y), \quad \frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, y),$$

unde

$$\Theta = \frac{(f[u(\theta) + S(\theta)y], f[u(\theta)])}{|f[u(\theta)]|^2 + \sum_{v=2}^n \left( f[u(\theta)], \frac{d\xi_v}{d\theta} \right) y^v},$$

$$Y_\mu = (\xi_\mu, f[u(\theta) + S(\theta)y]) - \sum_{v=2}^n \left( \xi_v, \frac{d\xi_v}{d\theta} y^v \right) \Theta.$$

Din aceste formule se vede că  $Y$  și  $\Theta$  sînt periodice în  $\theta$  cu perioadă  $T$ , deci sistemul în variații normale este un sistem liniar cu coeficienți periodici de perioadă  $T$ .

Sistemul în variații corespunzător soluției  $u(t)$  are matricea  $A(t) = f'_x[u(t)]$  și deoarece  $f'_x$  are aceleași proprietăți de periodicitate parțială ca și  $f$ , rezultă că și  $A(t)$  este periodică în  $t$  cu perioadă  $T$ . Sistemul în variații

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v$$

admite soluția

$$v = \frac{du}{dt} = \omega p + \frac{d\psi}{dt}$$

periodică în  $t$  cu perioadă  $T$ , deci admite în orice caz un multiplicator egal cu 1. Repetind calculele efectuate în cazul cînd  $u(t)$  era periodică, deducem că ceilalți multiplicatori ai sistemului în variații coincid cu multiplicatorii sistemului în variații normale.

Deducem astfel

**TEOREMA 3.14'.** *Dacă  $n-1$  multiplicatori ai sistemului în variații corespunzător soluției periodice de speța a doua  $u(t)$  se află în interiorul cercului unitate, această soluție este orbital stabilă; aceasta înseamnă că dacă  $x(t_0)$  este suficient de aproape de curba  $x = u(t)$ , atunci există  $c$  astfel încît*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - u(t+c)] = 0.$$

Această teoremă a fost stabilită de O. Vejvoda.

Să considerăm acum un sistem de parametru mic de forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \varepsilon), \quad f(x + 2\pi p, \varepsilon) = f(x, \varepsilon),$$

și să presupunem că pentru  $\varepsilon = 0$  sistemul admite o soluție periodică

de speța a doua  $u(t)$ . Considerînd din nou sistemul de vectori  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  legat de această soluție și efectuînd schimbarea de variabile

$$x = u(\theta) + S(\theta)y$$

se obține un sistem de forma

$$\frac{dy}{dt} = Y(\theta, y, \varepsilon), \quad \frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, y, \varepsilon).$$

Ca în cazul cînd  $u$  este periodică se trece la sistemul

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{Y(\theta, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, y, \varepsilon)} = B(\theta)y + \varepsilon\eta(\theta) + o(|y| + |\varepsilon|)$$

și cu metodele obișnuite se vede că dacă sistemul în variații corespunzător soluției  $u(t)$  are  $n-1$  multiplicatori diferiți de 1, există o soluție  $y(\theta, \varepsilon)$  periodică în  $\theta$  cu perioadă  $T$  cu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(\theta, \varepsilon) = 0.$$

Acestei soluții îi corespunde o soluție a sistemului inițial, de forma

$$x(t, \varepsilon) = u[\theta(t, \varepsilon)] + S[\theta(t, \varepsilon)]y[\theta(t, \varepsilon), \varepsilon].$$

Din

$$\frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, y, \varepsilon) = 1 + O(|\varepsilon| + |y|)$$

rezultă

$$t(T) - t(0) = \int_0^T \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^T \{1 + O(|\varepsilon| + |y|)\} d\theta = T + \varepsilon \tilde{T}(\varepsilon)$$

căci  $y(\theta, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ .

Deducem de aici că dacă  $t$  variază cu  $T + \varepsilon \tilde{T}(\varepsilon)$ ,  $\theta$  variază cu  $T$  și deci

$$\begin{aligned} x[t + T + \varepsilon \tilde{T}(\varepsilon), \varepsilon] &= u[\theta(t, \varepsilon) + T] + S[\theta(t, \varepsilon) + T]y[\theta(t, \varepsilon) + T, \varepsilon] = \\ &= u[\theta(t, \varepsilon)] + 2\pi Np + S[\theta(t, \varepsilon)]y[\theta(t, \varepsilon), \varepsilon] = x[\theta(t, \varepsilon)] + 2\pi Np. \end{aligned}$$

Din faptul că soluția  $x(t, \varepsilon)$  obținută verifică relația

$$x(t + T^*(\varepsilon), \varepsilon) = x(t, \varepsilon) + 2\pi Np$$

rezultă că

$$x(t, \varepsilon) = \frac{2\pi N}{T^*(\varepsilon)}pt + \psi(t, \varepsilon)$$

cu

$$\psi(t + T^*(\varepsilon), \varepsilon) = \psi(t, \varepsilon).$$

Pentru aceasta este suficient să verificăm că diferența

$$x(t, \varepsilon) - \frac{2\pi N}{T^*(\varepsilon)}pt \text{ este periodică, cu perioadă } T^*(\varepsilon).$$

Avem

$$\begin{aligned} x(t + T^*, \varepsilon) - \frac{2\pi N}{T^*(\varepsilon)} p(t + T^*) &= x(t, \varepsilon) + 2\pi N p - \frac{2\pi N}{T^*} p\varepsilon - 2\pi N p = \\ &= x(t, \varepsilon) - \frac{2\pi N}{T^*} p t \end{aligned}$$

și proprietatea e demonstrată. Am obținut astfel

**TEOREMA 3.15'.** *Dacă pentru  $\varepsilon = 0$  sistemul  $\dot{x} = f(x, \varepsilon)$  admite o soluție periodică de speța a doua  $u(t)$  astfel încât sistemul în variații corespunzător are un singur multiplicator egal cu 1, atunci pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic sistemul admite o soluție periodică de speța a doua unică  $x(t, \varepsilon)$ , cu proprietatea*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = u(t).$$

*Dacă în plus nici unul din multiplicatori, cu excepția celui egal cu 1, nu este rădăcină a unității, sistemul nu admite în vecinătatea curbei  $x = u(t)$  alte soluții care să fie curbe închise în spațiul fazelor, afară de  $x(t, \varepsilon)$ . Dacă multiplicatorii diferiți de 1 se află în interiorul cercului unitate, soluția periodică de speța a doua  $x(t, \varepsilon)$  este orbital stabilă.*

În același fel se studiază mai departe și cazurile când sistemul în variații are mai mulți multiplicatori egali cu 1, de exemplu cazurile când există o familie de soluții periodice de speța a doua. Totul revine la studiul soluțiilor periodice ale sistemului

$$\frac{dy}{d\theta} = B(\theta)y + \varepsilon \eta(\theta) + o(|y| + |\varepsilon|)$$

care se efectuează cu metodele obișnuite.

## § 10. O METODĂ DE APROXIMAȚII SUCCESIVE

9. În cele ce urmează vom prezenta o metodă de studiu a unor cazuri dificile din teoria sistemelor neliniare cu parametru mic, elaborată de L. Cesari și reprezentând sinteza unui întreg ciclu de lucrări ale lui L. Cesari și ale elevilor și colaboratorilor săi. Se consideră un sistem de ecuații diferențiale de forma

$$\frac{dy}{dt} = A(\varepsilon)y + \varepsilon q(y, t, \varepsilon) \quad (20)$$

și se presupun îndeplinite condițiile :

α) Există numerele  $\omega > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  și întregii  $0 \leq \nu \leq n$ ,  $a_j, b_j$ , cu  $b_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, \nu$ , astfel încât cele  $n$  valori proprii  $\rho_j(\varepsilon)$  ale matricii  $A$  sînt funcții continue de  $\varepsilon$  pentru  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  și verifică relațiile

$$\rho_j(0) = i \frac{a_j}{b_j} \omega, \quad (j = 1, \dots, \nu)$$



$\left| \rho_j(0) - \frac{i m \omega}{b_0} \right| > \delta > 0$  pentru  $j = \nu + 1, \dots, n$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   
 $b_0$  fiind un multiplu comun al numerelor  $b_1, \dots, b_\nu$ .

În plus, se va presupune că  $A(\varepsilon)$  este o matrice diagonală.

(K). Există  $R > 0$  și o funcție  $\psi(t) > 0$  integrabilă în orice interval finit, astfel ca  $|y_i| \leq R$ ,  $-\infty < t < \infty$  să implice

$$|q_j(y, t, \varepsilon)| \leq \psi_j(t), \quad j = 1, \dots, n$$

și pentru  $\zeta > 0$  există  $\xi > 0$  astfel încît  $|y'_i|, |y''_i| \leq R$ ,  $0 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon'' \leq \varepsilon_0$ ,  $|y'_i - y''_i| \leq \xi$ ,  $|\varepsilon' - \varepsilon''| \leq \xi$  să implice

$$|q_j(y', t, \varepsilon') - q_j(y'', t, \varepsilon'')| \leq \zeta \psi(t).$$

În plus,  $q(t, y, \varepsilon)$  este periodică în  $t$  de perioadă  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

(L).  $|q_j(y', t, \varepsilon) - q_j(y'', t, \varepsilon)| \leq \psi(t) \sum_{i=1}^n |y'_i - y''_i|$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Rezultatele obținute se vor aplica la sistemele de forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_j}{dt^2} + 2\alpha_j \frac{du_j}{dt} + \sigma_j^2 u_j &= \varepsilon f_j\left(u, v, \frac{du}{dt}, t, \varepsilon\right), & (j = 1, \dots, \mu) \\ \frac{dv_j}{dt} + \beta_j v_j &= \varepsilon f_j\left(u, v, \frac{du}{dt}, t, \varepsilon\right), & (j = \mu + 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (21)$$

Presupunem  $\alpha_j^2 < \sigma_j^2$ ,  $j = 1, 2, \dots, \mu$ ; punem  $\gamma_j = \sqrt{\sigma_j^2 - \alpha_j^2}$  și  $\rho_{j1}(\varepsilon) = -\alpha_j + i\gamma_j$ ,  $\rho_{j2}(\varepsilon) = -\alpha_j - i\gamma_j$ .

Ordonăm primele  $\mu$  ecuații astfel ca pentru un  $\omega > 0$  să avem

$$\alpha_j(0) = 0, \quad \sigma_j(0) = \frac{a_j}{b_j} \omega, \quad a_j > 0, \quad b_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, \lambda$$

și

$$\rho_{j1}(0) \neq \frac{i m \omega}{b_0}, \quad \rho_{j2}(0) \neq \frac{i m \omega}{b_0}, \quad j = \lambda + 1, \dots, \mu, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ultimele  $n - \mu$  ecuații vor fi ordonate astfel încît  $\beta_j(0) \neq 0$  pentru  $j = \mu + 1, \dots, r$  și  $\beta_j(0) = 0$  pentru  $j = r + 1, \dots, n$ ,  $\mu \leq r \leq n$ . Să presupunem că funcțiile  $f_j$  verifică condițiile (K) și (L) în raport cu variabilele  $\left(u, v, \frac{du}{dt}\right)$ .

Introducem noile variabile  $y_1, \dots, y_N$ ,  $N = n + \mu$  punînd

$$y_{2i-1} = -\rho_{i2} u_i + \frac{du_i}{dt}, \quad (j = 1, \dots, \mu)$$

$$y_{2i} = \rho_{i1} u_i - \frac{du_i}{dt}, \quad (j = 1, \dots, \mu)$$

$$y_{\mu+j} = v_j, \quad (j = \mu + 1, \dots, n).$$

Rezultă

$$u_j = \frac{1}{2i\gamma_j} (y_{2i-1} + y_{2i}), \quad \frac{du_j}{dt} = \frac{1}{2i\gamma_j} (\rho_{i1} y_{2i-1} + \rho_{i2} y_{2i}), \quad (j = 1, \dots, \mu)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_{2i-1}}{dt} &= -\rho_{i2} \frac{du_j}{dt} + \frac{d^2 u_j}{dt^2} = -\rho_{i2} \frac{du_j}{dt} - 2\alpha_j \frac{du_j}{dt} - \sigma_j^2 u_j + \varepsilon q_{2i-1}(y, t, \varepsilon) = \\ &= \rho_{i1} \frac{du_j}{dt} - \sigma_j^2 u_j + \varepsilon q_{2i-1}(y, t, \varepsilon) = \rho_{i1} y_{2i-1} + (\rho_{i2} \rho_{i1} - \sigma_j^2) u_j + \varepsilon q_{2i-1} \end{aligned}$$

deci

$$\frac{dy_{2i-1}}{dt} = \rho_{i1} y_{2i-1} + \varepsilon q_{2i-1}(y, t, \varepsilon).$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} \frac{dy_{2i}}{dt} &= \rho_{i1} \frac{du_j}{dt} - \frac{d^2 u_j}{dt^2} = \rho_{i1} \frac{du_j}{dt} + 2\alpha_j \frac{du_j}{dt} + \sigma_j^2 u_j - \varepsilon f_j = \\ &= -\rho_{i2} \frac{du_j}{dt} + \sigma_j^2 u_j + \varepsilon q_{2i} = \rho_{i2} (y_{2i} - \rho_{i1} u_j) + \sigma_j^2 u_j + \varepsilon q_{2i} = \\ &= \rho_{i2} y_{2i} + \varepsilon q_{2i}(y, t, \varepsilon), \\ \frac{dy_{\mu+j}}{dt} &= -\beta_j y_{\mu+j} + \varepsilon q_{\mu+j}. \end{aligned}$$

Sistemul (21) apare astfel transformat într-un sistem de forma (20). Primelor  $v$  ecuații din sistemul (20) le corespund primele  $2\lambda$  și ultimele  $n-r$  ecuații ale sistemului transformat. Numerele  $\rho_j(0)$ ,  $j = 1, \dots, v$ , sînt aici  $i\tau_1, -i\tau_1, \dots, i\tau_\lambda, -i\tau_\lambda, 0, \dots, 0$ , unde 0 este repetat de  $n-r$  ori, iar  $\tau_j = \frac{a_j}{b_j} \omega$ .

Să observăm că pentru  $\varepsilon = 0$ , sistemul (20) admite familia de soluții depinzînd de  $v$  parametri

$$y_j = c_j e^{\rho_j(0)t}, \quad j = 1, \dots, v, \quad y_j = 0, \quad j = v+1, \dots, n.$$

Dar

$$e^{\rho_j(0)t} = e^{i \frac{a_j}{b_j} \omega t}$$

este o funcție periodică de  $t$  cu perioada  $\frac{2\pi b_j}{\omega}$ , deci soluțiile considerate sînt funcții periodice de  $t$  cu perioada  $\frac{2\pi b_0}{\omega}$ ,  $b_0$  fiind, ca mai sus, cel mai mic multiplu comun al numerelor  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, \nu$ .

Sîntem astfel în condițiile din teorema 3.8. Condițiile de existență a unei soluții periodice de perioadă  $\frac{2\pi b_0}{\omega}$  se pot obține cu ajutorul acestei teoreme generale. Această problemă o vom studia însă independent de teorema 3.8, cu ajutorul metodei lui L. Cesari, metodă care este susceptibilă de aplicații și în alte cazuri. De asemenea, această metodă furnizează și un procedeu de calcul aproximativ, prin aproximații succesive, al soluției periodice.

Vom începe cu unele noțiuni pregătitoare. Se consideră familia  $C_\omega$  a funcțiilor  $f(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , care sînt sume finite de funcții de forma  $e^{\sigma t} \varphi(t)$ ,  $\sigma$  fiind un număr complex, iar  $\varphi$  o funcție cu valori complexe, periodică în  $t$  cu perioadă  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  integrabilă în  $[0, T]$ . Evident,  $C_\omega$  este o clasă aditivă. Dacă  $\varphi$  are seria Fourier

$$\varphi(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega t},$$

atunci seria

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{(im\omega + \sigma)t}$$

se numește seria asociată funcției  $f$ .

Valoarea medie  $\mathfrak{M}[f]$  se definește prin  $\mathfrak{M}[f] = c_m$  dacă  $im\omega + \sigma = 0$  și  $\mathfrak{M}[f] = 0$  dacă nu există  $m$  cu  $im\omega + \sigma = 0$ . Pentru orice  $f \in C_\omega$ ,  $\mathfrak{M}[f]$  este definită și reprezintă o funcțională liniară pe  $C_\omega$ . Pentru funcții vectoriale,  $\mathfrak{M}[f]$  este vectorul cu componentele  $\mathfrak{M}[f_i]$ .

*Dacă  $f \in C_\omega$ , o primitivă  $F$  a lui  $f$  aparține lui  $C_\omega$  dacă și numai dacă  $\mathfrak{M}[f] = 0$ ; dacă  $\mathfrak{M}[f] = 0$ , există o primitivă  $F$  unică aparținînd lui  $C_\omega$  și astfel ca  $\mathfrak{M}[F] = 0$ . Această primitivă va fi notată  $\int f(t)dt$ .*

Dacă  $f = e^{(\alpha + i\beta)t} \varphi$  și  $\mathfrak{M}[f] = 0$ ,  $\varphi \sim c_m e^{im\omega t}$ , atunci

$$\int f(t)dt = e^{(\alpha + i\beta)t} \Phi, \quad \Phi = \sum \frac{c_m}{\alpha + i\beta + im\omega} e^{im\omega t}.$$

Pentru orice constantă  $V \geq T$ , există  $N(\sigma, T, V)$  astfel ca

$$|F(t)| \leq N \int_0^T |\varphi(u)| du, \quad 0 \leq t \leq V.$$

Pentru  $\sigma \not\equiv 0 \pmod{\omega i}$ ,

$$F(t) = \frac{1}{e^{\sigma T} - 1} \int_t^{t+T} f(u) du,$$

iar pentru  $\sigma \equiv 0 \pmod{\omega i}$ ,  $F(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} uf(u) du$ .

Dacă  $\sigma + im\omega \neq 0$  pentru  $m = 0, \pm 1, \dots$ , și  $0 < \delta \leq \min |\sigma + im\omega|$ ,  $0 < \delta \leq \omega$ , fie  $\sigma'$  astfel ca  $|\sigma - \sigma'| \leq \frac{\delta}{2}$ ,  $f = e^{\sigma t} \varphi$ ,  $f' = e^{\sigma' t} \varphi$ ,  $V \geq T$ .

Atunci primitivile unice  $F, F'$  cu valoare medie nulă verifică relația

$$|F(t) - F'(t)| \leq |\sigma - \sigma'| N' \int_0^T |\varphi(u)| du, \quad 0 \leq t \leq V.$$

Într-adevăr, avem

$$F(t) = \frac{1}{e^{\sigma T} - 1} \int_t^{t+T} e^{\sigma u} \varphi(u) du, \quad F'(t) = \frac{1}{e^{\sigma' T} - 1} \int_t^{t+T} e^{\sigma' u} \varphi(u) du,$$

deci

$$\begin{aligned} F(t) - F'(t) &= \int_t^{t+T} \left[ \frac{e^{\sigma u}}{e^{\sigma T} - 1} - \frac{e^{\sigma' u}}{e^{\sigma' T} - 1} \right] \varphi(u) du = \\ &= \frac{1}{(e^{\sigma T} - 1)(e^{\sigma' T} - 1)} \int_t^{t+T} (e^{\sigma u} e^{\sigma' T} - e^{\sigma' u} e^{\sigma T} - e^{\sigma u} + e^{\sigma' u}) \varphi(u) du = \\ &= \frac{1}{(e^{\sigma T} - 1)(e^{\sigma' T} - 1)} \int_t^{t+T} \{ e^{\sigma' T} [1 - e^{(\sigma - \sigma')(u-T)}] + (e^{(\sigma' - \sigma)u} - 1) \} e^{\sigma u} \varphi(u) du, \end{aligned}$$

de unde rezultă imediat evaluarea scrisă mai sus.

LEMĂ. Dacă  $A$  este o matrice constantă cu valorile proprii  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , și  $f$  e un vector periodic cu perioadă  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  și dacă există  $\delta > 0$  astfel ca  $|\rho_j + im\omega| \geq \delta > 0$  pentru orice  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , atunci sistemul

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f$$

are o soluție periodică unică, de perioadă  $T$  și această soluție verifică evaluarea

$$|y_i(t)| \leq N \sum_{k=1}^n \int_0^T |f_k(t)| dt.$$

*Demonstrație.* Se poate presupune că  $A$  este triunghiulară, căci există totdeauna o transformare liniară care o aduce la această formă. Ultima ecuație a sistemului are atunci forma

$$y'_n = \rho_n y_n + f_n(t)$$

și admite soluția periodică unică

$$y_n(t) = e^{\rho_n t} \int e^{-\rho_n u} f_n(u) du;$$

avem

$$|y_n(t)| \leq MN \int_0^T |f_n(t)| dt.$$

Penultima ecuație are forma

$$y'_{n-1} = \rho_{n-1} y_{n-1} + a_{n-1,n} y_n(t) + f_{n-1}(t)$$

și admite soluția periodică unică dată de formula

$$y_{n-1}(t) = e^{\rho_{n-1} t} \int e^{-\rho_{n-1} u} [a_{n-1,n} y_n(u) + f_{n-1}(u)] du.$$

Procedeeul se repetă și lema rezultă demonstrată.

Fiind date numerele  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, \nu$ , se consideră mulțimea  $\Omega$  a funcțiilor vectoriale continue, periodice de perioada  $T = \frac{2\pi b_0}{\omega}$  ale căror prime  $\nu$  componente au forma

$$\varphi_j(t) = e^{i\tau_j t} [c_j + \varphi_j(t)], \quad \Re[\varphi_j] = 0.$$

Se consideră transformarea definită de relațiile

$$\psi_j(t) = c_j e^{i\tau_j t} + \varepsilon e^{i\tau_j t} \int e^{-i\tau_j u} \{q_j[\varphi(u), u, \varepsilon] - d_j \varphi_j(u)\} du, \quad (j=1, \dots, \nu)$$

$$\psi_j(t) = \varepsilon e^{\rho_j t} \int e^{-\rho_j u} q_j[\varphi(u), u, \varepsilon] du, \quad (j = \nu + 1, \dots, n),$$

unde numerele  $d_j$  sînt definite de relațiile

$$c_j d_j = \Re[e^{-i\tau_j u} q_j(\varphi(u), u, \varepsilon)], \quad (j = 1, \dots, \nu)$$

Observăm că  $e^{-\rho_j u} q_j[\varphi(u), u, \varepsilon]$ ,  $j = \nu + 1, \dots, n$ , sînt de clasă  $C_\omega$ , cu  $|\rho_j + \frac{im\omega}{b_0}| > \delta > 0$ ,  $\omega' = \frac{\omega}{b_0}$  și deci au valoare medie nulă.

Se vede imediat că funcțiile  $\psi_j$  sînt continue, periodice de perioadă  $T$ . Ținînd seama de relațiile care definesc pe  $d_j$  și de faptul că  $\Re[e^{-i\tau_j t} \varphi_j] = c_j$ ,  $j = 1, \dots, \nu$ , se vede că

$$\Re[e^{-i\tau_j u} \{q_j[\varphi(u), u, \varepsilon] - d_j \varphi_j(u)\}] = 0$$

și se deduce imediat că

$$\Re [\psi_j(t) e^{-i\tau_j t}] = c_j, \quad (j = 1, \dots, \nu).$$

Rezultă că transformarea considerată aplică pe  $\Omega$  în ea însăși.

Introducem în  $\Omega$  norma

$$\|\varphi\| = \max |\varphi_j(t)|$$

și  $\Omega$  devine un spațiu metric complet. Fie

$$z(t) = (c_1 e^{-i\tau_1 t}, \dots, c_\nu e^{-i\tau_\nu t}, 0, \dots, 0)$$

și  $\Omega_0$  sfera  $\|\varphi - z\| \leq r$ . Fie  $R$  numărul care intervine în ipotezele făcute asupra funcțiilor  $q_j$ ,  $\psi$  funcția care intervine tot acolo,  $K > 0$  astfel încît  $\int_0^T \psi(t) dt \leq KT$ .

Dacă  $\max |c_j| \leq r_2 < R$  și  $r = R - r_2$ , pentru  $\varphi \in \Omega_0$ , avem

$$\|\varphi\| \leq \|z\| + r \leq r + r_2 = R$$

și din

$$c_j, d_j = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\tau_j u} q_j[\varphi(u), u, \varepsilon] du$$

rezultă evaluarea

$$|d_j| \leq \frac{1}{|c_j| T} \int_0^T \psi(u) du;$$

dacă  $r_1 \leq |c_j|$ , rezultă

$$|d_j| \leq \frac{K}{r_1}$$

deci

$$\begin{aligned} |\psi_j(t) - z_j(t)| &\leq N\varepsilon \int_0^T \{|q_j[\varphi_j(u), u, \varepsilon]| + |d_j| |\varphi_j(u)|\} du \leq \\ &\leq N\varepsilon \left[ KT + \frac{TKR}{r_1} \right] \text{ pentru } j = 1, \dots, \nu. \end{aligned}$$

Pentru  $j = \nu + 1, \dots, n$  avem

$$|\psi_j(t) - z_j(t)| = |\psi_j(t)| \leq \varepsilon H N \int_0^T |q_j[\varphi(u), u, \varepsilon]| du \leq \varepsilon H N K T,$$

unde  $H = e^{\gamma T}$ ,  $\gamma = \max |\operatorname{Re} \rho_j|$ ,  $j = \nu + 1, \dots, n$ .

Rezultă că dacă  $\varepsilon$  e suficient de mic, avem  $|\psi_j - z_j| < r$ , deci transformarea considerată aplică sfera  $\Omega_0$  în ea însăși.

Arătăm că pentru  $\varepsilon$  suficient de mic, transformarea este o contracție. Avem

$$\begin{aligned}
 |d_j^1 - d_j^2| &\leq \frac{1}{|c_j| T} \sum_{i=1}^n \int_0^T \psi(u) |\varphi_i^1(u) - \varphi_i^2(u)| du \leq \frac{nK}{r_1} \|\varphi^1 - \varphi^2\|, \\
 |\psi_j^1 - \psi_j^2| &\leq N\varepsilon \int_0^T \{ |q, [\varphi^1(u), u, \varepsilon] - q, [\varphi^2(u), u, \varepsilon]| + \\
 &\quad + |d_j^1 \|\varphi_j^1(u) - \varphi_j^2(u)| + |d_j^1 - d_j^2| \|\varphi_j^2(u)\| \} du \leq \\
 &\leq N\varepsilon \int_0^T \{ \psi(t) \sum_{i=1}^n |\varphi_i^1(u) - \varphi_i^2(u)| + |d_j^1| \|\varphi_j^1(u) - \varphi_j^2(u)\| + \\
 &\quad + R \frac{nK}{r_1} \|\varphi^1 - \varphi^2\| \} du \leq \varepsilon N \{ K T n \|\varphi^1 - \varphi^2\| + \frac{K T}{r_1} \|\varphi^1 - \varphi^2\| + \\
 &\quad + \frac{nK R T}{r_1} \|\varphi^1 - \varphi^2\| \} \leq \varepsilon N M \|\varphi^1 - \varphi^2\| \text{ pentru } j = 1, \dots, \nu, \\
 |\psi_j^1 - \psi_j^2| &\leq \varepsilon N H n K T \|\varphi^1 - \varphi^2\|, \quad (j = \nu + 1, \dots, n).
 \end{aligned}$$

Se vede de aici că dacă  $\varepsilon$  e suficient de mic, transformarea este o contracție. Ea admite un punct fix în  $\Omega_0$ . Fie  $y_j(t)$  acest punct fix. Avem

$$y_j(t) = c_j e^{i\tau_j t} + \varepsilon e^{i\tau_j t} \int e^{-i\tau_j u} \{ q, [y(u), u, \varepsilon] - d_j y_j(u) \} du, \quad (j = 1, \dots, \nu)$$

$$y_j(t) = \varepsilon e^{\rho_j(\varepsilon)t} \int e^{-\rho_j(\varepsilon)u} q, [y(u), u, \varepsilon] du, \quad (j = \nu + 1, \dots, n).$$

Rezultă

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_j}{dt} &= i\tau_j c_j e^{i\tau_j t} + i\tau_j \varepsilon e^{i\tau_j t} \int e^{-i\tau_j u} \{ q, [y(u), u, \varepsilon] - d_j y_j(u) \} du + \\
 &\quad + \varepsilon e^{i\tau_j t} e^{-i\tau_j t} \{ q, [y(t), t, \varepsilon] - d_j y_j(t) \} = \\
 &= i\tau_j y_j + \varepsilon q, [y(t), t, \varepsilon] - d_j y_j(t), \quad (j = 1, \dots, \nu) \\
 \frac{dy_j}{dt} &= \varepsilon \rho_j(\varepsilon) e^{\rho_j(\varepsilon)t} \int e^{-\rho_j(\varepsilon)u} q, [y(u), u, \varepsilon] du + \varepsilon e^{\rho_j(\varepsilon)t} e^{-\rho_j(\varepsilon)t} q, [y(t), t, \varepsilon] = \\
 &= \rho_j(\varepsilon) y_j + \varepsilon q, [y(t), t, \varepsilon], \quad (j = \nu + 1, \dots, n).
 \end{aligned}$$

Deducem de aici că funcțiile  $y_j$  verifică sistemul (20) dacă sînt îndeplinite condițiile suplimentare

$$\frac{ia_j}{b} \omega - \varepsilon d_j = \rho_j(\varepsilon), \quad (j = 1, 2, \dots, \nu). (*)$$

Soluția  $y(t)$  a sistemului (20) și ecuațiile (\*) pot fi obținute prin următorul procedeu de aproximații succesive

$$y^{(0)}(t) = z(t),$$

$$y_j^{(m)}(t) = z_j(t) + \varepsilon e^{i\tau_j t} \int_0^T e^{-i\tau_j u} \{q_j[y^{(m-1)}(u), u, \varepsilon] - \bar{d}_j^{(m-1)} y^{(m-1)}(u)\} du$$

$$y_j^{(m)}(t) = \varepsilon e^{i\rho_j(\varepsilon)t} \int_0^T e^{-i\rho_j(\varepsilon)u} q_j[y^{(m-1)}(u), u, \varepsilon] du, \quad (j = \nu + 1, \dots, n),$$

$$\bar{d}_j^{(m-1)} c_j = \Re [e^{-i\tau_j u} q_j(y^{(m-1)}(u), u, \varepsilon)], \quad (j = 1, \dots, \nu).$$

Relațiile (\*) pot fi puse sub o formă mai efectivă.  
Într-adevăr, avem

$$y_j = z_j + O(\varepsilon), \quad \rho_j(\varepsilon) = \frac{ia_j}{b_j} \omega + \varepsilon \sigma_j + o(\varepsilon)$$

Relațiile (\*) devin

$$\varepsilon \sigma_j + \varepsilon \bar{d}_j + o(\varepsilon) = 0$$

sau

$$\sigma_j + \bar{d}_j + O(\varepsilon) = 0.$$

Pe de altă parte,

$$\bar{d}_j = \frac{1}{c_j T} \int_0^T e^{-i\tau_j u} q_j[y(u), u, \varepsilon] du = \frac{1}{c_j T} \int_0^T e^{-i\tau_j u} q_j[z(u), u, 0] du + O(\varepsilon),$$

deci relațiile de condiție devin

$$\sigma_j + \frac{1}{c_j T} \int_0^T e^{-i\tau_j u} q_j[z(u), u, 0] du + O(\varepsilon) = 0.$$

Fie

$$P_j(c_1, \dots, c_\nu) \equiv \sigma_j + \frac{1}{c_j T} \int_0^T e^{-i\tau_j u} q_j[z(u), u, 0] du$$

$$z_j(u) = c_j e^{i\tau_j u}, \quad j = 1, \dots, \nu, \quad z_j(u) = 0, \quad j = \nu + 1, \dots, n.$$

Dacă  $P_j(c_1^0, \dots, c_\nu^0) = 0$  și  $\frac{\partial(P_1, \dots, P_\nu)}{\partial(c_1, \dots, c_\nu)} \neq 0$  pentru  $c_j = c_j^0$ , atunci,

pe baza teoremei funcțiilor implicite, există  $c_j(\varepsilon)$  care verifică relațiile (\*), deci există o soluție periodică de perioadă  $T = \frac{2\pi b_0}{\omega}$

a sistemului (20).

În definitiv, am obținut următoarea teoremă:



**TEOREMA 3.16.** *Se consideră sistemul (20) și se presupun verificate condițiile (α), (K), (L). Dacă*

$$\rho_j(\varepsilon) = \frac{ia_j}{b_j} \omega + \varepsilon \sigma_j + o(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, \nu, \quad \tau_j = \frac{a_j}{b_j},$$

*și dacă  $c_1^0, \dots, c_\nu^0$  verifică condițiile*

$$P_j(c_1^0, \dots, c_\nu^0) = 0, \quad \frac{\partial(P_1, \dots, P_\nu)}{\partial(c_1, \dots, c_\nu)} \neq 0 \text{ pentru } c_j = c_j^0,$$

*unde*

$$P_j(c_1, \dots, c_\nu) \equiv \sigma_j + \frac{1}{c_j T} \int_0^T e^{-i\tau_j u} q_j[z(u), u, 0] du,$$

$$z_j(u) = c_j e^{i\tau_j u}, \quad j = 1, \dots, \nu, \quad z_j(u) = 0, \quad j = \nu + 1, \dots, n,$$

*atunci sistemul (20) admite o soluție periodică  $y_j(t, \varepsilon)$  de perioadă  $T$  cu proprietatea*

$$y_j(t, \varepsilon) = z_j(t) + O(\varepsilon).$$

Din această teoremă se pot obține diverse condiții pentru sistemele de forma (21).

## § 11. PERTURBAȚII PERIODICE ALE SISTEMELOR AUTONOME

Să considerăm un sistem de forma

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x) + \varepsilon X_1(t, x, \varepsilon), \quad (22)$$

unde  $X_1$  este periodică în raport cu  $t$  de perioadă  $T$  și să presupunem că sistemul generator

$$\frac{dx}{dt} = X(x)$$

admite o soluție periodică  $x = u(t)$  de perioadă  $\omega$ , cu proprietatea că sistemul corespunzător în variații admite  $(n-1)$  multiplicatori situați în interiorul cercului unitate. Făcînd schimbarea de variabile legată de sistemul ortogonal normat  $(\bar{X}_0, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , se obține un sistem de forma

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \Theta_0(\theta, y) + \varepsilon \Theta_1(t, \theta, y, \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= Y_0(\theta, y) + \varepsilon Y_1(t, \theta, y, \varepsilon), \end{aligned} \quad (23)$$

unde  $\Theta_0$  și  $\Theta_1$ ,  $Y_0$ ,  $Y_1$  sînt periodice în  $\theta$  cu perioadă  $\omega$ , iar  $\Theta_1$  și  $Y_1$  sînt periodice și în  $t$  cu perioadă  $T$ .

Fie  $\alpha(s)$  o funcție periodică de  $s$  cu perioadă  $\omega$ , admitînd derivate continue pînă la ordinul al doilea. Considerăm soluția sistemului (23) care verifică condițiile

$$\theta(0) = s, y(0) = \alpha(s).$$

Notăm această soluție cu

$$\theta(t; s, \alpha(s), \varepsilon), y(t; s, \alpha(s), \varepsilon).$$

**TEOREMA 3. 17.** *Există pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic o funcție  $\alpha_\varepsilon(s)$  unică astfel încît familia de soluții*

$$\theta(t, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(t, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon)$$

*a sistemului (23) să formeze o varietate  $y = Q(t, \theta, \varepsilon)$ , unde  $Q$  este periodică în  $t$  cu perioadă  $T$  și periodică în  $\theta$  cu perioadă  $\omega$ . Sistemul (22) admite o familie de soluții  $x = x(t; s, \varepsilon)$  care formează o varietate  $x = H(t, \theta, \varepsilon)$ , unde  $H$  e periodică în  $t$  cu perioadă  $T$  și în  $\theta$  cu perioadă  $\omega$ . Pentru  $\varepsilon = 0$  această varietate se reduce la curba  $u(t)$ .*

*Demonstrație.* Fie

$$\sigma(s) = \theta(NT, s, \alpha(s), \varepsilon); \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\partial\theta}{\partial s} + \frac{\partial\theta}{\partial y_0} \frac{d\alpha}{ds}.$$

Scriem

$$\begin{aligned} \theta(t, s, y_0, \varepsilon) &= \theta(t, s, 0, 0) + \frac{\partial\theta}{\partial y_0}(t, s, 0, 0) y_0 + \frac{\partial\theta}{\partial \varepsilon}(t, s, 0, 0) \varepsilon + o(|\varepsilon| + |y_0|) \\ y(t, s, y_0, \varepsilon) &= y(t, s, 0, 0) + \frac{\partial y}{\partial y_0}(t, s, 0, 0) y_0 + \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(t, s, 0, 0) + \\ &\quad + o(|\varepsilon| + |y_0|) \end{aligned}$$

și înlocuind în sistemul (23) avem

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \theta(t, s, 0, 0) + \frac{d}{dt} \frac{\partial\theta(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} y_0 + \frac{d}{dt} \frac{\partial\theta(t, s, 0, 0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + o(|\varepsilon| + |y_0|) = \\ &= \Theta_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)] + \frac{\partial\Theta_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)]}{\partial\theta} \frac{\partial\theta(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} y_0 + \\ &\quad + \frac{\partial\Theta_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)]}{\partial y} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} y_0 + \\ &\quad + \frac{\partial\Theta_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)]}{\partial\theta} \frac{\partial\theta(t, s, 0, 0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \\ &\quad + \frac{\partial\Theta_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)]}{\partial y} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \\ &\quad + \varepsilon \Theta_1[t, \theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0), 0] + o(|\varepsilon| + |y_0|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} y(t, s, 0, 0) + \frac{d}{dt} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} y_0 + \frac{d}{dt} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \\
& + o(|\varepsilon| + |y_0|) = Y_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)] + \\
& + \frac{\partial Y_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)]}{\partial \theta} \frac{\partial \theta(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} y_0 + \\
& + \frac{\partial Y_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)]}{\partial y} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} y_0 + \\
& + \frac{\partial Y_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)]}{\partial \theta} \frac{\partial \theta(t, s, 0, 0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \\
& + \frac{\partial Y_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)]}{\partial y} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \\
& + o(|\varepsilon| + |y_0|) + \varepsilon Y_1[t, \theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)].
\end{aligned}$$

Rezultă

$$\frac{d}{dt} \theta(t, s, 0, 0) = \Theta_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)], \quad \theta(0, s, 0, 0) = s$$

$$\frac{d}{dt} y(t, s, 0, 0) = Y_0[\theta(t, s, 0, 0), y(t, s, 0, 0)], \quad y(0, s, 0, 0) = 0.$$

Dar  $Y_0(\theta, 0) \equiv 0$ ,  $\Theta_0(\theta, 0) \equiv 1$ , deci  $y(t, s, 0, 0) \equiv 0$ ,  $\theta(t, s, 0, 0) = t + s$ .

Mai departe,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial \theta(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} &= \frac{\partial \Theta_0(t + s, 0)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} + \\
&+ \frac{\partial \Theta_0(t + s, 0)}{\partial y} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} &= \frac{\partial Y_0(t + s, 0)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} + \\
&+ \frac{\partial Y_0(t + s, 0)}{\partial y} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta(0, s, 0, 0)}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial y(0, s, 0, 0)}{\partial y_0} = E.$$

Din  $Y_0(\theta, 0) \equiv 0$ , rezultă  $\frac{\partial Y_0(t+s, 0)}{\partial \theta} \equiv 0$  și din  $\Theta_0(\theta, 0) \equiv 1$  rezultă de asemenea  $\frac{\partial \Theta_0(t+s, 0)}{\partial \theta} \equiv 0$ . Sistemul se scrie deci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \theta(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} &= \frac{\partial \Theta_0(t+s, 0)}{\partial y} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} &= \frac{\partial Y_0(t+s, 0)}{\partial y} \frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0}. \end{aligned}$$

Rezultă că  $\frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0}$  este o matrice fundamentală a sistemului în variații normale  $\frac{dz}{dt} = B(t+s)z$ ; dacă  $G(\theta)$  este matricea fundamentală a sistemului în variații normale, avem deci

$$\frac{\partial y(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} = G(t+s) G^{-1}(s)$$

și

$$\frac{\partial \theta(t, s, 0, 0)}{\partial y_0} = \int_0^t \frac{\partial \Theta_0(t+s, 0)}{\partial y} G(t+s) G^{-1}(s) dt.$$

Din aceste formule rezultă

$$\frac{\partial \theta(NT, s, 0, 0)}{\partial s} = 1, \quad \left| \frac{\partial \theta(NT, s, 0, 0)}{\partial y_0} \right| \leq M,$$

deci dacă  $|\alpha(s)| + |\varepsilon|$  e suficient de mic,  $\frac{\partial \theta(NT, s, \alpha(s), \varepsilon)}{\partial s}$  va fi oricât de aproape de 1, iar  $\left| \frac{\partial \theta(NT, s, \alpha(s), \varepsilon)}{\partial y_0} \right|$  va fi mărginită. Rezultă de aici că dacă  $|\alpha(s)| + \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| + |\varepsilon|$  e suficient de mic,  $\frac{d\sigma}{ds}$  va fi oricât de aproape de 1, deci  $\frac{d\sigma}{ds} \neq 0$ . De aici rezultă că există  $s = E(\sigma, \varepsilon)$  definită pentru  $0 \leq \sigma \leq \omega$  și astfel ca

$$\theta(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) \equiv \sigma.$$

Cînd  $s$  se înlocuiește cu  $s + \omega$ ,  $\alpha(s)$  nu se schimbă și avem

$$\theta(t, s + \omega, \alpha(s + \omega), \varepsilon) = \theta(t, s, \alpha(s), \varepsilon) + \omega$$

$$y(t, s + \omega, \alpha(s + \omega), \varepsilon) = y(t, s, \alpha(s), \varepsilon),$$

deoarece în ambii membri avem soluții ale sistemului (23) și aceste soluții coincid pentru  $t = 0$ . Rezultă

$$\sigma(s + \omega) = \sigma(s) + \omega.$$

Fie acum

$$\beta(\sigma) = y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon).$$

Avem

$$\begin{aligned} \beta(\sigma + \omega) &= y(NT, E(\sigma + \omega, \varepsilon), \alpha(E(\sigma + \omega, \varepsilon)), \varepsilon) = y(NT, E(\sigma, \varepsilon) + \\ &+ \omega, \alpha(E(\sigma, \varepsilon) + \omega), \varepsilon) = y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) = \beta(\sigma). \end{aligned}$$

În acest fel fiecărei funcții  $\alpha(s)$  definită pentru  $0 \leq s \leq \omega$  și cu  $\alpha(0) = \alpha(\omega)$  îi corespunde o funcție  $\beta(\sigma)$  definită pentru  $0 \leq \sigma \leq \omega$  și cu  $\beta(0) = \beta(\omega)$ . Considerăm spațiul funcțiilor  $\alpha(s)$  cu  $\alpha(0) = \alpha(\omega)$  și cu metrica dată de

$$\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \sup_{0 \leq s \leq \omega} |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|;$$

acesta este un spațiu metric complet. Vom demonstra că operatorul  $\beta = U(\alpha)$  este pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic o contracție.

Arătăm mai întâi că există constantele  $K$  și  $L$  astfel încât dacă  $|\alpha(s)| <$

$$< K|\varepsilon|, \quad \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| < L|\varepsilon| \text{ să rezulte } |\beta(\sigma)| < K|\varepsilon|, \quad \left| \frac{d\beta}{d\sigma} \right| < L|\varepsilon|, \text{ deci mul-}$$

țimea elementelor  $\alpha$  cu  $|\alpha| < K|\varepsilon|, \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| < L|\varepsilon|$  este aplicată în ea însăși.

Avem

$$\begin{aligned} \left| \frac{y(NT, s, y_0, \varepsilon)}{\partial s} \right| &= O(|y_0| + |\varepsilon|), \\ \frac{dE}{d\sigma} &= \frac{1}{\frac{d\sigma}{ds}} = 1 + O(|y_0| + |\varepsilon|). \end{aligned}$$

Din

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\sigma} &= \frac{\partial y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon)}{\partial s} \frac{dE(\sigma, \varepsilon)}{d\sigma} + \\ &+ \frac{\partial y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon)}{\partial y_0} \frac{d\alpha(E(\sigma, \varepsilon))}{ds} \frac{dE}{d\sigma} \end{aligned}$$

rezultă, ținând seama că  $|\alpha(E(\sigma, \varepsilon))| = O(|\varepsilon|), \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = O(|\varepsilon|),$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\beta}{d\sigma} \right| &\leq O(|\varepsilon|)(1 + O(|\varepsilon|)) + \\ &+ \left| \frac{\partial_y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon)}{\partial y_0} \right| L|\varepsilon|(1 + O(|\varepsilon|)). \end{aligned}$$

Dar

$$\frac{\partial y(NT, s, y_0, \varepsilon)}{\partial y_0} = \frac{\partial y(NT, s, 0, 0)}{\partial y_0} + O(|y_0| + |\varepsilon|) = \\ + G(NT + s) G^{-1}(s) + O(|\varepsilon|).$$

Pentru  $N$  destul de mare avem

$$|G(NT + s) G^{-1}(s)| < \frac{1}{2}$$

căci  $|G(s)| \leq Re^{-rs}$  din cauza ipotezei asupra multiplicatorilor. Rezultă

$$\left| \frac{d\beta}{d\sigma} \right| \leq \left( K_1 + \frac{1}{2} L + \varepsilon K_2 \right) |\varepsilon|,$$

de unde se vede că pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic avem

$$\left| \frac{d\beta}{d\sigma} \right| < L |\varepsilon|.$$

Mai departe

$$|\beta| \leq |G(NT + s) G^{-1}(s)| |\alpha(E(\sigma, \varepsilon))| + K_3 |\varepsilon| + \\ + o(|\alpha| + |\varepsilon|) \leq \frac{1}{2} K |\varepsilon| + K_3 |\varepsilon| + o(|\varepsilon|)$$

și se vede că pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic rezultă

$$|\beta(\sigma)| < K |\varepsilon|.$$

Avem

$$\beta_1 - \beta_2 = y(NT, E_1(\sigma, \varepsilon), \alpha_1(E_1(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) - y(NT, E_2(\sigma, \varepsilon), \alpha_2(E_2(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) = \\ = \frac{\partial y}{\partial s}(NT, E_1, \alpha_1, \varepsilon)(E_1 - E_2) + \frac{\partial y(NT, E_1, \alpha_1, \varepsilon)}{\partial y_0}(\alpha_1(E_1) - \alpha_2(E_2)) + \\ + o(|E_1 - E_2| + |\alpha_1(E_1) - \alpha_2(E_2)|), \\ \alpha_1(E_1) - \alpha_2(E_2) = \alpha_1(E_1) - \alpha_1(E_2) + \alpha_1(E_2) - \alpha_2(E_2) = \\ = \frac{d\alpha_1(E_2)}{ds}(E_1 - E_2) + \alpha_1(E_2) - \alpha_2(E_2) + o(|E_1 - E_2|).$$

Fie  $E_1(\sigma, \varepsilon) = s_1$ ,  $E_2(\sigma, \varepsilon) = s_2$ ; avem

$$\sigma = \theta(NT, s_1, \alpha_1(s_1), \varepsilon) = \theta(NT, s_2, \alpha_2(s_2), \varepsilon),$$

deci

$$\theta(NT, s_1, \alpha_1(s_1), \varepsilon) - \theta(NT, s_2, \alpha_2(s_2), \varepsilon) = 0.$$

De aici

$$\frac{\partial \theta (NT, s_1, \alpha_1 (s_1), \varepsilon)}{\partial s} (s_1 - s_2) + \frac{\partial \theta (NT, s_1, \alpha_1 (s_1), \varepsilon)}{\partial y_0} (\alpha_1 (s_1) - \alpha_2 (s_2)) + \\ + o(|\alpha_1 - \alpha_2| + |s_1 - s_2|) = 0.$$

Rezultă

$$\left| \frac{\partial \theta (NT, s_1, \alpha_1 (s_1), \varepsilon)}{\partial s} \right| |s_1 - s_2| \leq \left| \frac{\partial \theta (NT, s_1, \alpha_1 (s_1), \varepsilon)}{\partial y_0} \right| |\alpha_1 (s_1) - \alpha_2 (s_2)| + \\ + o(|\alpha_1 - \alpha_2| + |s_1 - s_2|).$$

Dar

$$\frac{\partial \theta (NT, s_1, \alpha_1 (s_1), \varepsilon)}{\partial s} = 1 + O(|\varepsilon|)$$

căci

$$|\alpha_1 (s_1)| = O(|\varepsilon|). \\ \left| \frac{\partial \theta (NT, s_1, \alpha_1 (s_1), \varepsilon)}{\partial y_0} \right| < K_5, \quad |\alpha_1 (s_1) - \alpha_2 (s_2)| = \\ = |\alpha_1 (s_1) - \alpha_1 (s_2) + \alpha_1 (s_2) - \alpha_2 (s_2)| \leq \\ \left| \frac{d\alpha_1 (s_1)}{ds} \right| |s_1 - s_2| + |\alpha_1 (s_2) - \alpha_2 (s_2)| \leq L|\varepsilon| |s_1 - s_2| + \rho(\alpha_1, \alpha_2),$$

deci

$$(1 + K_6 |\varepsilon|) |s_1 - s_2| \leq K_5 (L|\varepsilon| |s_1 - s_2| + \rho(\alpha_1, \alpha_2)).$$

Rezultă

$$|s_1 - s_2| < 2 K_7 \rho(\alpha_1, \alpha_2)$$

deci

$$|E_1 - E_2| < 2 K_7 \rho(\alpha_1, \alpha_2).$$

Cum

$$|\alpha_1 (E_2) - \alpha_2 (E_2)| \leq \rho(\alpha_1, \alpha_2)$$

rezultă

$$|\alpha_1 (E_1) - \alpha_2 (E_2)| < L|\varepsilon| 2 K_7 \rho(\alpha_1, \alpha_2) + \rho(\alpha_1, \alpha_2).$$

Pe de altă parte,

$$\left| \frac{\partial y (NT, E_1, \alpha_1, \varepsilon)}{\partial y_0} \right| \leq \frac{1}{2} + K_8 |\varepsilon|.$$

Rezultă

$$|\beta_1 - \beta_2| \leq K_9 |\varepsilon| 2 K_7 \rho(\alpha_1, \alpha_2) + \left( \frac{1}{2} + K_8 |\varepsilon| \right) (L|\varepsilon| 2 K_7 \rho(\alpha_1, \alpha_2) + \\ + \rho(\alpha_1, \alpha_2)) + K_{10} |\varepsilon| (2 K_7 \rho(\alpha_1, \alpha_2) + L|\varepsilon| 2 K_7 \rho(\alpha_1, \alpha_2) + \rho(\alpha_1, \alpha_2)),$$

deci în definitiv

$$|\beta_1 - \beta_2| \leq \frac{1}{2} \rho(\alpha_1, \alpha_2) + K_{11} |\varepsilon| \rho(\alpha_1, \alpha_2),$$

ceea ce arată că pentru  $|\varepsilon|$  suficient de mic operatorul  $\beta(\alpha)$  este o contracție.

Rezultă de aici că există o funcție  $\alpha_\varepsilon(s)$  cu  $|\alpha_\varepsilon(s)| < K|\varepsilon|$ ,  
 $\left| \frac{d\alpha_\varepsilon(s)}{ds} \right| < L|\varepsilon|$  astfel ca

$$\alpha_\varepsilon(\sigma) \equiv y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon).$$

Considerăm soluția  $\theta(t, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon)$ ,  $y(t, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon)$ ; din

$$\theta(t, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) = t + s + O(\varepsilon)$$

rezultă că putem rezolva în raport cu  $s$  și  $s = \varphi(t, \theta, \varepsilon)$ . Familia de soluții considerată va forma varietatea

$$y = Q(t, \theta, \varepsilon) \equiv y(t, \varphi(t, \theta, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(\varphi(t, \theta, \varepsilon)), \varepsilon).$$

Pentru ca teorema să fie complet demonstrată, rămâne de arătat că funcția  $Q(t, \theta, \varepsilon)$  este periodică în  $t$  cu perioada  $T$  și periodică în  $\theta$  cu perioada  $\omega$ . Avem

$$Q(0, \theta, \varepsilon) = \alpha_\varepsilon(\varphi(0, \theta, \varepsilon)) = \alpha_\varepsilon(\theta),$$

$$Q(NT, \theta, \varepsilon) = y(NT, \varphi(NT, \theta, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(\varphi(NT, \theta, \varepsilon)), \varepsilon) =$$

$$= y(NT, E(\theta, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(E(\theta, \varepsilon)), \varepsilon) = \alpha_\varepsilon(\theta).$$

Rezultă

$$Q(NT, \theta, \varepsilon) = Q(0, \theta, \varepsilon).$$

Deoarece sistemul (23) este periodic în  $t$ , cu perioada  $T$ , avem

$$y(t, \theta(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon) = y(t + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon),$$

$$\theta(t, \theta(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon) = \theta(t + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon).$$

Pentru  $t = NT$  se capătă

$$y(NT, \theta(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon) = y(NT + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon)$$

$$\theta(NT, \theta(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon) = \theta(NT + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon)$$

deci

$$Q(NT + T, \theta, \varepsilon) = y(NT, E(\theta, \varepsilon), Q(T, E(\theta, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon).$$

Avem

$$Q(NT + T, \theta, \varepsilon) = y(NT + T, \varphi(NT + T, \theta, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(\varphi(NT + T, \theta, \varepsilon)), \varepsilon).$$

Dar

$$y(NT + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) = y(T, \theta(NT, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(NT, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon),$$

$$\theta(NT + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) = \theta(T, \theta(NT, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(NT, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon).$$



Pentru  $s = E(\sigma, \varepsilon)$  avem

$$\theta(NT, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) \equiv \sigma$$

și

$$y(NT, E(\sigma, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) \equiv \alpha_\varepsilon(\sigma),$$

deci

$$y(NT + T, E(\sigma, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) = y(T, \sigma, \alpha_\varepsilon(\sigma), \varepsilon),$$

$$\theta(NT + T, E(\sigma, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(E(\sigma, \varepsilon)), \varepsilon) = \theta(T, \sigma, \alpha_\varepsilon(\sigma), \varepsilon).$$

Aceste relații dau

$$Q(NT + T, \theta, \varepsilon) = Q(T, \theta, \varepsilon).$$

Rezultă

$$y(NT, E(\theta, \varepsilon), Q(T, E(\theta, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) = Q(T, \theta, \varepsilon),$$

deci  $Q(T, \theta, \varepsilon)$  este punct fix al operatorului  $U$  și cum acest punct fix e unic, rezultă

$$Q(T, \theta, \varepsilon) = \alpha_\varepsilon(\theta)$$

deci

$$Q(T, \theta, \varepsilon) = Q(0, \theta, \varepsilon).$$

Putem acum verifica periodicitatea lui  $Q$  în raport cu  $t$ . Fie  $t$  arbitrar. Avem

$$\begin{aligned} y(t + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) &= y(t, \theta(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon) = \\ &= [y(t, \theta, Q(T, \theta, \varepsilon), \varepsilon) = y(t, \theta, Q(0, \theta, \varepsilon), \varepsilon) = y(t, \theta, \alpha_\varepsilon(\theta), \varepsilon), \\ \theta(t + T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) &= \theta(t, \theta(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), y(T, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon), \varepsilon) = \\ &= \theta(t, Q(T, \theta, \varepsilon), \varepsilon) = \theta(t, \theta, Q(0, \theta, \varepsilon), \varepsilon) = \theta(t, \theta, \alpha_\varepsilon(\theta), \varepsilon). \end{aligned}$$

De aici rezultă

$$Q(t + T, \theta, \varepsilon) = Q(t, \theta, \varepsilon).$$

Pentru a verifica periodicitatea lui  $Q$  în raport cu  $\theta$  observăm că

$$\theta(t, s + \omega, \alpha_\varepsilon(s + \omega), \varepsilon) = \theta(t, s, \alpha_\varepsilon(s), \varepsilon) + \omega,$$

deci

$$\varphi(t, \theta + \omega, \varepsilon) = \varphi(t, \theta, \varepsilon) + \omega.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} Q(t, \theta + \omega, \varepsilon) &= y(t, \varphi(t, \theta + \omega, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(\varphi(t, \theta + \omega, \varepsilon), \varepsilon) = \\ &= y(t, \varphi(t, \theta, \varepsilon) + \omega, \alpha_\varepsilon(\varphi(t, \theta, \varepsilon) + \omega), \varepsilon) = \\ &= y(t, \varphi(t, \theta, \varepsilon), \alpha_\varepsilon(\varphi(t, \theta, \varepsilon)), \varepsilon) = Q(t, \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

Teorema este acum complet demonstrată.

Dacă în prima ecuație a sistemului (23) înlocuim pe  $y$  cu  $Q(t, \theta, \varepsilon)$  se capătă o ecuație

$$\frac{d\theta}{dt} = f(t, \theta, \varepsilon),$$

unde  $f$  este continuă și periodică în  $t$  cu perioada  $T$  și în  $\theta$  cu perioada  $\omega$ . Această ecuație permite să se studieze proprietățile soluțiilor situate pe varietatea  $y = Q(t, \theta, \varepsilon)$ .

## § 12. PERTURBAȚII SINGULARE

Vom studia acum unele probleme relative la sistemele care conțin parametrii pe lângă derivate. Asemenea probleme se vor numi probleme de *perturbații singulare*.

Fie sistemul

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y, \varepsilon). \end{aligned} \tag{24}$$

Vom presupune că  $f$  și  $g$  sînt în raport cu  $t$  periodice, respectiv aproape-periodice. Vom admite de asemenea ipotezele obișnuite de regularitate.

Pentru  $\varepsilon = 0$  se obține sistemul

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y, 0), \\ g[t, x, y, 0] &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Presupunem că sistemul (25) admite o soluție  $[u(t), v(t)]$  periodică, respectiv aproape-periodică, astfel ca matricea  $g'_v[t, u(t), v(t), 0]$  să fie nesarădă pentru orice  $t$ . Notăm

$$U(t) = (g'_v[t, u(t), v(t), 0])^{-1} g'_x[t, u(t), v(t), 0].$$

În cele ce urmează  $f'_x, f'_y, f'_\varepsilon$  vor fi derivatele funcției  $f$  în punctul  $[t, u(t), v(t), 0]$ , iar  $g'_v, g'_x$  derivatele funcției  $g$  în același punct.

Se face în sistemul (24) schimbarea de variabile

$$\xi = x - u(t), \quad \eta = y - v(t) + U(t) \xi.$$

Obținem

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= f[t, \xi + u(t), \eta + v(t) - U(t)\xi, \varepsilon] - f[t, u(t), v(t), 0], \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon} g[t, \xi + u(t), \eta + v(t) - U(t)\xi, \varepsilon] - \frac{dv(t)}{dt} + \frac{dU(t)}{dt}\xi + \\ &\quad + U(t)\frac{d\xi}{dt}.\end{aligned}$$

De aici

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= f'_x \xi(t) + f'_v [\eta - U(t)\xi] + \varepsilon f'_\varepsilon + F[t, \xi, \eta, \varepsilon] \\ \varepsilon \frac{d\eta}{dt} &= g'_x \xi + g'_v [\eta - U(t)\xi] + \varepsilon \left[ g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt} \right] + G[t, \xi, \eta, \varepsilon].\end{aligned}$$

Notăm

$$A_1(t) = f'_x - f'_v U, \quad A_2(t) = f'_v, \quad Q(t) = g'_v.$$

Sistemul obținut se scrie

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= A_1 \xi + A_2 \eta + \varepsilon f'_\varepsilon + F(t, \xi, \eta, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{d\eta}{dt} &= Q \eta + \varepsilon \left( g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt} \right) + G(t, \xi, \eta, \varepsilon),\end{aligned}\tag{26}$$

unde

$$|F| = O(|\xi|^2 + |\eta|^2 + \varepsilon^2), \quad |G| = O(|\xi|^2 + |\eta|^2 + \varepsilon^2)$$

și în plus  $F$  și  $G$  sînt lipschitziene cu o constantă oricît de mică dacă  $|\xi|$ ,  $|\eta|$ ,  $|\varepsilon|$  sînt suficient de mici.

Vom presupune că  $\frac{Q + Q^*}{2} \leq -\mu E$ ,  $\mu > 0$ ; aceasta implică în particular ipoteza formulată anterior asupra nesarărității matricii  $Q$ . În plus,  $Q^{-1}$  rezultă mărginită. Coeficienții  $A_1, A_2, Q$  și funcțiile  $f'_\varepsilon, g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt}$ ,  $F, G$  sînt periodice respectiv aproape-periodice. Vom admite în sfîrșit că sistemul linar

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1 \xi\tag{27}$$

are soluția banală uniform asimptotic stabilă.

În aceste condiții demonstrăm că sistemul (26) admite o soluție periodică, respectiv aproape-periodică, unică, care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către zero.

Pentru aceasta considerăm operatorul care atașează funcțiilor  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  periodice, respectiv aproape-periodice, soluția periodică, respectiv aproape-periodică, unică, a sistemului

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1 \xi + A_2 \eta + \varepsilon f_\varepsilon + F[t, \alpha(t), \beta(t), \varepsilon],$$

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt} = Q \eta + \varepsilon \left[ g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt} \right] + G[t, \alpha(t), \beta(t), \varepsilon]. \quad (*)$$

Din a doua ecuație (\*) se determină mai întâi soluția periodică, respectiv aproape-periodică  $\eta(t)$ , care se înlocuiește în prima ecuație.

Condițiile impuse matricii  $Q$  asigură existența acestei soluții, iar condiția impusă sistemului (27) asigură existența unei soluții periodice, respectiv aproape-periodice, care verifică evaluarea

$$|\xi| \leq K_1(K_2 \sup |\eta| + K_3 |\varepsilon| + O(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \varepsilon^2)), \text{ (teorema 3.4).}$$

Fie  $\|\alpha\| \leq K |\varepsilon|$ ,  $\|\beta\| \leq K' |\varepsilon|$ . Rezultă

$$|G[t, \alpha(t), \beta(t), \varepsilon]| \leq L \varepsilon^2.$$

Avem

$$\varepsilon \left( \eta, \frac{d\eta}{dt} \right) = (\eta, Q \eta) + \varepsilon \left( \eta, g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt} \right) + (\eta, G)$$

deci, presupunând  $\varepsilon > 0$ ,

$$\varepsilon \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\eta|^2 \leq -\mu |\eta|^2 + \varepsilon |\eta| M + |\eta| L \varepsilon^2.$$

Notînd  $|\eta|^2 = v^2$ , deducem

$$v \frac{dv}{dt} \leq -\frac{\mu}{\varepsilon} v^2 + v M + v L \varepsilon,$$

sau

$$\frac{dv}{dt} \leq -\frac{\mu}{\varepsilon} v + M + \varepsilon L.$$

De aici obținem evaluarea

$$v \leq \frac{\varepsilon}{\mu} (M + \varepsilon L)$$

deci

$$|\eta| \leq \frac{\varepsilon}{\mu} (M + \varepsilon L)$$

Alegînd pe  $K'$  destul de mare și pe  $\varepsilon$  destul de mic, deducem

$$|\eta| \leq K' \varepsilon.$$

Mai departe, din prima ecuație (\*) deducem

$$|\xi| \leq K_1(K_2 K' \varepsilon + K_3 \varepsilon + L_1 \varepsilon^2).$$

Alegînd pe  $K$  destul de mare și pe  $\varepsilon$  suficient de mic, deducem

$$|\xi| \leq K |\varepsilon|.$$

Prin urmare, operatorul aplică mulțimea  $\|\alpha\| \leq K \varepsilon$ ,  $\|\beta\| \leq K' \varepsilon$  în ea însăși. Să arătăm că în această mulțime el este, pentru  $\varepsilon$  suficient de mic, o contracție.

Fie  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  date,  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$  imaginile corespunzătoare,  $\gamma = \xi_1 - \xi_2$ ,  $\delta = \eta_1 - \eta_2$ . Avem

$$\frac{d\gamma}{dt} = A_1 \gamma + A_2 \delta + F[t, \alpha_1(t), \beta_1(t), \varepsilon] - F[t, \alpha_2(t), \beta_2(t), \varepsilon]$$

$$\varepsilon \frac{d\delta}{dt} = Q\delta + G[t, \alpha_1(t), \beta_1(t), \varepsilon] - G[t, \alpha_2(t), \beta_2(t), \varepsilon].$$

Rezultă, ca mai sus,

$$\|\delta\| \leq L_2 \varepsilon (\|\alpha_1 - \alpha_2\| + \|\beta_1 - \beta_2\|)$$

și apoi

$$\|\gamma\| \leq L_3 \varepsilon (\|\alpha_1 - \alpha_2\| + \|\beta_1 - \beta_2\|),$$

ceea ce arată că operatorul este, pentru  $\varepsilon$  suficient de mic, o contracție.

Deducem existența unui punct fix unic în regiunea  $\|\alpha\| \leq K \varepsilon$ ,  $\|\beta\| \leq K' \varepsilon$ , deci a unei soluții periodice respectiv aproape-periodice, a sistemului (26), de forma

$$\xi(t) = \varepsilon \xi^*(t, \varepsilon), \quad \eta(t) = \varepsilon \eta^*(t, \varepsilon).$$

Am obținut în definitiv;

**TEOREMA 3.18.** *Dacă sistemul (25) admite o soluție periodică, respectiv aproape-periodică  $[u(t), v(t)]$  astfel ca  $\frac{Q + Q^*}{2} \leq -\mu E$  și dacă soluția banală a sistemului (27) este uniform asimptotic stabilă, sistemul (24) admite pentru  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  o soluție periodică, respectiv aproape-periodică unică  $[x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)]$  de forma*

$$x(t, \varepsilon) = u(t) + \varepsilon \xi^*(t, \varepsilon),$$

$$y(t, \varepsilon) = v(t) + \varepsilon \eta^*(t, \varepsilon) - \varepsilon U(t) \xi^*(t, \varepsilon).$$

**Observație.** În cazul soluțiilor periodice, condiția impusă sistemului (27) poate fi slăbită, cerînd numai ca el să nu admită soluții periodice de perioada considerată, diferite de soluția banală.

De asemenea, condiția impusă matricii  $Q$  poate fi slăbită, cerînd de exemplu ca pentru orice  $t$  să admită valori proprii cu părți reale nega-

tive  $\leq -\alpha$ . Această condiție poate fi încă slăbită, dar conduce la cereri cu totul neefective.

Vom considera acum numai cazul periodic și vom presupune că sistemul obținut pentru  $\varepsilon = 0$  admite o familie de soluții periodice depinzând de parametrii  $c_1, c_2, \dots, c_k$ .

Vom nota cu  $c$  vectorul  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$  al parametrilor.

În acest caz sistemul (27) admite soluții periodice. Într-adevăr, din

$$\frac{du(t, c)}{dt} = f[t, u(t, c), v(t, c), 0].$$

$$g[t, u(t, c), v(t, c), 0] \equiv 0.$$

rezultă

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial u(t, c)}{\partial c} = f'_x \frac{\partial u(t, c)}{\partial c} + f'_v \frac{\partial v(t, c)}{\partial c}$$

$$g'_x \frac{\partial u(t, c)}{\partial c} + g'_v \frac{\partial v(t, c)}{\partial c} \equiv 0,$$

deci

$$\frac{\partial v(t, c)}{\partial c} = -U(t) \frac{\partial u(t, c)}{\partial c}.$$

Rezultă

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial u(t, c)}{\partial c} = [f'_x - f'_v U(t)] \frac{\partial u(t, c)}{\partial c} = A_1(t) \frac{\partial u(t, c)}{\partial c}.$$

Prin urmare funcțiile periodice  $\frac{\partial u(t, c)}{\partial c}$  sînt soluții ale sistemului (27).

Conform teoremei 3.2 sistemul adjunct sistemului (27) admite același număr de soluții periodice independente, pe care le vom nota  $q_1(t, c), \dots, q_k(t, c)$ . Să presupunem că pentru o valoare  $c_0$  a parametrului, sistemul (26) admite o soluție periodică de forma

$$\xi(t, \varepsilon) = \varepsilon \xi^*(t, \varepsilon), \quad \eta(t, \varepsilon) = \varepsilon \eta^*(t, \varepsilon).$$

Atunci  $\xi^*, \eta^*$  verifică sistemul

$$\frac{d\xi^*(t, \varepsilon)}{dt} = A_1(t) \xi^*(t, \varepsilon) + A_2(t) \eta^*(t, \varepsilon) + f'_\varepsilon + \varepsilon F^*,$$

$$\varepsilon \frac{d\eta^*(t, \varepsilon)}{dt} = Q(t) \eta^*(t, \varepsilon) + g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt} + \varepsilon G^*,$$

Ținînd seama de teorema 3.2 avem

$$\int_0^\omega q_j(t, c_0) \{A_2(t) \eta^*(t, \varepsilon) + f'_\varepsilon + \varepsilon F^*\} dt = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

$$\text{Fie } \eta^{**}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta^*(t, \varepsilon).$$

**Rezultă**

$$\int_0^\omega q_j(t, c_0) \{A_2(t) \eta^{**}(t) + f'_\varepsilon\} dt = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Pentru a calcula pe  $\eta^{**}$  să considerăm sistemul

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt} = Q(t) \eta.$$

Fie  $U(t, s, \varepsilon)$  matricea fundamentală a acestui sistem. Din ipoteza  $\frac{Q+Q^*}{2} \leq \leq -\mu E$  rezultă evaluarea

$$\|U(t, s, \varepsilon)\| \leq B e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)}.$$

Soluția periodică  $\eta^*(t, \varepsilon)$  se scrie sub forma

$$\eta^*(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\varepsilon} U(t, s, \varepsilon) \left[ g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds} + \varepsilon G^* \right] ds.$$

Avem

$$\left| \int_{-\infty}^t U(t, s, \varepsilon) G^* ds \right| \leq M \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}(t-s)} ds = M \frac{\varepsilon}{\mu},$$

deci

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t U(t, s, \varepsilon) G^* ds = 0.$$

**Rezultă că**

$$\eta^{**}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^t U(t, s, \varepsilon) \left( g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds} \right) ds.$$

Mai departe,

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{-\infty}^{t-\sqrt{\varepsilon}} U(t, s, \varepsilon) \left( g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds} \right) ds \right| \leq \frac{M_1}{\varepsilon} e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}t} \frac{\varepsilon}{\mu} e^{\frac{\mu}{\varepsilon}s} \Big|_{-\infty}^{t-\sqrt{\varepsilon}} = \frac{M_1}{\mu} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

deci

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{t-\sqrt{\varepsilon}} U(t, s, \varepsilon) \left( g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds} \right) ds = 0.$$

Prin urmare avem

$$\eta^{**}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\sqrt{\varepsilon}}^t U(t, s, \varepsilon) \left( g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds} \right) ds,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-V\varepsilon}^t U(t, s, \varepsilon) \left( g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds} \right) ds = - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-V\varepsilon}^t U(t, s, \varepsilon) Q(s) Q^{-1}(s) \left( g'_\varepsilon - \right. \\
& \quad \left. - \frac{dv}{ds} \right) ds = - \int_{t-V\varepsilon}^t \left( \frac{d}{ds} U(t, s, \varepsilon) Q^{-1}(s) \left( g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds} \right) \right) ds = \\
& = - U(t, s, \varepsilon) Q^{-1}(s) \left( g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds} \right) \Big|_{t-V\varepsilon}^t + \int_{t-V\varepsilon}^t U(t, s, \varepsilon) \left( \frac{d}{ds} Q^{-1}(s) \left( g'_\varepsilon - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{dv}{ds} \right) \right) ds = - Q^{-1}(t) \left( g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt} \right) + U(t, t-V\varepsilon, \varepsilon) Q^{-1}(t-V\varepsilon) \left( g'_\varepsilon - \right. \\
& \quad \left. - \frac{dv}{ds} \right) \Big|_{t-V\varepsilon} + \int_{t-V\varepsilon}^t U(t, s, \varepsilon) \frac{d}{ds} Q^{-1}(s) \left( g'_\varepsilon - \frac{dv}{ds} \right) ds.
\end{aligned}$$

Pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ultima integrală tinde evident către zero. Deoarece

$$|U(t, t-V\varepsilon, \varepsilon)| \leq B e^{-\frac{\mu}{\varepsilon} V\varepsilon}$$

rezultă că și al doilea termen tinde către zero. Rezultă în definitiv

$$\eta^{**}(t) = -Q^{-1}(t) \left[ g'_\varepsilon - \frac{dv}{dt} \right].$$

**TEOREMA 3.19.** *Presupunem că sistemul (25) admite o familie de soluții periodice de perioadă  $\omega$ ,  $[u(t, c), v(t, c)]$ , și că pentru soluția corespunzătoare valorii  $c = c_0$ , avem  $\frac{Q + Q^*}{2} \leq -\mu E$ . Dacă sistemul (24) admite o soluție periodică de perioadă  $\omega$  de forma*

*$x(t, \varepsilon) = u(t, c_0) + \varepsilon \xi^*(t, \varepsilon)$ ,  $y(t, \varepsilon) = v(t, c_0) + \varepsilon \eta^*(t, \varepsilon) - \varepsilon U(t) \xi^*(t, \varepsilon)$ , atunci*

$$\int_0^\omega q_j(t, c_0) \left\{ A_2(t, c_0) Q^{-1}(t, c_0) \left[ g'_\varepsilon - \frac{dv(t, c_0)}{dt} \right] - f'_\varepsilon \right\} dt = 0, (j = 1, 2, \dots, k),$$

*pentru toate soluțiile periodice  $q_j(t, c_0)$  de perioadă  $\omega$  ale sistemului adjuncț sistemului (27).*

Studiem acum problema perturbațiilor singulare ale sistemelor autonome de forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, \varepsilon),$$

(28)

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = g(x, y, \varepsilon).$$



Pentru  $\varepsilon = 0$  se obține sistemul

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, 0),$$

$$g(x, y, 0) = 0.$$

Presupunem că pentru  $x \in D$  există  $\varphi(x)$  astfel ca

$$g(x, \varphi(x), 0) \equiv 0.$$

Considerăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = f[x, \varphi(x), 0], \quad x \in D. \quad (29)$$

Presupunem că acest sistem admite în  $D$  o soluție periodică, respectiv aproape-periodică,  $u(t)$ .

Considerăm sistemul ortogonal normal  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$ , legat de această soluție, unde

$$\xi_1 = \frac{f[u(t), \varphi(u(t)), 0]}{|f[u(t), \varphi(u(t)), 0]|}.$$

Din construcția vectorilor  $\xi_1, \dots, \xi_i$  rezultă că aceștia sînt periodici, respectiv aproape-periodici în  $t$ .

Facem în sistemul (28) schimbarea de variabile

$$x = u(\theta) + S(\theta)z,$$

noile variabile fiind  $\theta$  și  $z$ , iar  $S$  fiind matricea care are drept coloane vectorii  $\xi_2, \dots, \xi_i$ .

Se obține un sistem de forma

$$\frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, z, y, \varepsilon),$$

$$\frac{dz}{dt} = Z(\theta, z, y, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = g[u(\theta) + S(\theta)z, y, \varepsilon].$$

Pentru  $\varepsilon = 0, z = 0, y = \varphi[u(\theta)]$  avem  $\Theta = 1$  deci pentru  $y$  în vecinătatea lui  $\varphi[u(\theta)]$ , iar  $z$  și  $\varepsilon$  mici, avem  $\Theta \neq 0$ .

Putem deci lua pe  $\theta$  ca variabilă independentă și obținem

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{Z(\theta, z, y, \varepsilon)}{\Theta(\theta, z, y, \varepsilon)}, \quad \varepsilon \frac{dy}{d\theta} = \frac{g[u(\theta) + S(\theta)z, y]}{\Theta(\theta, z, y, \varepsilon)}.$$

Am obținut astfel un sistem periodic, respectiv aproape-periodic de forma

$$\frac{dz}{d\theta} = F(\theta, z, y, \varepsilon), \quad \varepsilon \frac{dy}{d\theta} = Y(\theta, z, y, \varepsilon)$$

ca în teorema 3.18.

Pentru  $\varepsilon = 0$  se capătă

$$g[u(\theta) + S(\theta)z, y, 0] = 0$$

care admite soluția

$$z = 0, y = \varphi[u(\theta)]$$

căci

$$g[u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0] \equiv 0,$$

și

$$Z[\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0] \equiv 0.$$

Avem mai departe,

$$Y'_z(\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0) = \frac{g'_x S(\theta) \Theta - g \Theta'_z}{\Theta^2} \Big|_{\substack{z=0 \\ y=\varphi[u(\theta)] \\ \varepsilon=0}} =$$

$$= g'_x[u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0] S(\theta),$$

$$Y'_y(\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0) = \frac{g'_y \Theta - g \Theta'_y}{\Theta^2} \Big|_{\substack{z=0 \\ y=\varphi[u(\theta)] \\ \varepsilon=0}} = g'_y[u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0].$$

Rezultă că

$$U(\theta) = (g'_y[u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0])^{-1} g'_x[u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0] S(\theta),$$

$$Q(\theta) = g'_y[u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0].$$

Calculăm pe :

$$A_1(\theta) = F'_z[\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0] - F'_y[\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0] U(\theta),$$

$$F'_z[\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0] = \frac{Z'_z \Theta - Z \Theta'_z}{\Theta^2} \Big|_{\substack{z=0 \\ y=\varphi[u(\theta)] \\ \varepsilon=0}} = Z'_z - Z \Theta'_z \Big|_{\substack{z=0 \\ y=\varphi[u(\theta)] \\ \varepsilon=0}},$$

$$F'_y[\theta, 0, \varphi[u(\theta)], 0] = \frac{Z'_y \Theta - Z \Theta'_y}{\Theta^2} \Big|_{\substack{z=0 \\ y=\varphi[u(\theta)] \\ \varepsilon=0}} = Z'_y - Z \Theta'_y \Big|_{\substack{z=0 \\ y=\varphi[u(\theta)] \\ \varepsilon=0}}.$$

Sistemul (29) se scrie în noile variabile

$$\frac{d\theta}{dt} = \Theta[\theta, z, \varphi[u(\theta) + S(\theta)z], 0]$$

$$\frac{dz}{dt} = Z[\theta, z, \varphi[u(\theta) + S(\theta)z], 0]$$

deci

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{Z[\theta, z, \varphi[u(\theta) + S(\theta)z], 0]}{\Theta[\theta, z, \varphi[u(\theta) + S(\theta)z], 0]}.$$

Matricea sistemului în variații normale se obține luând derivata în raport cu  $z$  în punctul  $z = 0$ . Deducem

$$\begin{aligned} B(\theta) &= \frac{[Z'_z + Z'_v \varphi'_x S(\theta)]\Theta - Z(\Theta'_z + \Theta'_v \varphi'_x S(\theta))}{\Theta^2} \Big|_{z=0} = \\ &= Z'_z - Z'_v (g'_v)^{-1} g'_x S(\theta) - Z \Theta'_z + Z \Theta'_v (g'_v)^{-1} g'_x S(\theta) \Big|_{z=0} = \\ &= (Z'_z - Z \Theta'_z)_{z=0} - (Z'_v - Z \Theta'_v)_{z=0} U = F'_z - F'_v U, \end{aligned}$$

deci

$$B(\theta) = A_1(\theta).$$

Dacă presupunem că soluția sistemului în variații normale este uniform asimptotic stabilă (ceea ce în cazul periodic înseamnă că sistemul în variații corespunzător soluției  $u(t)$  are toți multiplicatorii afară de unul în interiorul cercului unitate), rezultă îndeplinite condițiile din teorema 3.18.

**TEOREMA 3.20.** *Dacă sistemul (29) admite o soluție periodică, respectiv aproape-periodică,  $u(t)$ , situată în  $D$  astfel ca  $\frac{Q + Q^*}{2} \leq -\mu E$ ,*

*unde  $Q = g'_v[u(t), \varphi[u(t)], 0]$  și în plus dacă soluția banală a sistemului în variații normale corespunzător este uniform asimptotic stabilă, atunci pentru  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  sistemul (28) admite o soluție periodică, respectiv aproape-periodică unică, care pentru  $\varepsilon = 0$  se reduce la  $(u(t), \varphi[u(t)])$ .*

Este suficient să observăm că în ipotezele teoremei, pe baza teoremei 3.18, rezultă existența unei soluții  $[z(\theta, \varepsilon), y(\theta, \varepsilon)]$  de forma

$$z(\theta, \varepsilon) = \varepsilon \xi^*(\theta, \varepsilon), \quad y(\theta, \varepsilon) = \varphi[u(\theta)] + O(\varepsilon)$$

care conduce la o soluție de forma

$$x = u(\theta) + \varepsilon S(\theta) \xi^*(\theta, \varepsilon), \quad y(\theta, \varepsilon) = \varphi[u(\theta)] + O(\varepsilon).$$

#### COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Demonstrația teoremei 3.3 este reproducă după [47]. Teorema 3.4 a fost dată pentru prima oară în [48]. Demonstrația din text este adaptată după cea dată pentru sistemele cu argument întârziat în [49]. Rezultate mai generale în această direcție se găsesc în [50]. Rezultatele relative la sistemele cvasiliniare au fost publicate în [51]. Teoria sistemelor cu parametru mic cu numeroase aplicații se găsește expusă în monografia [52] (vezi și [4], [5]). Metoda luării mediei, în forma ei cea mai generală, a fost fundată de N. N. Bogoliubov în [53]. O expunere amănunțită a

metodei se găsește în [54]. Rezultatele din § 6 sînt publicate în [55], [56]. Teorema lui F. Browder este dată în [57]. Teoria sistemelor autonome este expusă după [58]. Rezultatul lui E.A. Coddington și N. Levinson pomenit în § 8 se găsește în [4]. Teorema lui Andronov și Witt pentru soluții periodice de speța a doua a fost dată în [59]. Expunerea din text e nouă. Metoda lui L. Cesari a fost prezentată după [60]. Rezultatele din § 11 se găsesc în [61]. Teorema 3.18 a fost dată într-o formulare ceva mai generală pentru cazul soluțiilor periodice în [62], iar pentru cazul soluțiilor aproape-periodice în [63]. Teorema 3.19 este nouă. Teorema 3.20 pentru cazul aproape-periodic este nouă. Pentru cazul periodic demonstrația e nouă, iar rezultatul a fost dat în [64].

## CAPITOLUL IV

### SISTEME CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

Într-o serie de împrejurări nu se poate neglija durata de transmitere a acțiunii, ceea ce face ca forțele care intervin în sistem să depindă în fiecare moment de starea sistemului nu numai în momentul considerat, ci și în momentele anterioare. Astfel apar sistemele de ecuații diferențiale cu argument întârziat. În cele ce urmează vom schița unele probleme calitative în teoria sistemelor cu argument întârziat.

#### § 1. TEOREMA DE EXISTENȚĂ. PROPRIETĂȚI GENERALE

Să considerăm un sistem de forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t), x(t-\tau)], \quad (1)$$

unde  $\tau > 0$ ; presupunem că  $f$  este continuă în raport cu ansamblul argumentelor.

Pentru un asemenea sistem soluția se construiește, prin „metoda pașilor”, în felul următor: fie dată o funcție  $\varphi_0(t)$  continuă pe segmentul  $[t_0 - \tau, t_0]$ . Formăm sistemul

$$\frac{dx}{dt} = f[t, x, \varphi_0(t - \tau)], \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$$

și considerăm o soluție a acestui sistem determinată de condiția inițială  $x(t_0) = \varphi(t_0)$ . Fie  $\varphi_1(t)$  această soluție, care există pe baza ipotezelor de continuitate făcute. Dacă această soluție este prelungibilă pe tot segmentul  $[t_0, t_0 + \tau]$ , formăm noul sistem

$$\frac{dx}{dt} = f[t, x, \varphi_1(t - \tau)], \quad t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau$$

și considerăm o soluție a acestui sistem determinată de condiția inițială  $x(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau)$ . Fie  $\varphi_2(t)$  această soluție. În general, presupunând că  $\varphi_{k-1}(t)$  este prelungibilă pe intervalul  $[t_0 + (k-2)\tau, t_0 + (k-1)\tau]$ , se formează sistemul

$$\frac{dx}{dt} = f[t, x, \varphi_{k-1}(t - \tau)], \quad t_0 + (k-1)\tau \leq t \leq t_0 + k\tau$$

și se consideră o soluție a lui cu

$$x(t_0 + (k-1)\tau) = \varphi_{k-1}[t_0 + (k-1)\tau]$$

care se notează  $\varphi_k(t)$ . O soluție a sistemului (1),  $x(t)$ , definită de funcția inițială  $\varphi_0(t)$  va fi dată de relațiile  $x(t) = \varphi_k(t)$  pentru  $t \in [t_0 + (k-1)\tau, t_0 + k\tau]$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Funcția  $x(t)$  este evident continuă; prin însăși construcția ei, funcția  $x(t)$  este derivabilă în punctele interioare ale intervalelor  $[t_0 + (k-1)\tau, t_0 + k\tau]$ ,  $k \geq 1$ . Se vede de asemenea că  $x(t)$  e derivabilă și are derivată continuă și în punctele  $t_0 + k\tau$ ,  $k \geq 1$ . În punctul  $t_0$  există numai derivata la dreapta.

Dacă  $f(t, x, y)$  verifică condiția Lipschitz în raport cu  $x$ , oricare ar fi  $y$ , atunci există o singură soluție care pe  $[t_0 - \tau, t_0]$  coincide cu  $\varphi_0$ , deoarece funcțiile  $\varphi_k(t)$  rezultă determinate unic și orice soluție trebuie să coincidă cu  $\varphi_k(t)$  în  $[t_0 + (k-1)\tau, t_0 + k\tau]$ .

Sistemul (1) reprezintă tipul cel mai simplu de sistem cu argument întârziat. Sînt posibile situații în care să apară valorile funcției  $x(t)$  cu diferite întârzieri, și în sfîrșit aceste întârzieri pot să depindă de  $t$ . Putem considera astfel sisteme de forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t), x(t - \tau_1(t)), x(t - \tau_2(t)), \dots, x(t - \tau_m(t))].$$

Pentru asemenea sisteme se presupune că  $\tau_i(t) \geq 0$  și se consideră mulțimea  $E_{t_0}$  formată din valorile  $t - \tau_i(t)$ ,  $t \geq t_0$  care sînt mai mici sau egale cu  $t_0$ . Funcția inițială  $\varphi_0$  se dă pe mulțimea  $E_{t_0}$ .

Mai general, putem considera sisteme de forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t + s)], \quad (2)$$

unde pentru fiecare  $t$  fixat componentele vectorului  $f$  sînt funcționale definite pe mulțimea funcțiilor continue date pe  $[-\tau, 0]$ ,  $\tau > 0$ . Funcția  $f$  depinde astfel de întreaga comportare a funcției  $x$  anterioară momentului  $t$ . Vom presupune dată funcția inițială  $\varphi$  continuă pe  $[t_0 - \tau, t_0]$ . Considerăm spațiul funcțiilor continue, date pe  $[t_0 - \tau, t_0 + h]$  cu  $h > 0$  suficient de mic, cu norma obișnuită a convergenței uniforme,  $\|u\| = \sup_{t_0 - \tau \leq t \leq t_0 + h} |u(t)|$ ; submulțimea funcțiilor din acest spațiu care pe  $[t_0 - \tau, t_0]$  coincid

cu  $\varphi$  formează evident un subspațiu complet. Fie  $A[u]$  operatorul definit pe acest subspațiu complet prin relațiile

$$A[u] = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f[\sigma, u(\sigma + s)] d\sigma \text{ pentru } t_0 \leq t \leq t_0 + h,$$

$$A[u] = \varphi(t) \quad \text{pentru } t_0 - \tau \leq t \leq t_0.$$

Evident, operatorul  $A$  aplică subspațiul considerat în el însuși. Vom presupune că  $f$  verifică o condiție de tip Lipschitz și vom demonstra că  $A$  este o contracție.

Avem

$$\begin{aligned} |A[u_1] - A[u_2]| &= \left| \int_{t_0}^t \{f[\sigma, u_1(\sigma + s)] - f[\sigma, u_2(\sigma + s)]\} d\sigma \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |f[\sigma, u_1(\sigma + s)] - f[\sigma, u_2(\sigma + s)]| d\sigma \text{ pentru } t_0 \leq t \leq t_0 + h, \end{aligned}$$

$$A[u_1] - A[u_2] \equiv 0 \text{ pentru } t_0 - \tau \leq t \leq t_0.$$

Dacă presupunem că

$$|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| < L \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

pentru  $\varphi_1, \varphi_2$  într-o vecinătate a lui  $\varphi(t_0 + s)$ , atunci, pentru  $h$  suficient de mic și  $u_1, u_2$  în această vecinătate, va rezulta că  $A[u_1]$  și  $A[u_2]$  sînt în aceeași vecinătate și în plus

$$|A[u_1] - A[u_2]| \leq hL \|u_1 - u_2\|,$$

deci pentru  $h$  suficient de mic,  $A$  este o contracție. Rezultă în aceste condiții că  $A$  admite un punct fix și că acesta este unic. Dacă  $x(t)$  este punctul fix al operatorului  $A$ , avem

$$x(t) = \varphi(t) \text{ pentru } t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

și

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f[\sigma, x(\sigma + s)] d\sigma \text{ pentru } t_0 \leq t \leq t_0 + h,$$

deci

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t + s)]$$

și  $x(t)$  e soluție a sistemului (2).

În acest fel, dacă  $f$  verifică o condiție de tip Lipschitz este demonstrată teorema de existență și unicitate pentru sistemele generale de forma (2).

Ca și în cazul sistemelor de ecuații diferențiale ordinare, această teoremă are un caracter local.

Vom nota, ca și în cazul sistemelor de ecuații diferențiale ordinare, cu  $x(t; t_0, \varphi)$  soluția sistemului (2) definită pentru  $t \geq t_0 - \tau$ , care pe  $[t_0, t_0 - \tau]$  coincide cu funcția inițială  $\varphi$ .

Presupunînd verificată în continuare condiția de tip Lipschitz să demonstrăm inegalitatea fundamentală\*)

$$|x(t; t_0, \varphi_1) - x(t; t_0, \varphi_2)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\| e^{L(t-t_0)}. \quad (3)$$

Pentru  $t = t_0$  inegalitatea este evident verificată. Presupunem că ea nu este verificată pentru toți  $t$  pentru care soluțiile sînt definite și fie  $t_1$  marginea superioară a punctelor  $t$  pentru care inegalitatea are loc. Avem

$$|x(t_1; t_0, \varphi_1) - x(t_1; t_0, \varphi_2)| = \|\varphi_1 - \varphi_2\| e^{L(t_1-t_0)}$$

și pentru orice  $n$  există  $t_1 < t_n < t_1 + \frac{1}{n}$  astfel încît

$$|x(t_n; t_0, \varphi_1) - x(t_n; t_0, \varphi_2)| > \|\varphi_1 - \varphi_2\| e^{L(t_n-t_0)}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_n - t_1} \{ & |x(t_n; t_0, \varphi_1) - x(t_n; t_0, \varphi_2)| - |x(t_1; t_0, \varphi_1) - \\ & - x(t_1; t_0, \varphi_2)| \} > \frac{1}{t_n - t_1} [e^{L(t_n-t_0)} - e^{L(t_1-t_0)}] \|\varphi_1 - \varphi_2\| \end{aligned}$$

deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \{ |x(t_1 + h; t_0, \varphi_1) - x(t_1 + h; t_0, \varphi_2)| - |x(t_1; t_0, \varphi_1) - x(t_1; t_0, \varphi_2)| \} \geq L e^{L(t_1-t_0)} \|\varphi_1 - \varphi_2\| = L |x(t_1; t_0, \varphi_1) - x(t_1; t_0, \varphi_2)|.$$

Din sistemul (2) rezultă

$$\begin{aligned} \left| \frac{dx(t; t_0, \varphi_1)}{dt} - \frac{dx(t; t_0, \varphi_2)}{dt} \right| &= \left| f[t, x(t+s; t_0, \varphi_1) - \right. \\ &\left. - f[t, x(t+s; t_0, \varphi_2)] \right| \leq L \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |x(t+s; t_0, \varphi_1) - x(t+s; t_0, \varphi_2)| \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} \left| \frac{dx(t_1; t_0, \varphi_1)}{dt} - \frac{dx(t_1; t_0, \varphi_2)}{dt} \right| &< L \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |x(t_1+s; t_0, \varphi_1) - \\ &- x(t_1+s; t_0, \varphi_2)| \leq L \|\varphi_1 - \varphi_2\| e^{L(t_1-t_0)} = L |x(t_1; t_0, \varphi_1) - x(t_1; t_0, \varphi_2)|, \end{aligned}$$

căci pentru  $s \leq 0$  avem  $t_1 + s \leq t_1$  și inegalitatea (3) este verificată.

Avem însă evident

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \{ |u(t_1 + h)| - |u(t_1)| \} \leq \left| \frac{du(t_1)}{dt} \right|$$

\*) Demonstrația de mai jos reproduce pe cea dată de N. N. Krasovski.



deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \{ |x(t_1 + h; t_0, \varphi_1) - x(t_1 + h; t_0, \varphi_2)| - |x(t_1; t_0, \varphi_1) - x(t_1; t_0, \varphi_2)| \} < L |x(t_1; t_0, \varphi_1) - x(t_1; t_0, \varphi_2)|$$

ceea ce contrazice inegalitatea (\*). Existența lui  $t_1$  este contradictorie, deci inegalitatea (3) este valabilă pentru toate valorile  $t$  pentru care soluțiile sînt prelungibile.

În aceleași condiții, să considerăm și sistemul

$$\frac{du(t)}{dt} = f[t, u(t+s)] + g[t, u(t+s)]. \quad (4)$$

Demonstrăm inegalitatea

$$|x(t; t_0, \varphi) - u(t; t_0, \varphi)| \leq (e^{L(t-t_0)} - 1) \sup |g(t, u(t+s))|. \quad (5)$$

Folosim același procedeu ca mai sus. Pentru  $t = t_0$ , inegalitatea (5) este verificată; fie  $t_1$  marginea superioară a mulțimii valorilor  $t$  pentru care ea rămîne verificată. Avem

$$|x(t_1; t_0, \varphi) - u(t_1; t_0, \varphi)| = (e^{L(t_1-t_0)} - 1) \sup |g(t, u(t+s))|$$

și pentru orice  $n$  există  $t_1 < t_n < t_1 + \frac{1}{n}$  astfel încît

$$|x(t_n; t_0, \varphi) - u(t_n; t_0, \varphi)| > [e^{L(t_n-t_0)} - 1] \sup |g(t, u(t+s))|,$$

Rezultă

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \{ |x(t_1 + h; t_0, \varphi) - u(t_1 + h; t_0, \varphi)| - |x(t_1; t_0, \varphi) - u(t_1; t_0, \varphi)| \} \geq L e^{L(t_1-t_0)} \sup |g(t, u(t+s))|. \quad (**)$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \left| \frac{dx(t_1; t_0, \varphi)}{dt} - \frac{du(t_1; t_0, \varphi)}{dt} \right| &< \frac{L}{-\tau \leq s \leq 0} |x(t_1 + s; t_0, \varphi) - u(t_1 + s; t_0, \varphi)| + \sup |g(t, u(t+s))| \leq L (e^{L(t-t_0)} - 1) \sup |g(t, u(t+s))| + \\ &+ \sup |g(t, u(t+s))| = L e^{L(t-t_0)} \sup |g(t, u(t+s))| + \\ &+ (1 - L) \sup |g(t, u(t+s))| < L e^{L(t-t_0)} \sup |g(t, u(t+s))| \end{aligned}$$

dacă presupunem  $L > 1$ .

Rezultă

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \{ |x(t_1 + h; t_0, \varphi) - u(t_1 + h; t_0, \varphi)| - |x(t_1; t_0, \varphi) - u(t_1; t_0, \varphi)| \} < L e^{L(t-t_0)} \sup |g(t, u(t+s))|$$

ceea ce contrazice (\*\*). Existența lui  $t_1$  rezultă contradictorie și deci inegalitatea (5) e demonstrată pentru toți  $t > t_0$  pentru care soluțiile sistemelor (2) și (4) există.

Să presupunem acum că  $f$  are componentele diferențiabile în sensul lui Fréchet. Atunci vom putea scrie

$f[t, x(t+s)] - f[t, x_0(t+s)] = A(t, x(t+s) - x_0(t+s)) + o(\|x - x_0\|)$ , unde  $A(t, \varphi)$  este un vector ale cărui componente sînt pentru fiecare  $t$  funcționale liniare, deci, pe baza teoremei lui Riesz;

$$A(t, \varphi) = \int_{-\tau}^0 (d_s \eta(t, s)) \varphi(s)$$

$\eta(t, s)$  fiind o matrice, care depinde de soluția  $x_0$ . Sistemul liniar

$$\dot{y}(t) = \int_{-\tau}^0 (d_s \eta(t, s)) y(t+s) \quad (6)$$

se numește *sistemul în variații* corespunzător sistemului (2) și soluției  $x_0$

Pentru a evita scrierea incomodă (6), cînd vom avea de-a face cu sisteme liniare generale de această formă vom presupune că  $y$  este un vector linie și vom scrie

$$\dot{y}(t) = \int_{-\tau}^0 y(t+s) d_s \eta(t, s). \quad (7)$$

În cazul sistemelor de forma (1), presupunînd că  $f(t, u, v)$  este diferențiabilă, sistemul în variații se scrie

$$\dot{y}(t) = f'_u[t, x_0(t), x_0(t-\tau)] y(t) + f'_v[t, x_0(t), x_0(t-\tau)] y(t-\tau). \quad (7')$$

Să presupunem că  $f$  este diferențiabilă în sensul arătat mai sus și fie  $x(t; t_0, \varphi_0)$  și  $x(t; t_0, \varphi)$  două soluții ale sistemului (2). Putem scrie, notînd

$$u(t) = x(t; t_0, \varphi) - x(t; t_0, \varphi_0),$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f[t, x(t+s; t_0, \varphi)] - f[t, x(t+s; t_0, \varphi_0)] = \\ &= A(t, u(t+s)) + o(\|u\|). \end{aligned}$$

Fie  $y(t)$  soluția sistemului în variații (6) care pe  $[t_0 - \tau, t_0]$  coincide cu  $\varphi - \varphi_0$ . Atunci pe baza inegalității (5) putem scrie

$$\|x(t; t_0, \varphi) - x(t; t_0, \varphi_0) - y(t)\| = o(\|x(t; t_0, \varphi) - x(t; t_0, \varphi_0)\|)$$

și ținînd seama și de inegalitatea (3), rezultă

$$\|x(t; t_0, \varphi) - x(t; t_0, \varphi_0) - y(t)\| = o(\|\varphi - \varphi_0\|). \quad (8)$$

În încheierea acestor considerații introductive să observăm că unui sistem cu întîrziere de forma (2) i se atașează un operator  $U_t$  definit pe spațiul funcțiilor continue pe  $[-\tau, 0]$  prin formula

$$U_t \varphi = x[t+s; 0, \varphi], \quad s \in [-\tau, 0], \quad t \geq 0.$$

Acest operator are următoarele proprietăți :

1°. Este continuu pentru orice  $t$  fixat ; acest lucru rezultă din inegalitatea (3).

2°. Avem  $U_0 \varphi = \varphi$ , deci  $U_0$  este operatorul identic.

3°. Dacă sistemul este liniar, de forma (6) respectiv (7), atunci  $U_t$  este un operator liniar. Într-adevăr, din liniaritatea sistemului rezultă că orice combinație liniară de soluții este soluție, deci

$$y(t; t_0, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 y(t; t_0, \varphi_1) + \alpha_2 y(t; t_0, \varphi_2)$$

deoarece în ambii membri ai egalității se află soluții și aceste soluții coincid pe  $[t_0 - \tau, t_0]$ .

Din egalitatea scrisă rezultă

$$U_t(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 U_t \varphi_1 + \alpha_2 U_t \varphi_2$$

deci  $U_t$  este liniar.

Relația (8) arată că dacă (6) este sistemul în variații atașat sistemului (2) și soluției  $x(t; 0, \varphi_0)$  și dacă notăm cu  $U_t$  operatorul atașat lui (2) și cu  $V_t$  operatorul atașat sistemului (6), atunci

$$\|U_t \varphi - U_t \varphi_0 - V_t(\varphi - \varphi_0)\| = o(\|\varphi - \varphi_0\|),$$

deci  $V_t$  este diferențiala Fréchet a lui  $U_t$  în punctul  $\varphi_0$ .

## § 2. TEORIA STABILITĂȚII LIAPUNOV

Trecem la stabilirea propozițiilor fundamentale asupra stabilității Liapunov la sistemele cu întârziere.

**DEFINIȚIE.** Soluția  $x_0(t)$  a sistemului (2) se numește uniform stabilă dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel ca dacă  $|\varphi(s) - x_0(s)| < \delta$  pentru  $s \in [t_0 - \tau, t_0]$ , atunci  $|x(t; t_0, \varphi) - x_0(t)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .

Ca și în cazul sistemelor de ecuații diferențiale ordinare, studiul stabilității unei soluții  $x_0(t)$  se reduce la studiul stabilității soluției banale.

**TEOREMA 4.1.** Să presupunem că există o funcțională  $V[t, \varphi]$  definită pentru orice  $t$  pe sfera  $\|\varphi\| \leq H$  din spațiul funcțiilor continue pe  $[-\tau, 0]$  cu proprietățile :

1°. Există funcțiile  $a(r)$ ,  $b(r)$  continue, pozitive și monoton crescătoare, cu  $a(0) = b(0) = 0$ , astfel ca  $a(\|\varphi\|) \leq V[t, \varphi] \leq b(\|\varphi\|)$

2°.  $V^*(t) = V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]$  este o funcție monoton descrescătoare pentru  $t \geq t_0$ ,  $s \in [-\tau, 0]$ .

Atunci soluția banală a sistemului (2) este uniform stabilă.

**Demonstrație.** Fie  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta(\varepsilon) < b^{-1}[a(\varepsilon)]$ ,  $t_0 \geq 0$ ,  $\varphi$  o funcție continuă pe  $[t_0 - \tau, t_0]$ ,  $\|\varphi\| < \delta(\varepsilon)$ . Considerăm soluția  $x(t; t_0, \varphi)$  și formăm funcția

$$V^*(t) = V[t, x(t+s; t_0, \varphi)].$$

Conform ipotezei, această funcție este monoton descrescătoare, deci

$$\begin{aligned} V^*(t) &\leq V^*(t_0) = V[t_0, x(t_0 + s; t_0, \varphi)] = \\ &= V[t_0, \varphi(t_0 + s)] \leq b(\|\varphi\|) < b(\delta(\varepsilon)) < a(\varepsilon). \end{aligned}$$

Din  $a(\|x(t+s; t_0, \varphi)\|) < a(\varepsilon)$  și monotonia funcției  $a(r)$  rezultă  $\|x(t+s; t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ , deci  $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$ , pentru  $t \geq t_0$ .

**TEOREMA 4.2.** *Dacă soluția banală a sistemului (2) este uniform stabilă, există o funcțională  $V[t, \varphi]$  cu proprietățile din teorema precedentă.*

*Demonstrație.* Fie  $G(r)$  o funcție continuă pozitivă și monoton crescătoare pentru  $r > 0$ ,  $G(0) = 0$ . Definim funcționala  $V[t, \varphi]$  prin relația

$$V[t, \varphi] = \sup_{\sigma \geq 0} G[\|x(t + \sigma + s; t, \varphi(u - t))\|], \quad t - \tau \leq u \leq t, \quad -\tau \leq s \leq 0.$$

Deoarece pentru  $\sigma = 0$  avem

$$\|x(t + s; t, \varphi(u - t))\| = \|\varphi(u - t)\| = \|\varphi\|$$

rezultă că

$$V[t, \varphi] \geq G(\|\varphi\|).$$

Din stabilitatea uniformă a soluției banale a sistemului (2) rezultă că există o funcție  $\delta(\varepsilon)$  cu proprietatea că  $\|\varphi\| < \delta$  implică  $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ . După cum s-a arătat în capitolul I, funcția  $\delta(\varepsilon)$  poate fi aleasă monoton crescătoare și continuă, deci există funcția inversă  $\varepsilon(\delta)$  cu proprietatea că  $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon(\|\varphi\|)$ , pentru  $t \geq t_0 - \tau$  (dacă presupunem în plus, ceea ce nu restrânge generalitatea, că  $\delta(\varepsilon) < \varepsilon$ ). De aici rezultă că

$$\|x(t + \sigma + s; t, \varphi(u - t))\| < \varepsilon(\|\varphi\|)$$

și deci

$$V[t, \varphi] < G[\varepsilon(\|\varphi\|)].$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} V^*(t) &= V[t, x(t + s; t_0, \varphi)] = \sup_{\sigma \geq 0} G[\|x(t + \sigma + s; t, x(t + s, t_0, \varphi))\|] = \\ &= \sup_{\sigma \geq 0} G[\|x(t + \sigma + s; t_0, \varphi)\|], \end{aligned}$$

căci soluțiile  $x(u; t, x(t + s; t_0, \varphi))$  și  $x(u; t_0, \varphi)$  coincid pentru  $u \geq t$  deoarece coincid pentru toți  $t - \tau \leq u \leq t$ .

Fie  $t_1 > t_2$ ,  $d = t_1 - t_2$ . Avem

$$\begin{aligned} V^*(t_1) &= \sup_{\sigma \geq 0} G[\|x(t_1 + \sigma + s; t_0, \varphi)\|] = \sup_{\sigma \geq 0} G[\|x(t_2 + d + \sigma + s; t_0, \varphi)\|] = \\ &= \sup_{\sigma \geq d} G[\|x(t_2 + \sigma + s; t_0, \varphi)\|] = \sup_{\sigma \geq 0} G[\|x(t_2 + \sigma + s; t_0, \varphi)\|] = V^*(t_2) \end{aligned}$$

deci  $V^*(t)$  este monoton descrescătoare.

DEFINIȚIE. *Soluția banală a sistemului (2) se numește uniform asimptotic stabilă dacă există  $\delta_0 > 0$  și funcțiile  $\delta(\varepsilon)$ ,  $T(\varepsilon)$  astfel ca  $\|\varphi\| < \delta$  să implice  $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$  iar  $\|\varphi\| < \delta_0$  și  $t \geq t_0 + T$  să implice  $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$ .*

TEOREMA 4.3. *Să presupunem că există o funcțională  $V[t, \varphi]$  definită pentru orice  $t \geq 0$  pe sfera  $\|\varphi\| \leq H$  din spațiul funcțiilor continue pe  $[-\tau, 0]$ , cu proprietățile:*

1°. *Există funcțiile  $a(r)$ ,  $b(r)$ ,  $c(r)$  continue, pozitive și monoton crescătoare pentru  $r > 0$ ,  $a(0) = b(0) = c(0) = 0$ , astfel ca*

$$a(\|\varphi\|) \leq V[t, \varphi] \leq b(\|\varphi\|),$$

$$2^\circ. \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t, \varphi)] - V[t, \varphi(t+s)]}{h} \leq -c(\|\varphi\|).$$

*Atunci soluția banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstrație.* Fie  $\delta(\varepsilon) < b^{-1}[a(\varepsilon)]$ ,  $\|\varphi\| < \delta(\varepsilon)$ ,  $V^*(t) = V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]$ .

Avem

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} = \\ &= \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]}{h} = \\ &= \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leq \\ & \leq -c(\|x(t+s; t_0, \varphi)\|) < 0 \end{aligned}$$

dacă  $\|\varphi\| \neq 0$ . Din

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} < 0$$

rezultă că  $V^*(t)$  este monoton descrescătoare, deci ca în teorema 4.1, rezultă  $\|x(t; t_0, \varphi)\| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ . Să observăm că deoarece  $V^*(t)$  este monoton descrescătoare, ea este derivabilă aproape peste tot și deci condiția 2° este verificată aproape peste tot de derivata funcției  $V^*$ .

Fie  $\delta_0 = \delta(H)$ ,  $T(\varepsilon) = \frac{b[\delta_0]}{c[\delta(\varepsilon)]}$ ,  $\|\varphi\| < \delta_0$ . Dacă pentru  $t \in [t_0, t_0 + T]$

am avea

$$\|x(t+s; t_0, \varphi)\| \geq \delta(\varepsilon),$$

ar rezulta

$$c(\|x(t+s; t_0, \varphi)\|) \geq c[\delta(\varepsilon)]$$

și deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leq -c[\delta(\varepsilon)],$$

de unde, pe baza unei proprietăți din teoria funcțiilor de variabilă reală,

$$V^*(t) - V^*(t_0) \leq -c[\delta(\varepsilon)](t - t_0),$$

deci

$$V^*(t) \leq V^*(t_0) - c[\delta(\varepsilon)](t - t_0) \leq b(\|\varphi\|) - c[\delta(\varepsilon)](t - t_0) \leq b(\delta_0) - c[\delta(\varepsilon)](t - t_0).$$

De aici

$$V^*(t_0 + T) < b(\delta_0) - c[\delta(\varepsilon)]T = 0$$

ceea ce este contradictoriu. Rezultă că există  $t' \in [t_0, t_0 + T]$  astfel ca  $\|x(t' + s; t_0, \varphi)\| < \delta(\varepsilon)$ , deci  $|x(t; t', x(t' + s; t_0, \varphi))| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t'$ . Dar aceasta înseamnă că pentru  $t \geq t_0 + T$  avem  $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$  și teorema e demonstrată.

**TEOREMA 4.4.** *Dacă soluția banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă, există o funcțională  $V[t, \varphi]$  cu proprietățile din teorema precedentă.*

*Demonstrație.* Fie, ca în demonstrația teoremei 1.6,  $G(r)$  o funcție cu  $G(0) = 0$ ,  $G'(0) = 0$ ,  $G'(r) > 0$ ,  $G''(r) > 0$  pentru  $r > 0$ . Alegem

$$V[t, \varphi] = \sup_{\sigma \geq 0} G(\|x(t + \sigma + s; t, \varphi(u-t))\|) \frac{1 + \alpha\sigma}{1 + \sigma}.$$

Demonstrația decurge mai departe ca în cazul teoremei 1.6 și nu o mai repetăm.

Ținând seama de faptul că  $f$  verifică o condiție de tip Lipschitz și folosind evaluarea (3), se demonstrează la fel ca în teorema 1.6' că se poate alege funcția  $G$  astfel încât funcționala  $V[t, \varphi]$  să verifice inegalitatea

$$|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leq M\|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

pentru  $\|\varphi_1\| < \delta(\delta_0)$ ,  $\|\varphi_2\| < \delta(\delta_0)$ .

**TEOREMA 4.5.** *Dacă soluția banală a sistemului liniar (6), respectiv (7) este uniform asimptotic stabilă, atunci ea este exponențial stabilă, adică*

$$|y(t; t_0, \varphi)| \leq Be^{-\alpha(t-t_0)}\|\varphi\|.$$

*Demonstrație.* Definim operația  $U_{t,t_0}$  prin relația

$$U_{t,t_0}\varphi = y(s; t_0, \varphi), \quad t - \tau \leq s \leq t.$$

Această operație aplică spațiul funcțiilor continue pe  $[t_0 - \tau, t_0]$  în spațiul funcțiilor continue pe  $[t - \tau, t]$ . Din cauza liniarității sistemului această operație rezultă liniară. Inegalitatea fundamentală (3) arată că ea este și continuă. Rezultă deci că ea este mărginită, deci există  $\|U_{t,t_0}\|$  cu proprietatea

$$\sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|U_{t,t_0}\varphi\| = \|U_{t,t_0}\|.$$

Pentru  $\|\varphi\| \leq \delta_0$ ,  $t \geq t_0 + T$  avem  $|y(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$ , deci pentru  $t \geq t_0 + T + \tau$  rezultă  $\|U_{t,t_0}\varphi\| < \varepsilon$ .

Fixăm pe  $\varepsilon$  cu  $0 < \varepsilon < 1$ . Fie  $\varphi_0$  arbitrar cu  $\|\varphi_0\| < 1$ ; atunci  $\|\delta_0 \varphi_0\| \leq \delta_0$ , deci  $\|U_{t_0} \delta_0 \varphi_0\| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0 + T + \tau$ , deci  $\|U_{t_0} \varphi_0\| < \frac{\varepsilon}{\delta_0}$ . Cum  $\varphi_0$  este arbitrar cu  $\|\varphi_0\| < 1$ , rezultă  $\|U_{t_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta_0}$  pentru  $t \geq t_0 + T + \tau$  sau  $\|U_{t_0}\| \leq \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0 + T_1 + \tau$  unde am notat  $T_1(\varepsilon) = T(\delta_0 \varepsilon)$ . Avem relația

$$U_{t, t_0} \varphi = U_{t, t_0 + T_1 + \tau} (U_{t_0 + T_1 + \tau, t_0} \varphi)$$

(care revine la

$$y(s; t_0, \varphi) = y(s, t_0 + T_1 + \tau; y(u; t_0, \varphi)), \quad u \in [t_0 + T_1, t_0 + T_1 + \tau].$$

De aici rezultă

$$\|U_{t, t_0} \varphi\| \leq \|U_{t, t_0 + T_1 + \tau}\| \|U_{t_0 + T_1 + \tau, t_0} \varphi\| \leq \varepsilon^2 \|\varphi\| \text{ pentru } t \geq t_0 + 2(T_1 + \tau),$$

deci

$$\|U_{t, t_0}\| \leq \varepsilon^2 \text{ pentru } t \geq t_0 + 2(T_1 + \tau).$$

Prin inducție rezultă imediat  $\|U_{t, t_0}\| \leq \varepsilon^m$  pentru  $t \geq t_0 + m(T_1 + \tau)$  și mai departe demonstrația continuă la fel ca la sistemele de ecuații diferențiale ordinare (Cap. I, § 4).

**TEOREMA 4.4'.** *Dacă soluția banală a sistemului liniar (6) respectiv (7) este uniform asimptotic stabilă, există o funcțională  $V[t, \varphi]$  definită pentru orice  $t \geq 0$  pe spațiul funcțiilor continue pe  $[-\tau, 0]$ , cu proprietățile:*

$$1^\circ \|\varphi\|^2 \leq V[t, \varphi] \leq K_1 \|\varphi\|^2;$$

$$2^\circ |V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leq K_1 (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\|;$$

$$3^\circ \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, y(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leq -\|y(t+s; t_0, \varphi)\|^2.$$

*Demonstrație.* Fie

$$V[t, \varphi] = \int_0^\infty \|y(t+u+s; t, \varphi)\|^2 du + \sup_{\sigma \geq 0} \|y(t+\sigma+s; t, \varphi)\|^2;$$

reamintim că  $\|\varphi\| = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi(s)|$ . Convergența integralei este asigurată datorită stabilității exponențiale.

Evident,

$$V[t, \varphi] \geq \sup_{\sigma \geq 0} \|y(t+\sigma+s; t, \varphi)\|^2 \geq \|\varphi\|^2.$$

Din

$$|y(t; t_0, \varphi)| > Be^{-\alpha(t-t_0)} \|\varphi\|$$

rezultă

$$\|y(t+u+s; t, \varphi)\| \leq Be^{-\alpha(u+s)} \|\varphi\|, \text{ deci } \|y(t+u+s; t, \varphi)\| \leq Be^{\alpha\tau} e^{-\alpha u} \|\varphi\|;$$

deducem de aici

$$V[t, \varphi] \leq B^2 e^{2\alpha\tau} \int_0^\infty e^{-2\alpha u} du + B^2 e^{2\alpha\tau} \|\varphi\|^2 = \left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right) B^2 e^{2\alpha\tau} \|\varphi\|^2 = K_1 \|\varphi\|^2.$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} |V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| &\leq \left| \int_0^\infty \|y(t+u+s; t, \varphi_1)\|^2 du - \int_0^\infty \|y(t+u+s; t, \varphi_2)\|^2 du \right| + \\ &+ \left| \sup_{\sigma \geq 0} \|y(t+\sigma+s; t, \varphi_1)\|^2 - \sup_{\sigma \geq 0} \|y(t+\sigma+s; t, \varphi_2)\|^2 \right| \leq \\ &\leq \int_0^\infty \left| \|y(t+u+s; t, \varphi_1)\|^2 - \|y(t+u+s; t, \varphi_2)\|^2 \right| du + \\ &+ \sup_{\sigma \geq 0} \left| \|y(t+\sigma+s; t, \varphi_1)\|^2 - \|y(t+\sigma+s; t, \varphi_2)\|^2 \right| \leq \\ &\leq \int_0^\infty (\|y(t+u+s; t, \varphi_1)\| + \|y(t+u+s; t, \varphi_2)\|) \|y(t+u+s; t, \varphi_1) - \\ &- y(t+u+s; t, \varphi_2)\| du + \sup_{\sigma \geq 0} (\|y(t+\sigma+s; t, \varphi_1)\| + \\ &+ \|y(t+\sigma+s; t, \varphi_2)\|) \sup_{\sigma \geq 0} \|y(t+\sigma+s; t, \varphi_1) - y(t+\sigma+s; t, \varphi_2)\| \leq \\ &\leq \int_0^\infty B e^{\alpha\tau} e^{-\alpha u} (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) B e^{\alpha\tau} e^{-\alpha u} \|\varphi_1 - \varphi_2\| + \\ &+ B e^{\alpha\tau} (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) B e^{\alpha\tau} \|\varphi_1 - \varphi_2\| = B^2 e^{2\alpha\tau} \left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right) (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\| = \\ &= K_1 (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\|. \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned} V[t, y(t+s; t_0, \varphi)] &= \int_0^\infty \|y(t+u+s; t, y(t+s; t_0, \varphi))\|^2 du + \\ &+ \sup_{\sigma \geq 0} \|y(t+\sigma+s; t, y(t+s; t_0, \varphi))\|^2 = \int_0^\infty \|y(t+u+s; t_0, \varphi)\|^2 du + \\ &+ \sup_{\sigma \geq 0} \|y(t+\sigma+s; t_0, \varphi)\|^2 = \int_t^\infty \|y(u+s; t_0, \varphi)\|^2 du + \\ &+ \sup_{\sigma \geq 0} \|y(t+\sigma+s; t_0, \varphi)\|^2. \end{aligned}$$

Am văzut în demonstrația teoremei 4.2 că  $\sup_{\sigma \geq 0} \|y(t+\sigma+s; t_0, \varphi)\|^2$  este o funcție monoton descrescătoare. Rezultă de aici că

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, y(t+s; t_0, \varphi)]}{h} &\leq \\ &\leq \frac{d}{dt} \int_t^\infty \|y(u+s; t_0, \varphi)\|^2 du = -\|y(t+s; t_0, \varphi)\|^2. \end{aligned}$$

Teorema este demonstrată.



Ca și în cazul sistemelor de ecuații diferențiale ordinare această teoremă va servi la demonstrarea unei teoreme de stabilitate după prima aproximație.

**TEOREMA 4.6.** *Să considerăm sistemul*

$$\dot{x}(t) = A(t, x(t+s)) + f(t, x(t+s)), \quad (9)$$

unde  $A(t, x(t+s))$  este pentru fiecare  $t$  un vector ale cărui componente sînt funcționale liniare pe spațiul funcțiilor continue pe  $[-\tau, 0]$  (cu norme mărginite ca funcții de  $t$ ), iar componentele vectorului  $f$  sînt pentru fiecare  $t$  funcționale continue pe același spațiu, cu proprietatea  $|f(t, x(t+s))| < \gamma \|x(t+s)\|$ ,  $\gamma$  fiind suficient de mic, pentru  $\|x(t+s)\| \leq H$ . Dacă soluția banală a sistemului liniar de primă aproximație

$$\dot{y}(t) = A(t, y(t+s)) \quad (10)$$

este uniform asimptotic stabilă, atunci și soluția banală a sistemului (9) este uniform asimptotic stabilă.

**Demonstrație.** Fie  $V[t, \varphi]$  funcționala construită pentru sistemul (10) pe baza teoremei 4.4'. Considerăm o soluție  $x(t; t_0, \varphi)$  a sistemului (9) cu  $\|\varphi\|$  suficient de mică; fie

$$V^*(t) = V[t, x(t+s; t_0, \varphi)].$$

Evaluăm

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h}.$$

Avem

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leq \\ & \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))] - V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]}{h} + \\ & + \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))] - V[t+h, y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))]}{h} \leq \\ & \leq -\|x(t+s; t_0, \varphi)\|^2 + \\ & + \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{|V[t+h, x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))] - V[t+h, y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))]|}{h}. \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned} & |V[t+h, x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))] - \\ & - V[t+h, y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))]| \leq K_1(\|x(t+h+s; t_0, \varphi)\| + \\ & + \|y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))\| \|x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi)) - \\ & - y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))\|). \end{aligned}$$

Pe de altă parte, pe baza evaluării (3) avem

$$\|x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))\| \leq e^{Lh} \|x(t+s; t_0, \varphi)\|,$$

iar pe baza evaluării (5)

$$\begin{aligned} \|x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi)) - y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))\| &\leq \\ &\leq (e^{Lh} - 1) \gamma e^{Lh} \|x(t+s; t_0, \varphi)\|. \end{aligned}$$

Conform ipotezei făcute asupra sistemului liniar avem și

$$\|y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))\| \leq B \|x(t+s; t_0, \varphi)\|.$$

**Rezultă**

$$\begin{aligned} |V[t+h, x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))] - V[t+h, y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))]| &\leq K_1 (e^{Lh} + B) \|x(t+s; t_0, \varphi)\| (e^{Lh} - \\ - 1) \gamma e^{Lh} \|x(t+s; t_0, \varphi)\| &= K_1 \gamma (e^{Lh} + B) (e^{Lh} - 1) \|x(t+s; t_0, \varphi)\|^2. \end{aligned}$$

De aici

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{|V[t+h, x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))] - V[t+h, y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))]|}{h} &\leq \\ &\leq LK_1 \gamma (1 + B) \|x(t+s; t_0, \varphi)\|^2. \end{aligned}$$

**Rezultă**

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} &\leq -\|x(t+s; t_0, \varphi)\|^2 + \gamma LK_1 (1 + \\ + B) \|x(t+s; t_0, \varphi)\|^2 &= -[1 - \gamma LK_1 (1 + B)] \|x(t+s; t_0, \varphi)\|^2. \end{aligned}$$

Pentru  $\gamma < \frac{1}{LK_1 (1 + B)}$  avem

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leq -\gamma_1 \|x(t+s; t_0, \varphi)\|^2$$

ceea ce arată, pe baza teoremei 4.3, că soluția banală este uniform asimptotic stabilă. E ușor de văzut că stabilitatea este chiar exponențială căci din

$$V[t, \varphi] \geq \|\varphi\|^2,$$

rezultă

$$V^*(t) \geq \|x(t+s; t_0, \varphi)\|^2$$

și deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leq -\gamma_1 V^*(t)$$

sau

$$\frac{1}{V^*(t)} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leq -\gamma_1,$$

de unde rezultă

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\ln V^*(t+h) - \ln V^*(t)}{h} \leq -\gamma_1,$$

deci

$$\ln V^*(t) - \ln V^*(t_0) \leq -\gamma_1(t - t_0)$$

de unde rezultă

$$V^*(t) \leq V^*(t_0) e^{-\gamma_1(t-t_0)} \leq K_1 e^{-\gamma_1(t-t_0)} \|\varphi\|^2,$$

deci

$$\|x(t+s; t_0, \varphi)\|^2 \leq K_1 e^{-\gamma_1(t-t_0)} \|\varphi\|^2$$

și stabilitatea exponențială este dovedită.

**TEOREMA 4.7.** *Să considerăm din nou sistemul (9) și să presupunem că*

$$|f(t, x(t+s))| < g(t) \|x(t+s)\|, \text{ cu } \int_0^\infty g(t) dt < \infty.$$

*Dacă soluția banală a sistemului (10) este uniform stabilă, atunci soluția banală a sistemului (9) este uniform stabilă, iar dacă soluția banală a sistemului (10) este uniform asimptotic stabilă, atunci soluția banală a sistemului (9) este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstrație.* Dacă soluția banală a sistemului (10) este uniform stabilă, rezultă  $\|y(t; t_0, \varphi)\| \leq M \|\varphi\|$  pentru  $t \geq t_0$ , deoarece sistemul e liniar.

Fie

$$V[t, \varphi] = \sup_{\sigma \geq 0} \|y(t + \sigma + s; t, \varphi(u - t))\|.$$

Avem, evident

$$\|\varphi\| \leq V[t, \varphi] \leq M \|\varphi\|$$

și din

$$\begin{aligned} \|y(t + \sigma + s; t, \varphi_1)\| - \|y(t + \sigma + s; t, \varphi_2)\| &\leq \\ &\leq \|y(t + \sigma + s; t, \varphi_1 - \varphi_2)\| \leq M \|\varphi_1 - \varphi_2\| \end{aligned}$$

rezultă

$$\|y(t + \sigma + s; t, \varphi_1)\| \leq \|y(t + \sigma + s; t, \varphi_2)\| + M \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

deci

$$V[t, \varphi_1] \leq V[t, \varphi_2] + M \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

de unde

$$|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leq M \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Ca în demonstrația teoremei 4.2 deducem că  $V[t, y(t+s; t_0, \varphi)]$  este monoton descrescătoare, deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h+s; t, \varphi)] - V[t, \varphi]}{h} \leq 0.$$

Ca în teorema precedentă deducem că

$$\|x(t+h+s; t, \varphi) - y(t+h+s; t, \varphi)\| \leq g(t) (e^{Lh} - 1) e^{Lh} \|\varphi\|$$

și deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t, \varphi)] - V[t+h, y(t+h+s; t, \varphi)]}{h} \leq \\ \leq MLg(t) \|\varphi\|.$$

Rezultă

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t, \varphi)] - V[t, \varphi]}{h} \leq \\ \leq MLg(t) \|\varphi\| \leq MLg(t) V[t, \varphi].$$

Notînd

$$V^*(t) = V[t, x(t+s; t_0, \varphi)],$$

deducem

$$\frac{1}{V^*(t)} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leq MLg(t), \\ \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\ln V^*(t+h) - \ln V^*(t)}{h} \leq LMg(t)$$

deci

$$\ln V^*(t) - \ln V^*(t_0) \leq LM \int_{t_0}^t g(t) dt,$$

de unde

$$\|x(t+s; t_0, \varphi)\| \leq V^*(t) \leq V^*(t_0) e^{LM \int_{t_0}^t g(t) dt} \leq M e^{LM \int_0^\infty g(t) dt} \|\varphi\|,$$

și prima afirmație a teoremei este demonstrată.

Dacă soluția banală a sistemului (10) este uniform asimptotic stabilă, deducem, ca în teorema precedentă,

$$\frac{1}{V^*(t)} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leq -\frac{1}{K_1} + Kg(t),$$

de unde se obține

$$\|x(t+s; t_0, \varphi)\|^2 \leq V^*(t) \leq V^*(t_0) e^{K \int_{t_0}^t g(t) dt} e^{-\frac{1}{K_1}(t-t_0)} \|\varphi\|^2$$

ceea ce demonstrează stabilitatea exponențială a soluției banale a sistemului (9). Teorema este complet demonstrată.

Ca și în cazul sistemelor de ecuații diferențiale ordinare stabilitatea asimptotică uniformă implică stabilitatea în raport cu perturbații permanente.

**TEOREMA 4.8.** *Dacă soluția banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă atunci ea este stabilă și în raport cu perturbații permanente. Aceas-*

ta înseamnă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\eta_1 > 0$  și  $\eta_2 > 0$  cu proprietatea că dacă  $\sup_{\|\varphi\| < \varepsilon} |R(t, \varphi)| < \eta_1$  orice soluție a sistemului

$$\dot{y}(t) = f[t, y(t+s)] + R[t, y(t+s)] \quad (11)$$

cu  $\|\varphi\| < \eta_2$ , verifică inegalitatea  $|y(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .

*Demonstrație.* Avem pe baza inegalității (3)

$$|x(v; t, \varphi)| \leq e^{LH} \|\varphi\|, \quad t \leq v \leq t+h,$$

iar pe baza inegalității (5)

$$|y(v; t, \varphi) - x(v; t, \varphi)| \leq (e^{LH} - 1) \eta_1$$

dacă

$$|y(v, t, \varphi)| < \varepsilon \text{ și } t \leq v \leq t+h.$$

Rezultă

$$|y(v; t, \varphi)| \leq e^{LH} \|\varphi\| + (e^{LH} - 1) \eta_1$$

și dacă  $\|\varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}$  iar  $h$  e suficient de mic rezultă  $\|y(v; t, \varepsilon)\| < \varepsilon$  și evaluarea dedusă din (5) e valabilă. Deoarece soluția banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă, există o funcțională  $V[t, \varphi]$  cu proprietățile din teorema 4.4 și

$$|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leq M(r) \|\varphi_1 - \varphi_2\| \text{ pentru } \|\varphi_1\| < r, \|\varphi_2\| < r.$$

Avem

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h+s; t, \varphi)] - V[t, \varphi]}{h} \leq \\ & \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t, \varphi)] - V[t, \varphi]}{h} + \\ & + \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h+s; t, \varphi)] - V[t+h, x(t+h+s; t, \varphi)]}{h} \leq \\ & \leq -c(\|\varphi\|) + ML \eta_1. \end{aligned}$$

$$\text{Fie } \varepsilon > 0, \quad l < a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \|\varphi\| < \eta_2 = b^{-1}(l), \quad \eta_1 < \frac{c[b^{-1}(l)]}{LM}.$$

Demonstrăm că  $\|y(t+s; t_0, \varphi)\| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ .

Dacă acest lucru nu ar fi adevărat, ar exista  $t_1 > t_0$  astfel ca  $\|y(t_1 + s; t_0, \varphi)\| \geq \varepsilon$ ; dacă notăm ca de obicei

$$V^*(t) = V[t, y(t+s; t_0, \varphi)]$$

avem

$$V^*(t_1) \geq a(\|y(t_1 + s; t_0, \varphi)\|) \geq a(\varepsilon) > a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > l.$$

Pe de altă parte,

$$V^*(t_0) = V[t_0, \varphi] \leq b(\|\varphi\|) < b(\eta_2) = l.$$

Rezultă, din cauza continuității funcției  $V^*(t)$ , că există  $t_0 < t_2 < t_1$ , astfel ca  $V^*(t_2) = l$  și  $V^*(t) > l$  pentru  $t > t_2$ . Din  $V^*(t_2) = l$  rezultă  $b(\|y(t_2 + s; t_0, \varphi)\|) \geq V[t_2, y(t_2 + s; t_0, \varphi)] = l \geq a(\|y(t_2 + s; t_0, \varphi)\|)$ , deci

$$b^{-1}(l) \leq \|y(t_2 + s; t_0, \varphi)\| \leq a^{-1}(l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notăm  $\psi(s) = y(t_2 + s; t_0, \varphi)$ . Avem

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t_2 + h) - V^*(t_2)}{h} &= \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t_2 + h, y(t_2 + h + s; t_2, \psi)] - V[t_2, \psi]}{h} \leq \\ &\leq -c(\|\psi\|) + LM \eta_1 \leq -c[b^{-1}(l)] + LM \eta_1 < 0. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, din  $V^*(t_2) = l$  și  $V^*(t) > l$  pentru  $t > t_2$  rezultă

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t_2 + h) - V^*(t_2)}{h} \geq 0.$$

Am obținut o contradicție și deci  $\|y(t + s; t_0, \varphi)\| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ . Teorema este demonstrată.

Ca și în cazul sistemelor de ecuații diferențiale ordinare se demonstrează teorema de stabilitate în raport cu perturbațiile permanente mărginite în medie. De asemenea fără modificări în demonstrație se stabilesc pentru sistemele cu întârziere o serie de alte teoreme.

**TEOREMA 4.9.** *Presupunem că există o funcțională  $V[t, \varphi]$  definită ca în teoremele precedente, cu proprietățile:*

$$1^\circ a(t, \|\varphi\|) \leq V[t, \varphi] \leq b(\|\varphi\|);$$

$$2^\circ \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t + h, x(t + h + s; t, \varphi)] - V[t, \varphi]}{h} \leq -c(t, \|\varphi\|);$$

$$3^\circ |V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| < L \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

unde  $b(r)$  este continuă, monoton crescătoare pentru  $r > 0$ ,  $b(0) = 0$ , iar  $a(t, r)$ ,  $c(t, r)$  sînt continue și cu proprietatea că pentru orice pereche  $(\alpha, \beta)$  cu  $0 < \alpha \leq \beta < H$ , există  $\theta(\alpha, \beta) \geq 0$ ,  $k(\alpha, \beta) > 0$  astfel ca  $a(t, r) > k(\alpha, \beta)$ ,  $c(t, r) > k(\alpha, \beta)$  pentru  $\alpha \leq r \leq \beta$ ,  $t \geq \theta(\alpha, \beta)$ . Atunci soluția banală a sistemului (2) este uniform asimptotic stabilă.

**TEOREMA 4.10.** *Se consideră sistemul*

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t + s)] + R[t, x(t + s)], \quad (12)$$

unde  $f[t, 0] \equiv R[t, 0] \equiv 0$ ,  $f$  și  $R$  verifică o condiție Lipschitz și în plus

$\lim_{t \rightarrow \infty} R[t, \varphi] = 0$  uniform în raport cu  $\varphi$  pentru  $\|\varphi\| \leq H$ . Atunci, dacă soluția banală a sistemului

$$\dot{z}(t) = f[t, z(t+s)]$$

este uniform asimptotic stabilă, soluția banală a sistemului (12) este de asemenea uniform asimptotic stabilă.

TEOREMA 4.11. Se consideră sistemul

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[t, x(t+s), y(t+s)], \\ \dot{y}(t) &= g[t, x(t+s), y(t+s)],\end{aligned}\tag{13}$$

unde  $f(t, 0, 0) \equiv g(t, 0, 0) \equiv 0$ . Presupunem că soluția banală a sistemului (13) este stabilă în raport cu componentele  $x$ , deci că există  $\delta(\varepsilon) > 0$  cu proprietatea că  $\|\varphi\| < \delta, \|\psi\| < \delta$ , implică  $|x(t, t_0, \varphi, \psi)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ . Presupunem în plus că soluția banală a sistemului

$$\dot{z}(t) = g[t, 0, z(t+s)]$$

este uniform asimptotic stabilă. Atunci soluția banală a sistemului (13) este uniform stabilă. Dacă în plus stabilitatea în raport cu componentele  $x$  este asimptotică, deci dacă există  $\delta_0 > 0$  și  $T_0(\varepsilon)$  astfel ca  $\|\varphi\| < \delta_0, \|\psi\| < \delta_0, t \geq t_0 + T_0$  să implice  $|x(t; t_0, \varphi, \psi)| < \varepsilon$ , atunci soluția banală a sistemului (13) este uniform asimptotic stabilă.

TEOREMA 4.12. Considerăm sistemul

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[t, x(t+s), y(t+s)], \\ \dot{y}(t) &= A(t, y(t+s)) + g[t, x(t+s), y(t+s)],\end{aligned}\tag{14}$$

unde pentru  $\|\varphi\| < \alpha_0, \|\psi\| < \alpha_0$ , avem  $|f(t, \varphi, \psi)| \leq K \|\psi\|^\beta, \beta > 0, |g(t, \varphi, \psi)| \leq k \|\varphi\|, k$  suficient de mic, iar  $A(t, \varphi)$  este liniar. Presupunem că soluția banală a sistemului liniar

$$\dot{z}(t) = A(t, z(t+s))\tag{15}$$

este uniform asimptotic stabilă. Atunci soluția banală a sistemului (14) este uniform stabilă și în plus pentru orice soluție pentru care funcțiile inițiale sînt suficient de mici avem  $y(t) \rightarrow 0, x(t) \rightarrow l$  pentru  $t \rightarrow \infty$ .

Demonstrație. Fie  $V[t, \varphi]$  funcționala construită pentru sistemul (15) pe baza teoremei 4.4'. Ținînd seama de evaluarea impusă pentru  $g(t, \varphi)$ , deducem ca în demonstrația teoremei 4.6, evaluarea

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h+s; t, \varphi, \psi)] - V[t, \varphi, \psi]}{h} \leq -[1 - kM] \|\psi\|^2.$$

Notînd  $V^*(t) = V[t, y(t+s; t_0, \varphi, \psi)]$  se obține de aici, dacă  $\|\varphi\|, \|\psi\|$  sînt suficient de mici (atunci  $k$  e suficient de mic),

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leq -k_1 V^*(t).$$

De aici se deduce imediat

$$\|y(t+s; t_0, \varphi, \psi)\|^2 \leq V^*(t) \leq V^*(t_0) e^{-k_1(t-t_0)} \leq K_1 e^{-k_1(t-t_0)} \|\psi\|^2$$

Mai departe, din

$$x(t; t_0, \varphi, \psi) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f[u, x(u+s; t_0, \varphi, \psi), y(u+s; t_0, \varphi, \psi)] du$$

rezultă

$$|x(t; t_0, \varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| + \int_{t_0}^t K \sqrt{K_1^\beta} e^{-\frac{k_1\beta}{2}(u-t_0)} du \|\psi\|^\beta,$$

de unde rezultă imediat afirmația teoremei.

Definiția stabilității integrale pentru sistemele cu întârziere se poate formula la fel ca în cazul sistemelor de ecuații diferențiale ordinare. Fără modificări esențiale față de demonstrațiile date în capitolul I se obțin lemele și teoremele stabilite în capitolul I, § 8. Vom da aici numai formulările teoremelor.

TEOREMA 4.13. *Presupunem că există o funcțională  $V[t, \varphi]$  definită ca în teoremele precedente și cu proprietățile :*

1°  $V[t, \varphi] \geq a(\|\varphi\|)$ ,  $V[t, 0] \equiv 0$ ,  $a(r)$  continuă, monoton crescătoare pentru  $r > 0$ ,  $a(0) = 0$ ;

2°  $|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leq K\|\varphi_1 - \varphi_2\|$ ;

3°  $\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leq g(t) V[t, x(t+s; t_0, \varphi)],$

unde  $\int_0^\infty g(t) dt < \infty$ ,  $g(t) \geq 0$ .

Atunci soluția banală a sistemului (2) este integral stabilă.

CONSECINȚĂ. În condițiile din teorema 4.7, soluția banală a sistemului (9) este integral stabilă, dacă soluția banală a sistemului (10) este uniform stabilă.

TEOREMA 4.14. *Dacă funcționala  $V$  din teorema precedentă verifică în locul condiției 3° condiția*

3°  $\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leq -c(\|x(t+s; t_0, \varphi)\|),$

atunci soluția banală a sistemului (2) este asimptotic integral stabilă.

CONSECINȚĂ. Dacă soluția banală a sistemului (2) (cu  $f$  verificând condiția de tip Lipschitz) este uniform asimptotic stabilă, atunci ea este și



*asimptotic integral stabilă. În particular, în condițiile din teorema 4.7, dacă soluția banală a sistemului (10) este uniform asimptotic stabilă, soluția banală a sistemului (9) este asimptotic integral stabilă.*

### § 3. CONDIȚIA LUI PERRON LA SISTEMELE CU ÎNTÂRZIERE

Vom stabili acum o teoremă profundă de stabilitate relativă la sistemele liniare. Pentru sistemele de ecuații diferențiale ordinare teorema corespunzătoare a fost demonstrată pentru prima dată de O. Perron și reluată de R. Bellman. Generalizări puternice pentru ecuații diferențiale în spații Banach au fost date de J. L. Massera și J. L. Schäffer.

Considerăm sisteme liniare generale cu întârziere de forma

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^0 x_j(t+s) d_s \eta_{ij}(t,s) + f_i(t)$$

unde nucleele  $\eta_{ij}(t,s)$  verifică următoarele condiții :

- a)  $\eta_{ij}(t,s)$  sînt definite pentru  $t \geq 0$ ,  $-\infty < s < \infty$ , iar  $\eta_{ij}(t,s) \equiv 0$  pentru  $s \geq 0$  ;  
 b) există funcțiile  $\tau_{ij}(t) > 0$  și  $V_{ij}(t)$  mărginite pentru  $t \geq 0$  astfel ca

$$\eta_{ij}(t,s) \equiv \eta_{ij}(t, -\tau_{ij}(t)) \equiv 0 \text{ pentru } s \leq -\tau_{ij}(t)$$

$$\bigvee_{s=-\tau_{ij}(t)}^0 \eta_{ij}(t,s) \leq V_{ij}(t),$$

unde, ca de obicei,  $\bigvee_{s=\alpha}^{\beta} f(s)$  înseamnă variația totală a funcției  $f$  pe  $[\alpha, \beta]$ .

- c)  $\eta_{ij}(t,s)$  sînt continue în raport cu  $t$ , uniform în raport cu  $s$ .

Dacă funcțiile  $\eta_{ij}$  sînt funcții de salturi, se obțin sisteme liniare cu argument întîrziat de forma

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n a_{ij}^k(t) x_j(t - \tau_k(t)) + f_i(t).$$

Dacă funcțiile  $\eta_{ij}$  sînt absolut continue, se obțin sisteme de forma

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^0 a_{ij}(t,s) x_j(t+s) ds + f_i(t).$$

În cele ce urmează sistemul va fi scris sub forma matricială

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^0 x(t+s) d_s \eta(t,s) + f(t), \quad (16)$$

unde  $x$  este vector linie.

DEFINIȚIE. Vom spune că sistemul

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^0 x(t+s) d_s \eta(t,s) \quad (17)$$

satisfacă condiția lui Perron, dacă pentru orice funcție continuă  $f(t)$ , mărginită pe semiaxa  $t \geq 0$ , soluția sistemului (16) determinată de funcția inițială nulă pe  $t \leq 0$ , este mărginită pe semiaxa  $t \geq 0$ .

TEOREMA 4.15. Dacă sistemul (17) satisfacă condiția lui Perron, atunci soluția lui banală este uniform asimptotic stabilă.

Înainte de a trece la demonstrația acestei teoreme vom stabili o serie de fapte preliminare, dintre care unele cu interes în sine.

LEMA 1. Fie  $X(t, \sigma)$  o matrice ale cărei linii sînt soluții ale sistemului (17) verificînd condițiile  $X(t, \sigma) \equiv 0$  pentru  $t < \sigma$  și  $X(\sigma, \sigma) = E$ . Atunci orice soluție a sistemului (16) se scrie sub forma

$$x(t) = x(\sigma) X(t, \sigma) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s) d_s \int_{\sigma}^t \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha + \int_{\sigma}^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha. \quad (18)$$

*Demonstrație.* Considerăm sistemul de ecuații integrale

$$Y(\alpha, t) + \int_{\alpha}^t \eta(\beta, \alpha - \beta) Y(\beta, t) d\beta = E, \quad (19)$$

unde  $E$  este matricea unitate,  $\alpha \leq t$ .

Formăm aproximațiile succesive în mod obișnuit

$$Y_0(\alpha, t) = E, \quad Y_k(\alpha, t) = E - \int_{\alpha}^t \eta(\beta, \alpha - \beta) Y_{k-1}(\beta, t) d\beta.$$

Matricile  $Y_k(\alpha, t)$  au elementele funcții continue în raport cu  $t$  și cu variație mărginită în raport cu  $\alpha$ . Pentru  $t$  fixat și  $\alpha \leq \beta \leq t$ , funcția  $\eta(\beta, \alpha - \beta)$  rezultă mărginită și obținem imediat evaluarea

$$|Y_{k+1}(\alpha, t) - Y_k(\alpha, t)| \leq M^{k+1} \frac{(t - \alpha)^{k+1}}{(k + 1)!}.$$

Într-adevăr, pentru  $k = 0$  evaluarea rezultă din

$$|Y_1(\alpha, t) - E| \leq \int_{\alpha}^t |\eta(\beta, \alpha - \beta)| d\beta \leq M(t - \alpha)$$

și apoi, prin inducție,

$$\begin{aligned} |Y_{k+1}(\alpha, t) - Y_k(\alpha, t)| &\leq M \int_{\alpha}^t |Y_k(\beta, t) - Y_{k-1}(\beta, t)| d\beta \leq \\ &\leq \frac{M^{k+1}}{k!} \int_{\alpha}^t (t - \beta)^k d\beta = \frac{M^{k+1} (t - \alpha)^{k+1}}{(k + 1)!}. \end{aligned}$$

Din această evaluare rezultă convergența uniformă a aproximațiilor succesive și deci existența soluției sistemului (19). Cu evaluări de același fel se verifică și unicitatea soluției.

Din convergența uniformă a șirului rezultă că limita  $Y(\alpha, t)$  este continuă în raport cu  $t$  și cu variație mărginită în raport cu  $\alpha$ . Vom prelungi pe  $Y(\alpha, t)$  pentru  $\alpha > t$  punind  $Y(\alpha, t) \equiv 0$  pentru  $\alpha > t$ .

Fie acum  $x(t)$  o soluție oarecare a sistemului (16). Avem

$$\dot{x}(\alpha) = \int_{-\infty}^0 x(\alpha + s) d_s \eta(\alpha, s) + f(\alpha).$$

Înmulțind această relație cu  $Y(\alpha, t)$  și integrând în raport cu  $\alpha$  de la  $\sigma$  la  $t$ , obținem

$$\begin{aligned} \int_{\sigma}^t \dot{x}(\alpha) Y(\alpha, t) d\alpha &= \int_{\sigma}^t \left[ \int_{-\infty}^0 x(\alpha + s) d_s \eta(\alpha, s) \right] Y(\alpha, t) d\alpha + \\ &+ \int_{\sigma}^t f(\alpha) Y(\alpha, t) d\alpha. \end{aligned}$$

Integrând prin părți în primul membru și folosind în cel de-al doilea o formulă de permutare a ordinii de integrare, deducem

$$\begin{aligned} x(t) Y(t, t) - x(\sigma) Y(\sigma, t) - \int_{\sigma}^t x(\alpha) d_{\alpha} Y(\alpha, t) &= \\ = \int_{\sigma}^t \left[ \int_{-\infty}^{\alpha} x(s) d_s \eta(\alpha, s - \alpha) \right] Y(\alpha, t) d\alpha + \int_{\sigma}^t f(\alpha) Y(\alpha, t) d\alpha = \\ = \int_{-\infty}^{\sigma} x(s) d_s \int_{\sigma}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha + \\ + \int_{\sigma}^t x(s) d_s \int_s^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha + \int_{\sigma}^t f(\alpha) Y(\alpha, t) d\alpha. \end{aligned}$$

De aici rezultă

$$\begin{aligned} x(t) &= x(\sigma) Y(\sigma, t) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s) d_s \int_{\sigma}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha + \\ &+ \int_{\sigma}^t f(\alpha) Y(\alpha, t) d\alpha + \int_{\sigma}^t x(\alpha) d_{\alpha} \left[ Y(\alpha, t) + \int_{\alpha}^t \eta(\beta, \alpha - \beta) Y(\beta, t) d\beta \right]. \end{aligned}$$

Ținând seama că

$$Y(\alpha, t) + \int_{\alpha}^t \eta(\beta, \alpha - \beta) Y(\beta, t) d\beta = E,$$

ultima integrală din formula precedentă este nulă și obținem

$$\begin{aligned} x(t) &= x(\sigma) Y(\sigma, t) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s) d_s \int_{\sigma}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha + \\ &+ \int_{\sigma}^t f(\alpha) Y(\alpha, t) d\alpha. \end{aligned}$$

Dacă soluția  $x(t)$  este nulă pentru  $t < \sigma$  și dacă  $f \equiv 0$ , deducem

$$x(t) = x(\sigma) Y(\sigma, t).$$

Considerînd matricea  $X(t, \sigma)$  formată cu soluțiile nule pentru  $t < \sigma$  și  $X(\sigma, \sigma) = E$ , obținem  $X(t, \sigma) = Y(\sigma, t)$ . Cu aceasta formula (18) este complet demonstrată.

LEMA 2. Fie  $Y(\alpha, t)$  ca în lema 1. Dacă  $\int_0^t |Y(\alpha, t)| d\alpha < C$  pentru  $t \geq 0$ , atunci  $|Y(\alpha, t)| < M$ , pentru  $0 \leq \alpha \leq t$ .

*Demonstrație.* Arătăm mai întâi că există  $\delta_0$  astfel ca  $|\alpha' - \alpha''| < \delta_0$  să implice  $|Y(\alpha', t)| \geq \frac{1}{2} |Y(\alpha'', t)| - Ve^{\delta_0 V} C$ ,  $V > V_{ij}(t)$ .

Fie  $\alpha' < \alpha'' \leq t$ . Avem

$$\begin{aligned} X(t, \alpha') Y(t, t) - X(\alpha'', \alpha') Y(\alpha'', t) &= \int_{\alpha''}^t X(\alpha, \alpha') d_\alpha Y(\alpha, t) + \\ &+ \int_{\alpha''}^t \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} X(\alpha, \alpha') \right] Y(\alpha, t) d\alpha. \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned} \int_{\alpha''}^t \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} X(\alpha, \alpha') \right] Y(\alpha, t) d\alpha &= \int_{\alpha''}^t \left[ \int_{-\infty}^0 X(\alpha + s, \alpha') d_s \eta(\alpha, s) \right] Y(\alpha, t) d\alpha = \\ &= \int_{\alpha''}^t \left[ \int_{-\infty}^{\alpha} X(s, \alpha') d_s \eta(\alpha, s - \alpha) \right] Y(\alpha, t) d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha') d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha + \\ &+ \int_{\alpha''}^t X(s, \alpha') d_s \int_s^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha. \end{aligned}$$

De aici rezultă

$$\begin{aligned} X(t, \alpha') - X(\alpha'', \alpha') Y(\alpha'', t) &= \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha') d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha + \\ &+ \int_{\alpha''}^t X(s, \alpha') d_s \left[ Y(s, t) + \int_s^t \eta(\beta, s - \beta) Y(\beta, t) d\beta \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha') d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha, \end{aligned}$$

deci

$$X(t, \alpha') = X(\alpha'', \alpha') Y(\alpha'', t) + \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha') d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha.$$

Avem

$$X(t, \alpha') = Y(\alpha', t), \quad X(\alpha'', \alpha') = Y(\alpha', \alpha'').$$

Rezultă

$$Y(\alpha', t) = Y(\alpha', \alpha'') Y(\alpha'', t) + \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha') \, d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) \, d\alpha,$$

deci

$$\begin{aligned} Y(\alpha', t) - Y(\alpha'', t) &= [Y(\alpha', \alpha'') - E] Y(\alpha'', t) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha') \, d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) \, d\alpha. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} Y(\alpha', \alpha'') - E &= - \int_{\alpha'}^{\alpha''} \eta(\beta, \alpha' - \beta) Y(\beta, \alpha'') \, d\beta = \\ &= - \int_{\alpha'}^{\alpha''} \eta(\beta, \alpha' - \beta) [Y(\beta, \alpha'') - E] - \int_{\alpha'}^{\alpha''} \eta(\beta, \alpha' - \beta) \, d\beta. \end{aligned}$$

Dacă  $\alpha'' - \alpha' < \delta$ , de aici rezultă

$$|Y(\alpha', \alpha'') - E| \leq V \delta_0 + V \int_{\alpha'}^{\alpha''} |Y(\beta, \alpha'') - E| \, d\beta$$

deci

$$|Y(\alpha', \alpha'') - E| \leq V \delta_0 e^{V \delta_0}.$$

Mai departe

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha') \, d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) \, d\alpha = \\ &= \int_{\alpha'}^{\alpha''} X(s, \alpha') \, d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) \, d\alpha = \\ &= \int_{\alpha''}^t \left[ \int_{\alpha'}^{\alpha''} X(s, \alpha') \, d_s \eta(\alpha, s - \alpha) \right] Y(\alpha, t) \, d\alpha. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{\alpha''} X(s, \alpha') \, d_s \int_{\alpha''}^t \eta(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) \, d\alpha \right| \leq \\ &\leq \sup_{\alpha} \left| \int_{\alpha'}^{\alpha''} X(s, \alpha') \, d_s \eta(\alpha, s - \alpha) \right| \left| \int_{\alpha''}^t |Y(\alpha, t)| \, d\alpha \right| < \\ &< C \sup_{\alpha} \left| \int_{\alpha'}^{\alpha''} X(s, \alpha') \, d_s \eta(\alpha, s - \alpha) \right| \leq CV \sup_{\alpha' \leq s \leq \alpha''} |X(s, \alpha')| < CV e^{V \delta_0}. \end{aligned}$$

Am folosit pentru evaluarea lui  $|X(s, \alpha')|$  inegalitatea (3).

Din evaluările obținute deducem

$$|Y(\alpha', t) - Y(\alpha'', t)| \leq V\delta_0 e^{V\delta_0} |Y(\alpha'', t)| + CVe^{V\delta_0}.$$

Alegem pe  $\delta_0$  destul de mic pentru ca  $V\delta_0 e^{V\delta_0} < \frac{1}{2}$ . Atunci

$$|Y(\alpha', t) - Y(\alpha'', t)| < \frac{1}{2} |Y(\alpha'', t)| + CVe^{V\delta_0}.$$

și

$$|Y(\alpha', t)| \geq \frac{1}{2} |Y(\alpha'', t)| - CVe^{V\delta_0}.$$

Dacă  $\alpha'' < \alpha' \leq t$ , obținem

$$|Y(\alpha', t) - Y(\alpha'', t)| < \frac{1}{2} |Y(\alpha', t)| + CVe^{V\delta_0}.$$

De aici

$$|Y(\alpha'', t)| \leq |Y(\alpha'', t) - Y(\alpha', t)| + |Y(\alpha', t)| < \frac{3}{2} |Y(\alpha', t)| + CVe^{V\delta_0}.$$

deci

$$|Y(\alpha', t)| > \frac{2}{3} |Y(\alpha'', t)| - \frac{2}{3} CVe^{V\delta_0} > \frac{1}{2} |Y(\alpha'', t)| - CVe^{V\delta_0}.$$

Rezultă în definitiv în toate cazurile că dacă  $|\alpha' - \alpha''| < \delta_0$ , atunci

$$|Y(\alpha', t)| \geq \frac{1}{2} |Y(\alpha'', t)| - VCe^{\delta_0 V}.$$

Să presupunem acum că afirmația lemei nu ar fi adevărată. Atunci există  $\alpha_n$  și  $t_n$ , astfel ca  $0 \leq \alpha_n \leq t_n$  și  $|Y(\alpha_n, t_n)| \geq n$ . Din (19) rezultă că șirul  $\{t_n\}$  este nemărginit.

Într-adevăr, dacă  $t_n < T$ , din (19) deducem

$$|Y(\alpha, t_n)| \leq 1 + \int_{\alpha}^{t_n} |\eta(\beta, \alpha - \beta)| |Y(\beta, t_n)| d\beta \leq 1 + V \int_{\alpha}^{t_n} |Y(\beta, t_n)| d\beta.$$

deci

$$|Y(\alpha, t_n)| \leq e^{V(t_n - \alpha)} \leq e^{V(T - \alpha)} < e^{VT} \text{ pentru } \alpha \geq 0,$$

de unde se deduce că  $|Y(\alpha_n, t_n)| < e^{VT}$ , ceea ce contrazice felul cum au fost definite  $\alpha_n$  și  $t_n$ .

Dacă  $\{\alpha_n\}$  este un șir mărginit, avem

$$\begin{aligned} C > \int_0^{t_n} |Y(\alpha, t_n)| d\alpha > \int_{\alpha_n}^{\alpha_n + \delta_0} |Y(\alpha, t_n)| d\alpha > \frac{1}{2} \delta_0 |Y(\alpha_n, t_n)| - \\ & - \delta_0 e^{\delta_0 V} CV > \frac{1}{2} \delta_0 n - \delta_0 e^{\delta_0 V} CV, \end{aligned}$$

ceea ce este contradictoriu.

Dacă  $\{\alpha_n\}$  nu este mărginit, avem

$$C > \int_0^{t_n} |Y(\alpha, t_n)| d\alpha > \int_{\alpha_n - \delta_0}^{\alpha_n} |Y(\alpha, t_n)| d\alpha > \frac{1}{2} \delta_0 |Y(\alpha_n, t_n)| - \\ - \delta_0 e^{\delta_0 V} C V > \frac{1}{2} \delta_0 n - \delta_0 C V^{\delta_0 V}.$$

Din nou am ajuns la o contradicție. În acest fel lema este demonstrată.

LEMA 3. Dacă sistemul (17) satisface condiția lui Perron, atunci există  $C$  astfel ca  $\int_0^t |X(t, \alpha)| d\alpha < C$  pentru orice  $t > 0$ .

*Demonstrație.* Conform lemei 1 soluția sistemului (16) determinată de funcția inițială nulă pe semi-axa  $t \leq 0$  este dată de formula

$$x(t) = \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha.$$

Deoarece sistemul (16) satisface condiția lui Perron, rezultă că pentru orice funcție continuă, mărginită,  $f$ , funcția  $\int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha$  este mărginită.

Pentru  $t$  fixat, considerăm operatorul  $U(f)$  care aplică spațiul Banach al funcțiilor vectoriale continue  $f$ , mărginite pe semi-axa  $t \geq 0$ , în spațiul vectorilor numerici, definit de

$$U(f) = \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha.$$

Fie  $\{t_k\}$  șirul numerelor raționale pozitive,

$$U_k(f) = \int_0^{t_k} f(\alpha) X(t_k, \alpha) d\alpha.$$

Deoarece pentru  $\|f\| \leq c_1$  funcția  $\int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha$  este mărginită, rezultă că pentru orice  $f$  fixat cu  $\|f\| \leq c_1$  avem

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|U_k(f)\| < \infty.$$

Deoarece sfera  $\|f\| \leq c_1$  este în spațiul Banach considerat o mulțime de a doua categorie, putem aplica lema lui Banach-Steinhaus și deducem că există un număr  $M$  cu proprietatea că  $\|U_k(f)\| \leq M \|f\|$  pentru orice  $f$  din spațiu, deci

$$\left| \int_0^{t_k} f(\alpha) X(t_k, \alpha) d\alpha \right| \leq M \|f\|.$$

Fie acum  $t$  real oarecare; există un șir  $\{t_{n_k}\}$  de numere raționale a cărui limită este  $t$ . Din

$$\left| \int_0^{t_{n_k}} f(\alpha) X(t_{n_k}, \alpha) d\alpha \right| \leq M \|f\|,$$

rezultă, prin trecere la limită,

$$\left| \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha \right| \leq M \|f\|$$

pentru orice  $f$  din spațiu. Fie  $x_{ik}$  elementele matricii  $X(t, \alpha)$ ; pentru  $t$  fixat, considerăm vectorul  $f^k$  ale cărui componente  $f_i^k$  sînt egale cu  $\text{sign } x_{ik}$ . Atunci vectorul  $f^k X$  va avea componentele  $\sum_i x_{ik} \text{sign } x_{ik} = \sum_i |x_{ik}|$ .

Fie  $f^{k,n}$  un șir de vectori, cu elementele funcții continue, tinzînd către  $f^k$ . Pe baza teoremei lui Lebesgue de trecere la limită sub semnul de integrare, rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f^{k,n}(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha = \int_0^t f^k(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha.$$

Din

$$\left| \int_0^t f^{k,n}(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha \right| \leq M \|f^{k,n}\|$$

rezultă pentru  $n \rightarrow \infty$

$$\left| \int_0^t f^k(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha \right| \leq M_1,$$

deci

$$\int_0^t \sum_i |x_{ik}(t, \alpha)| d\alpha \leq M_1.$$

Deoarece această relație este adevărată pentru orice  $k$ , deducem că există o constantă  $C$  cu proprietatea că

$$\int_0^t |X(t, \alpha)| d\alpha < C$$

și lema este demonstrată.

*Demonstrația teoremei 4.15.* Pe baza formulei (18), dacă  $x(t; t_0, \varphi)$  este soluția generală a sistemului (16), putem scrie

$$x(t; t_0, \varphi) = \varphi(t_0) X(t, t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} \varphi(s) d_s \int_{t_0}^t \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha.$$

Din condiția lui Perron rezultă, pe baza lemei 3, că

$$\int_0^t |X(t, \alpha)| d\alpha < C$$

deci pentru orice  $t_0 \geq 0$ ,

$$\int_{t_0}^t |X(t, \alpha)| d\alpha < C.$$



Pe baza lemei 2 rezultă

$$|X(t, \alpha)| < M.$$

Deducem

$$|x(t; t_0, \varphi)| \leq M \|\varphi\| + V \|\varphi\| \int_{t_0}^t |X(t, \alpha)| d\alpha < (M + CV) \|\varphi\|,$$

deci soluția banală a sistemului (16) este uniform stabilă. Rămâne deci să demonstrăm că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, \varphi) = 0.$$

Pentru  $\sigma \geq t_0$  avem relația

$$x(t; t_0, \varphi) = x(\sigma; t_0, \varphi) X(t, \sigma) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s; t_0, \varphi) d_s \int_{\sigma}^t \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha.$$

Fie

$$\zeta(\sigma, s) = \int_{\sigma}^t \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha.$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t x(t; t_0, \varphi) d\sigma &= \int_{t_0}^t x(\sigma; t_0, \varphi) X(t, \sigma) d\sigma + \\ &+ \int_{t_0}^t d\sigma \left[ \int_{-\infty}^{\sigma} x(s; t_0, \varphi) d_s \zeta(\sigma, s) \right] = \int_{t_0}^t x(\sigma; t_0, \varphi) X(t, \sigma) d\sigma + \\ &+ \int_{-\infty}^{t_0} x(s; t_0, \varphi) d_s \int_{t_0}^t \zeta(\sigma, s) d\sigma + \int_{t_0}^t x(s; t_0, \varphi) d_s \int_s^t \zeta(\sigma, s) d\sigma = \\ &= \int_{t_0}^t x(\sigma; t_0, \varphi) X(t, \sigma) d\sigma + \int_{-\infty}^{t_0} \varphi(s) d_s \int_{t_0}^t \zeta(\sigma, s) d\sigma + \\ &+ \int_{t_0}^t x(s; t_0, \varphi) d_s \int_s^t \zeta(\sigma, s) d\sigma. \end{aligned}$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \zeta(\sigma, s) d\sigma &= \int_{t_0}^t d\sigma \int_{\sigma}^t \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha = \\ &= \int_{t_0}^t d\alpha \int_{t_0}^{\alpha} \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\sigma = \int_{t_0}^t (\alpha - t_0) \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha = \\ &= \int_{t_0}^t (\alpha - t_0) \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha, \\ \int_{-\infty}^{t_0} \varphi(s) d_s \int_{t_0}^t \zeta(\sigma, s) d\sigma &= \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \varphi(s) d_s \int_{t_0}^t \zeta(\sigma, s) d\sigma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi(s) d_s \int_s^t (\alpha - t_0) \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha = \\
&= \int_{t_0-\tau}^{t_0} \left[ \int_{t_0-\tau}^{\alpha} \varphi(s) d_s (\alpha - t_0) \eta(\alpha, s - \alpha) \right] X(t, \alpha) d\alpha + \\
&+ \int_{t_0}^t \left[ \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi(s) d_s (\alpha - t_0) \eta(\alpha, s - \alpha) \right] X(t, \alpha) d\alpha = \\
&= \int_{t_0-\tau}^{t_0} \left[ \int_{t_0-\tau}^{\alpha} \varphi(s) d_s (\alpha - t_0) \eta(\alpha, s - \alpha) \right] X(t, \alpha) d\alpha + \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi(s) d_s (\alpha - t_0) \eta(\alpha, s - \alpha) \right] X(t, \alpha) d\alpha
\end{aligned}$$

deoarece pentru  $\alpha \geq t_0 + \tau$  și  $s \leq t_0$  avem  $s - \alpha \leq -\tau$  și  $\eta(\alpha, s - \alpha) \equiv 0$ .

Din această formulă și din  $|X(t, \alpha)| < M$  rezultă

$$\left| \int_{-\infty}^{t_0} \varphi(s) d_s \int_{t_0}^t \zeta(\sigma, s) d\sigma \right| < M_1 \|\varphi\|.$$

Analog

$$\begin{aligned}
&\int_s^t \zeta(\sigma, s) d\sigma = \int_s^t d\sigma \int_{\sigma}^t \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha = \\
&= \int_s^t d\alpha \int_s^{\alpha} \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\sigma = \int_s^t (\alpha - s) \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha.
\end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^t x(s; t_0, \varphi) d_s \int_s^t \zeta(\sigma, s) d\sigma = \int_{t_0}^t x(s; t_0, \varphi) d_s \int_s^t (\alpha - s) \eta(\alpha, s - \\
&- \alpha) X(t, \alpha) d\alpha = \int_{t_0}^t \left[ \int_{t_0-\tau}^{\alpha} x(s; t_0, \varphi) d_s (\alpha - s) \eta(\alpha, s - \alpha) \right] X(t, \alpha) d\alpha = \\
&= \int_{t_0}^t \left[ \int_{\alpha-\tau}^{\alpha} x(s; t_0, \varphi) d_s (\alpha - s) \eta(\alpha, s - \alpha) \right] X(t, \alpha) d\alpha = \\
&= - \int_{t_0}^t \left[ \int_{-\tau}^0 x(\beta - \alpha, t_0, \varphi) d_{\beta} \beta \eta(\alpha, \beta) \right] X(t, \alpha) d\alpha.
\end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{t_0}^t \left[ \int_{-\tau}^0 x(\beta - \alpha, t_0, \varphi) d_{\beta} \beta \eta(\alpha, \beta) \right] X(t, \alpha) d\alpha \right| \leq \\
&\leq \sup_{\alpha} \left| \int_{-\tau}^0 x(\beta - \alpha, t_0, \varphi) d_{\beta} \beta \eta(\alpha, \beta) \right| \int_{t_0}^t |X(t, \alpha)| d\alpha \leq M_2 \|\varphi\| (1 + 2\tau V) C
\end{aligned}$$

deci

$$\left| \int_{t_0}^t x(s; t_0, \varphi) \, ds \int_s^t \zeta(\sigma, s) \, d\sigma \right| \leq M_3 \|\varphi\|.$$

Folosind aceste evaluări deducem

$$(t - t_0) |x(t; t_0, \varphi)| \leq M_2 \|\varphi\| C + M_1 \|\varphi\| + M_3 \|\varphi\| = M_4 \|\varphi\|$$

deci

$$|x(t; t_0, \varphi)| \leq \frac{M_4}{t - t_0} \|\varphi\|$$

ceea ce demonstrează că soluția banală a sistemului (16) este uniform asimptotic stabilă. Teorema este complet demonstrată. Să observăm în încheiere că semnificația acestei teoreme constă în caracterizarea stabilității sistemului prin felul în care răspunde la excitații exterioare. Acest punct de vedere este din ce în ce mai răspândit în teoria sistemelor de reglare automată.

#### § 4. O EVALUARE ÎN TEORIA STABILITĂȚII SISTEMELOR LINIARE CU ÎNTÎRZIERE

În multe probleme practice prezintă interes următoarea problemă  
Se consideră un sistem de forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau). \quad (20)$$

Dacă întârzierea  $\tau$  este mică, este firesc să presupunem că ea poate fi neglijată și să considerăm sistemul de ecuații diferențiale ordinare

$$\dot{y}(t) = [A(t) + B(t)]y(t). \quad (21)$$

Presupunem că soluția banală a sistemului (21) este uniform asimptotic stabilă. Ne putem aștepta ca pentru  $\tau$  suficient de mic să fie uniform asimptotic stabilă și soluția banală a sistemului (20). În cele ce urmează vom arăta că acest lucru este adevărat și vom obține și o evaluare a valorilor  $\tau$  pentru care stabilitatea asimptotică uniformă a soluției banale a sistemului (20) rezultă din cea relativă la sistemul (21).

Vom folosi o lemă relativă la inegalitățile diferențiale cu întârziere care prezintă și interes în sine.

Vom nota cu

$$D_- \varphi(t) = \lim_{h \rightarrow 0-} \inf \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}.$$

Fie  $f(t, u, v)$  definită și continuă pentru toți  $(u, v)$  și  $0 \leq t < \alpha$ , monoton crescătoare în raport cu  $v$ .

PROPOZIȚIA 1. Dacă  $D_- \varphi(t) < f[t, \varphi(t), \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \varphi(s)]$ ,  
 $D_- \psi(t) \geq f[t, \psi(t), \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \psi(s)]$  și  $\varphi(s) < \psi(s)$  pentru  $-\tau \leq s \leq 0$ , atunci  
 $\varphi(t) < \psi(t)$  pentru  $0 < t < \alpha$ .

*Demonstrație.* Fie  $\xi = \inf \{t; \varphi(t) \geq \psi(t)\}$ . Avem  $\xi > 0, \varphi(\xi) = \psi(\xi)$ .

Pentru  $-\tau \leq t < \xi$  rezultă  $\varphi(t) < \psi(t)$ , deci  $\sup_{t-\tau \leq s \leq t} \varphi(s) < \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \psi(s)$ .

Rezultă  $D_- \varphi(\xi) < f[\xi, \varphi(\xi), \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \varphi(s)] < f[\xi, \psi(\xi), \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \psi(s)] \leq D_- \psi(\xi)$ .

Din  $\varphi(t) < \psi(t)$  pentru  $t < \xi$  și  $\varphi(\xi) = \psi(\xi)$ , rezultă însă  $D_- \varphi(\xi) \geq D_- \psi(\xi)$  și propoziția este demonstrată.

PROPOZIȚIA 2. Dacă  $\omega'(t) \leq f[t, \omega(t), \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \omega(s)]$ , pentru  $t_0 \leq t < t_0 + \alpha$  și dacă  $y(t; t_0, \omega)$  este soluția ecuației

$$y'(t) = f[t, y(t), \sup_{t-\tau \leq s \leq t} y(s)]$$

care pe  $[t_0 - \tau, t_0]$  coincide cu  $\omega$ , atunci, presupunând această soluție prelungibilă pe  $[t_0, t_0 + \alpha)$ , rezultă  $\omega(t) \leq y(t; t_0, \omega)$  pentru  $t_0 \leq t < t_0 + \alpha$ .

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon_n$  un șir de numere pozitive tinzând monoton către zero,  $y_n$  soluția ecuației

$$y'(t) = f(t, y(t), \sup_{t-\tau \leq s \leq t} y(s)) + \varepsilon_n$$

care pe  $[t_0 - \tau, t_0]$  coincide cu  $\omega + \varepsilon_n$ . Pe baza propoziției precedente,  $y_{n+1}(t) < y_n(t)$  pe  $[t_0, t_0 + \alpha)$  și se vede ușor că  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y(t; t_0, \omega)$  (de fapt trebuie să subliniem că în cazul cînd nu este îndeplinită o condiție de unicitate,  $y(t; t_0, \omega)$  este soluția superioară definită de condițiile inițiale considerate). Pe baza propoziției 1 avem  $\omega(t) < y_n(t)$  pentru  $t \in [t_0, t_0 + \alpha)$  deci  $\omega(t) \leq y(t; t_0, \omega)$ .

LEMĂ. Dacă  $f'(t) \leq -\alpha f(t) + \beta \sup_{t-\tau \leq \sigma \leq t} f(\sigma)$  pentru  $t \geq t_0$  și dacă  $\alpha > \beta > 0$ , atunci există  $\gamma > 0$  și  $k > 0$  astfel încît  $f(t) \leq ke^{-\gamma(t-t_0)}$  pentru  $t \geq t_0$ .

*Demonstrație.* Pe baza propoziției 2 rezultă că  $f(t) \leq y(t)$ , unde  $y(t)$  este o soluție a ecuației

$$y'(t) = -\alpha y(t) + \beta \sup_{t-\tau \leq \sigma \leq t} y(\sigma) \quad (*)$$

care pe  $[t_0 - \tau, t_0]$  este mai mare decît  $f$ . Să observăm că  $y(t) = ke^{-\gamma(t-t_0)}$  este soluție a acestei ecuații dacă  $-\gamma = -\alpha + \beta e^{\gamma\tau}$ . Într-adevăr,

$$\sup_{t-\tau \leq \sigma \leq t} y(\sigma) = ke^{\gamma\tau} e^{-\gamma(t-t_0)}$$

și

$$y'(t) = -\gamma ke^{-\gamma(t-t_0)}.$$

Dacă  $\alpha > \beta$ , funcția  $\varphi(z) = -\alpha + \beta e^{z\tau} + z$  este negativă pentru  $z = 0$  și tinde la infinit cînd  $z \rightarrow \infty$ , deci există  $z = \gamma > 0$  pentru care funcția se anulează. Rezultă că dacă  $\alpha > \beta$ , există  $\gamma > 0$  astfel încît  $y(t) = ke^{-\gamma(t-t_0)}$

să fie soluție a ecuației (\*). Avem  $\inf_{t_0-\tau \leq t \leq t_0} y(t) = k$ , deci alegînd pe  $k > \sup_{t_0-\tau \leq t \leq t_0} f(t)$ , rezultă pe baza propoziției 2 că  $f(t) \leq ke^{-\gamma(t-t_0)}$  și lema e demonstrată.

Presupunînd că soluția banală a sistemului (21) este uniform asimptotic stabilă, există o formă pătratică  $(V(t) y, y)$  a cărei derivată în virtutea sistemului (21) este  $-(y, y)$ . Fie  $x(t)$  o soluție oarecare a sistemului (20). Calculăm

$$\frac{d}{dt} (V(t) x(t), x(t)).$$

Avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (V(t) x(t), x(t)) &= \left( \frac{dV}{dt} x(t), x(t) \right) + 2 \left( V(t) \frac{dx(t)}{dt}, x(t) \right) = \\ &= \left( \frac{dV}{dt} x(t), x(t) \right) + 2 (V(t) (A(t) x(t) + B(t) x(t-\tau)), x(t)) = \\ &= \left( \frac{dV}{dt} x(t), x(t) \right) + 2 (V(t) (A(t) + B(t)) x(t), x(t)) + \\ &+ 2 (V(t) B(t) (x(t-\tau) - x(t)), x(t)) = - (x(t), x(t)) + \\ &+ 2 (V(t) B(t) \int_{t-\tau}^t \frac{dx(u)}{du} du, x(t)) = - (x(t), x(t)) + \\ &+ 2 (V(t) B(t) \int_{t-\tau}^t [A(u) x(u) + B(u) x(u-\tau)] du, x(t)). \end{aligned}$$

Fie

$$L_1 = \sup_t |A(t)|, L_2 = \sup_t |B(t)|, L_3 = \sup_t |V(t) B(t)|.$$

Deducem

$$\frac{d}{dt} (V(t) x(t), x(t)) \leq -|x(t)|^2 + 2\tau L_3 (L_1 + L_2) \sup_{t-2\tau \leq u \leq t} |x(u)| |x(t)|.$$

Fie  $\Lambda$  marginea superioară a celei mai mari valori proprii a matricii  $V$ ,  $\lambda$  marginea inferioară a celei mai mici valori proprii a matricii  $V$ . Avem

$$\lambda |x(t)|^2 \leq (V(t) x(t), x(t)) \leq \Lambda |x(t)|^2, \lambda > 0.$$

Să notăm

$$f^2(t) = (V(t) x(t), x(t)).$$

Din

$$\lambda |x(t)|^2 \leq f^2(t) \leq \Lambda |x(t)|^2$$

rezultă

$$|\sqrt{\lambda}|x(t)| \leq f(t) \leq |\sqrt{\Lambda}|x(t)|$$

deci

$$\sup_{t-2\tau \leq s \leq t} |x(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sup_{t-2\tau \leq s \leq t} f(s), |x(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f(t),$$

$$-|x(t)|^2 \leq -\frac{1}{\Lambda} f^2(t).$$

Putem deci scrie

$$\frac{d}{dt} f^2(t) \leq -\frac{1}{\Lambda} f^2(t) + 2\tau L_3(L_1 + L_2) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sup_{t-2\tau \leq s \leq t} f(s) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f(t)$$

și împărțind cu  $2f(t)$ :

$$\frac{df(t)}{dt} \leq -\frac{1}{2\Lambda} + \frac{\tau L_3(L_1 + L_2)}{\lambda} \sup_{t-2\tau \leq s \leq t} f(s).$$

Putem aplica lema, luând  $\alpha = \frac{1}{2\Lambda}$ ,  $\beta = \frac{\tau L_3(L_1 + L_2)}{\lambda}$ .

Condiția  $\alpha > \beta$  conduce la

$$\frac{\tau L_3(L_1 + L_2)}{\lambda} < \frac{1}{2\Lambda},$$

deci

$$\tau < \frac{\lambda}{\Lambda L_3(L_1 + L_2)}.$$

Rezultă că dacă

$$\tau < \frac{\lambda}{\Lambda L_3(L_1 + L_2)},$$

atunci există  $\gamma > 0$  și  $k > 0$  astfel încât  $f(t) \leq ke^{-\gamma(t-t_0)}$  pentru  $t > t_0$  deci

$|x(t)| \leq \frac{k}{\sqrt{\lambda}} e^{-\gamma(t-t_0)}$  pentru  $t \geq t_0$ , ceea ce arată că soluția banală a sis-

temului (20) este uniform asimptotic stabilă. Să observăm că presupunând derivabilitatea matricilor  $A$  și  $B$  am fi putut continua calculele punând în evidență și termeni de gradul al doilea în  $\tau$ , ceea ce ar fi condus la evaluări mai bune.

Reluăm acum aceeași problemă fără a mai folosi funcția Liapunov. Să considerăm sistemul

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^k B_i(t)x(t - \mu\tau_i) \quad (20')$$

și sistemul obținut pentru  $\mu = 0$

$$\dot{x}(t) = \left[ A(t) + \sum_{i=1}^k B_i(t) \right] x(t). \quad (21')$$

Presupunem că soluția banală a sistemului (21') este uniform asimptotic stabilă. Dacă  $U(t, s)$  este o matrice fundamentală de soluții a sistemului (21'), avem deci  $|U(t, s)| \leq K e^{-\alpha(t-s)}$ . Fie  $x(t)$  o soluție oarecare a sistemului (20'). Avem

$$x(t) = U(t, 0)x(0) + \sum_{i=1}^k \int_0^t U(t, s) B_i(s) [x(s - \mu\tau_i) - x(s)] ds.$$

Fie  $\tau = \max_i \tau_i$ . Pentru  $t > 2\mu\tau$  vom scrie

$$\begin{aligned} x(t) = U(t, 0)x(0) + \sum_{i=1}^k \int_0^{2\mu\tau} U(t, s) B_i(s) [x(s - \mu\tau_i) - x(s)] ds + \\ + \sum_{i=1}^k \int_{2\mu\tau}^t U(t, s) B_i(s) [x(s - \mu\tau_i) - x(s)] ds. \end{aligned}$$

Pe baza inegalității (3) avem pentru  $0 \leq s \leq 2\mu\tau$  evaluarea

$$|x(s)| \leq e^{\left(\sum_{i=0}^k K_i\right) 2\mu\tau} \|\varphi\|,$$

$\varphi$  fiind funcția inițială a soluției  $x$ , dată pe  $[-\mu\tau, 0]$ . Această evaluare este evident valabilă și pentru  $s \leq 0$ . Am notat

$$K_0 = \sup_i |A(t)|, \quad K_i = \sup_i |B_i(t)|, \quad i = 1, \dots, k.$$

Rezultă că pentru  $0 \leq s \leq 2\mu\tau$  avem în orice caz

$$|x(s - \mu\tau_i) - x(s)| \leq 2e^{\left(\sum_{i=0}^k K_i\right) 2\mu\tau} \|\varphi\|.$$

Pentru  $s \geq 2\mu\tau$  putem scrie

$$x(s - \mu\tau_i) - x(s) = \int_s^{s - \mu\tau_i} \dot{x}(\sigma) d\sigma = \int_s^{s - \mu\tau_i} \left[ A(\sigma)x(\sigma) + \sum_{j=1}^k B_j(\sigma)x(\sigma - \mu\tau_j) \right] d\sigma$$

deci

$$|x(s - \mu\tau_i) - x(s)| \leq \mu\tau_i \sum_{j=0}^k K_j \sup_{s - 2\mu\tau \leq \sigma \leq s} |x(\sigma)|.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} |x(t)| \leq K e^{-\alpha t} \|\varphi\| + \sum_{i=1}^k \int_0^{2\mu\tau} K e^{-\alpha(t-s)} K_i 2e^{\left(\sum_{i=0}^k K_i\right) 2\mu\tau} \|\varphi\| ds + \\ + \sum_{i=1}^k \int_{2\mu\tau}^t K e^{-\alpha(t-s)} K_i \mu\tau_i \sum_{j=0}^k K_j \sup_{s - 2\mu\tau \leq \sigma \leq s} |x(\sigma)| ds = \end{aligned}$$

$$= Ke^{-\alpha t} \|\varphi\| + 4K \left( \sum_{i=1}^k K_i \right) e^{\left( \sum_{i=0}^k K_i \right) 2\mu\tau} e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha} (e^{2\alpha\mu\tau} - 1) \|\varphi\| + \\ + K \sum_{i=1}^k \tau_i K_i \sum_{j=0}^k K_j \mu \int_{2\mu\tau}^t e^{-\alpha(t-s)} \sup_{s-2\mu\tau \leq \sigma \leq s} |x(\sigma)| ds.$$

Notăm

$$L = K \|\varphi\| \left( 1 + \frac{4}{\alpha} (e^{2\alpha\mu\tau} - 1) \right) \left( \sum_{i=1}^k K_i \right) e^{2\mu\tau \sum_{i=0}^k K_i} \\ M = K \sum_{i=1}^k \tau_i K_i \sum_{j=0}^k K_j \mu.$$

Avem evaluarea

$$|x(t)| \leq Le^{-\alpha t} + M \int_{2\mu\tau}^t e^{-\alpha(t-s)} \sup_{s-2\mu\tau \leq \sigma \leq s} |x(\sigma)| ds.$$

Fie

$$v(t) = e^{-\alpha t} \left[ L + M \int_{2\mu\tau}^t e^{\alpha s} \sup_{s-2\mu\tau \leq \sigma \leq s} |x(\sigma)| ds \right].$$

Avem

$$v'(t) = -\alpha e^{-\alpha t} \left[ L + M \int_{2\mu\tau}^t e^{\alpha s} \sup_{s-2\mu\tau \leq \sigma \leq s} |x(\sigma)| ds \right] + \\ + e^{-\alpha t} M e^{\alpha t} \sup_{t-2\mu\tau \leq \sigma \leq t} |x(\sigma)| = -\alpha v(t) + M \sup_{t-2\mu\tau \leq \sigma \leq t} |x(\sigma)|.$$

Dar

$$|x(t)| \leq v(t)$$

deci

$$\sup_{t-2\mu\tau \leq \sigma \leq t} |x(\sigma)| \leq \sup_{t-2\mu\tau \leq \sigma \leq t} v(\sigma).$$

Rezultă

$$v'(t) \leq -\alpha v(t) + M \sup_{t-2\mu\tau \leq \sigma \leq t} v(\sigma).$$

Dacă  $M < \alpha$ , rezultă pe baza lemei că există constante  $N$  și  $\gamma$  astfel ca

$$v(t) \leq Ne^{-\gamma(t-t_0)},$$

deci o inegalitate analogă are loc și pentru  $|x(t)|$ . Prin urmare, soluția banală a sistemului (20') rezultă exponențial stabilă cu condiția ca  $M < \alpha$ . Această condiție conduce la

$$\mu < \frac{\alpha}{K \sum_{i=1}^k \tau_i K_i \sum_{j=0}^k K_j},$$



## § 5. STABILITATEA UNOR SISTEME DE REGLARE CU ÎNTÎRZIERE

În cele ce urmează vom arăta în ce fel, folosind metoda lui V. M. Popov, se pot obține condiții de stabilitate asimptotică în mare pentru sisteme neliniare cu întârziere, care intervin în teoria sistemelor de reglare automată.

Fie sistemul

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau) + lf[\sigma(t - \tau)], \quad \sigma = (c, x).$$

Aici  $A$ ,  $B$ , sînt matrici constante,  $l$  un vector constant.

Vom presupune că ecuația

$$\det(A + e^{-\lambda\tau}B - \lambda E) = 0$$

are rădăcinile în semiplanul  $\operatorname{Re} \lambda \leq -\alpha < 0$ . Vom presupune de asemenea că

$$h_1 \sigma^2 \leq \sigma f(\sigma) \leq h_2 \sigma^2, \text{ cu } h_2 < k.$$

Fie  $x(t)$  o soluție oarecare a sistemului și  $u(t)$  soluția sistemului

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + Bu(t - \tau) + l\psi(t - \tau),$$

unde  $\psi(t) = f[\sigma(t)]$  pentru  $-\tau \leq t \leq 0$ ,  $\psi(t) \equiv 0$  pentru  $t > 0$ , care verifică aceleași condiții inițiale ca și  $x(t)$  pe  $[-\tau, 0]$ . Fie

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } -\tau \leq t < 0, \\ f[\sigma(t)] & \text{pentru } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{pentru } T < t. \end{cases}$$

Notăm cu  $w(t)$  soluția sistemului liniar neomogen

$$\frac{dw}{dt} = Aw(t) + Bw(t - \tau) + lf_T(t - \tau)$$

care verifică condiții inițiale nule.

Avem

$$w(t) = x(t) - u(t) \text{ pentru } -\tau \leq t \leq T + \tau,$$

căci condițiile inițiale sînt verificate și diferența  $x(t) - u(t)$  satisface același sistem ca și  $w(t)$ .

Fie

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \int_0^T \left[ (c, w(t)) - \frac{1}{k} f_T(t) + q\left(c, \frac{dw}{dt}\right) \right] f_T(t) dt = \\ &= \int_0^\infty \left[ (c, w(t)) - \frac{1}{k} f_T(t) + q\left(c, \frac{dw}{dt}\right) \right] f_T(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left\{ (c, \tilde{w}) - \frac{1}{k} \tilde{f}_T + q(c, i\omega \tilde{w}) \right\} \tilde{f}_T^* d\omega. \end{aligned}$$

Deoarece  $w$  verifică pentru  $t > T$  sistemul omogen, rezultă că  $w$  și  $\frac{dw}{dt}$  descresc exponențial, deci putem aplica formula din teoria transformatei Fourier. Am notat cu  $\tilde{w}$  respectiv  $\tilde{f}_T$  transformatele Fourier ale lui  $w$  respectiv  $f$ . Din sistemul de ecuații pentru  $w$  rezultă, aplicînd transformata Fourier,

$$i \omega \tilde{w} = A \tilde{w} + e^{-i\omega\tau} B \tilde{w} + l f_T e^{-i\omega\tau}$$

de unde se deduce

$$\tilde{w} = -(A + e^{-i\omega\tau} B - i \omega E)^{-1} l e^{-i\omega\tau} \tilde{f}_T.$$

Inversa matricii  $(A + e^{-i\omega\tau} B - i \omega E)^{-1}$  există deoarece am presupus că spectrul ei se află în semiplanul  $\operatorname{Re} z \leq -\alpha < 0$ .

Notăm  $M = e^{-i\omega\tau} (A + e^{-i\omega\tau} B - i \omega E)^{-1} l$  și  $\mathcal{Q} = (c, M)$ . Avem  $\tilde{w} = -M \tilde{f}_T$  și deci

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left\{ - (c, M) \tilde{f}_T - \frac{1}{k} \tilde{f}_T - q(c, M) i \omega \tilde{f}_T \right\} \tilde{f}_T^* d\omega = \\ &= - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{k} + (1 + i \omega q) \mathcal{Q} \right\} |\tilde{f}_T|^2 d\omega \end{aligned}$$

Presupunînd  $\frac{1}{k} + \operatorname{Re} (1 + i \omega q) \mathcal{Q} > 0$ , obținem  $\chi(T) \leq 0$ . Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \int_0^T \left[ (c, x(t)) - \frac{1}{k} f[\sigma(t)] + q \left( c, \frac{dx(t)}{dt} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (c, u(t)) - q \left( c, \frac{du(t)}{dt} \right) \right] f[\sigma(t)] dt. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left\{ \sigma(t) - \frac{1}{k} f[\sigma(t)] + q \frac{d\sigma(t)}{dt} \right\} f[\sigma(t)] dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left\{ (c, u(t)) + q \left( c, \frac{du(t)}{dt} \right) \right\} f[\sigma(t)] dt. \end{aligned}$$

Dar

$$f(\sigma) \left( \sigma - \frac{1}{k} f(\sigma) \right) \geq \frac{k - h_2}{k} h_1 \sigma^2 = h_3 \sigma^2.$$

Rezultă

$$h_3 \int_0^T \sigma^2(t) dt + q \int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} f(\sigma) d\sigma \leq \int_0^T \left\{ (c, u(t)) + q \left( c, \frac{du(t)}{dt} \right) \right\} f[\sigma(t)] dt.$$

Notînd  $F(\sigma) = \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma$ , obținem

$$h_3 \int_0^T \sigma^2(t) dt + qF[\sigma(T)] \leq qF[\sigma(0)] + \\ + \int_0^T \left\{ (c, u(t)) + q \left( c, \frac{du(t)}{dt} \right) \right\} f[\sigma(t)] dt.$$

Avem

$$F[\sigma(T)] > \frac{h_1}{2} \sigma^2(T),$$

deci putem scrie inegalitatea

$$q \frac{h_1}{2} \sigma^2(T) + h_3 \int_0^T \sigma^2(t) dt \leq qF[\sigma(0)] + \\ + \int_0^T \left\{ (c, u(t)) + q \left( c, \frac{du(t)}{dt} \right) \right\} f[\sigma(t)] dt.$$

Dacă  $\varphi$  este funcția inițială a soluției  $x(t)$ , avem (vezi anexa care conține rezultatele lui N. N. Krasovski)

$$|u(t)| \leq \beta e^{-\alpha t} \|\varphi\|, \quad \left| \frac{du}{dt} \right| \leq \gamma e^{-\alpha t} \|\varphi\|.$$

Din  $\sigma f(\sigma) \leq h_2 \sigma^2$  rezultă  $|f(\sigma)| \leq h_2 |\sigma|$ , deci

$$\left| \int_0^T \left\{ (c, u(t)) + q \left( c, \frac{du(t)}{dt} \right) \right\} f[\sigma(t)] dt \right| \leq L_1 \sup_{0 \leq t \leq T} |\sigma(t)| \|\varphi\| \int_0^T e^{-\alpha t} dt.$$

Ținînd seama de aceasta obținem în definitiv

$$\frac{qh_1}{2} \sigma^2(T) + h_3 \int_0^T \sigma^2(t) dt \leq qF[\sigma(0)] + L_2 \|\varphi\| \sup_{0 \leq t \leq T} |\sigma(t)|.$$

Din inegalitatea

$$\frac{qh_1}{2} \sigma^2(T) \leq qF[\sigma(0)] + L_2 \|\varphi\| \sup_{0 \leq t \leq T} |\sigma(t)|$$

deducem la fel ca în capitolul II că

$$|\sigma(t)| \leq a_1 (\|\varphi\|)$$

și ținînd seama de formula variației constantelor deducem și

$$|x(t)| \leq a_2 (\|\varphi\|).$$

De aici rezultă că  $\left| \frac{d\sigma}{dt} \right| \leq a_3 (\|\varphi\|)$  și cu aceleași raționamente ca în

capitolul II rezultă din  $\int_0^T \sigma^2(t) dt \leq C$  faptul că  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$ .

Ținând seama din nou de formula variației constantelor deducem că  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  și este demonstrată următoarea :

TEOREMA 4.16. *Dacă ecuația*

$$\det (A + e^{-\lambda \tau} B - \lambda E) = 0$$

*are rădăcinile în semiplanul  $\operatorname{Re} \lambda \leq -\alpha < 0$  și dacă există  $q > 0$  astfel încât*

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re} (1 + i \omega q) e^{-i \omega \tau} (c, (A + e^{-i \omega \tau} B - i \omega E)^{-1} l) > 0,$$

*atunci oricare ar fi funcția  $f$  cu proprietatea că există  $h_1$  și  $h_2 < k$  astfel ca  $h_1 \sigma^2 \leq \sigma f(\sigma) \leq h_2 \sigma^2$ , soluția banală a sistemului este asimptotic stabilă în mare.*

## § 6. SISTEME LINIARE PERIODICE CU ÎNTÎRZIERE

Trecem acum la studiul sistemelor liniare periodice cu întârziere, refăcând în acest cadru general rezultatele obținute în teoria oscilațiilor liniare.

Considerăm sistemul (16) presupunând în plus că  $\eta(t, s)$  și  $f(t)$  sînt periodice în  $t$  cu perioada  $\omega > \tau$ . Fie  $x(t, \varphi)$  soluția sistemului (16) definită pentru  $t \geq -\tau$  și care pe  $[-\tau, 0]$  coincide cu  $\varphi$ . Din cauza periodicității matricii  $\eta$  și a vectorului  $f$  rezultă că  $x(t + \omega, \varphi)$  este o soluție a sistemului (16), definită pentru  $t + \omega \geq -\tau$ , deci pentru  $t \geq -\omega - \tau$ . Dacă pentru  $-\tau \leq t \leq 0$  această soluție coincide cu  $\varphi$ , atunci, pe baza teoremei de unicitate, va rezulta  $x(t + \omega, \varphi) \equiv x(t, \varphi)$  pentru toți  $t \geq 0$ . Condiția ca soluția să fie periodică se scrie deci  $x(\omega + s, \varphi) = \varphi(s)$  pentru  $s \in [\tau, 0]$ . Fie  $V$  operatorul definit de relația  $V\varphi = x(\omega, +s, \varphi)$ . Soluția determinată de funcția inițială  $\varphi$  este periodică de perioadă  $\omega$  dacă și numai dacă  $V\varphi = \varphi$ . Fie  $z(t, \varphi)$  soluția sistemului omogen (17), definită pentru  $t \geq -\tau$  și care pe  $[-\tau, 0]$  coincide cu  $\varphi$ . Din formula (18) rezultă

$$x(t, \varphi) = z(t, \varphi) + \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha.$$

Notînd cu  $U$  operatorul definit de relația  $U\varphi = z(\omega + s, \varphi)$ , rezultă că putem scrie

$$V\varphi = U\varphi + \int_0^{\omega+s} f(\alpha) X(\omega + s, \alpha) d\alpha.$$

Condiția ca soluția să fie periodică devine

$$\varphi = U\varphi + \int_0^{\omega+s} f(\alpha) X(\omega + s, \alpha) d\alpha$$

sau

$$(I - U)\varphi = \int_0^{\omega+s} f(\alpha) X(\omega + s, \alpha) d\alpha$$

unde  $I$  este operatorul identic.

Operatorul  $U$  este complet continuu (compact) în spațiul Banach al funcțiilor vectoriale continue pe  $[-\tau, 0]$  cu  $\|\varphi\| = \sup |\varphi|$ . Pentru aceasta trebuie să verificăm că dacă  $\|\varphi\| \leq M$ , mulțimea  $\{U\varphi\}$  e compactă; vom arăta că această mulțime verifică cererile criteriului de compacitate al lui Arzela. Într-adevăr, din (18) rezultă că

$$U\varphi = \varphi(0)X(\omega + s, 0) + \int_{-\tau}^0 \varphi(\beta) d\beta \int_0^{\omega+s} \eta(\alpha, \beta - \alpha)X(\omega + s, \alpha) d\alpha$$

și din  $\|\varphi\| \leq M$  se obține  $\|U\varphi\| \leq M'$ .

Deoarece  $\omega > \tau$ , rezultă  $\omega + s > 0$ , deci  $z(\omega + s, \varphi)$  sînt derivabile și

$$\frac{d}{ds} z(\omega + s, \varphi) = \int_{-\tau}^0 z(\omega + s + \sigma, \varphi) d\sigma \eta(s, \sigma),$$

de unde rezultă că

$$\left| \frac{d}{ds} z(\omega + s, \varphi) \right| \leq M'',$$

deci funcțiile  $\{U\varphi\}$  sînt egal mărginite și egal continue.

Sistemul (17) va admite o soluție periodică de perioadă  $\omega$  pentru orice  $f$  dacă și numai dacă operatorul  $I - U$  e inversabil; operatorul  $U$  fiind compact,  $I - U$  e inversabil dacă și numai dacă ecuația  $U\varphi = \varphi$  nu are alte soluții decît pe cea nulă. Dar ecuația  $U\varphi = \varphi$  determină funcțiile inițiale ale soluțiilor periodice ale sistemului (17). Am stabilit astfel următoarea teoremă.

**TEOREMA 4.17.** *Condiția necesară și suficientă ca sistemul (16) să admită soluții periodice, oricare ar fi funcția continuă periodică  $f$ , de perioadă  $\omega$ , este ca sistemul (17) să nu admită alte soluții periodice de perioadă  $\omega$  decît cea banală.*

**TEOREMA 4.18.** *Dacă sistemul (16) admite o soluție mărginită, atunci el admite soluții periodice. Cu alte cuvinte, dacă sistemul (16) nu admite soluții periodice, toate soluțiile lui sînt nemărginite.*

*Demonstrație.* Fie

$$\psi = \int_0^{\omega+s} f(\alpha)X(\omega + s, \alpha) d\alpha.$$

Am văzut că funcțiile inițiale ale soluțiilor periodice ale sistemului (16) verifică ecuația  $(I - U)\varphi = \psi$ . Dacă sistemul (16) nu admite soluții periodice,  $\psi$  nu aparține spațiului  $(I - U)\mathfrak{X}$ . Dar operatorul  $U$  e compact și deci  $(I - U)\mathfrak{X}$  e închis. Rezultă că distanța de la  $\psi$  la  $(I - U)\mathfrak{X}$  nu e nulă și atunci există o funcțională liniară  $y$ , nulă pe  $(I - U)\mathfrak{X}$  și egală cu 1 pe  $\psi$ . Pentru orice  $\varphi \in \mathfrak{X}$  avem

$$y[(I - U)\varphi] = 0,$$

deci

$$y[\varphi - U\varphi] = y[\varphi] - y[U\varphi] = 0,$$

deci

$$y[\varphi] = y[U\varphi].$$

Din relația

$$y(\omega + s, \varphi) = U\varphi + \psi$$

rezultă

$$y[x(\omega + s, \varphi)] = y[U\varphi] + y[\psi] = y[\varphi] + 1.$$

Avem relația

$$x(t + n\omega, \varphi) = z(t, x(n\omega + s, \varphi)) + \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha.$$

Într-adevăr, în membrul al doilea avem soluția sistemului (16) care pe  $[-\tau, 0]$  coincide cu  $x(n\omega + s, \varphi)$ ; dar aceasta este tocmai soluția  $x(t + n\omega, \varphi)$ . Din relația scrisă deducem

$$x[(n+1)\omega + s, \varphi] = Ux(n\omega + s, \varphi) + \psi$$

Din această relație obținem prin inducție

$$y[x(n\omega + s, \varphi)] = y[\varphi] + n. \quad (22)$$

Relația (22) este adevărată pentru  $n = 1$ . Mai departe

$$\begin{aligned} y[x((n+1)\omega + s, \varphi)] &= y[Ux(n\omega + s, \varphi)] + \\ &+ y[\psi] = y[x(n\omega + s, \varphi)] + 1 = y[\varphi] + n + 1 \end{aligned}$$

și relația (22) este stabilită pentru toți  $n$ .

Din această relație rezultă că  $y[x(n\omega + s, \varphi)]$  este un șir nemărginit, deci  $x(t, \varphi)$  nu poate fi mărginită (funcționala  $y$  e liniară și continuă, deci mărginită). Teorema e demonstrată.

## § 7. SISTEME PERIODICE CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT, CAZUL CRITIC

Trecînd la studiul cazului cînd sistemul (17) admite soluții nenule, periodice de perioadă  $\omega$ , vom examina separat cazul particular al sistemelor cu argument întîrziat de forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau) + f(t), \quad (23)$$

unde  $A$  și  $B$  și  $f$  sînt continue și periodice de perioadă  $\omega > \tau$ .

Sistemul omogen corespunzător se scrie

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau). \quad (24)$$

Sistemul adjunct sistemului (24) va fi

$$\dot{y}(t) = -y(t)A(t) - y(t + \tau)B(t + \tau). \quad (25)$$

**TEOREMA 4.19.** *Dacă sistemul (23) admite soluții periodice de perioadă  $\omega$ , atunci*

$$\int_0^{\omega} y(t) f(t) dt = 0$$

*pentru toate soluțiile periodice  $y(t)$  de perioadă  $\omega$  ale sistemului (25).*

*Demonstrație.* Fie  $x(t)$  o soluție a sistemului (23) definită pentru  $t \geq -\tau$  și  $y(t)$  o soluție a sistemului (25) definită pentru  $t \leq \omega + \tau$ . Pentru  $0 \leq t \leq \omega$  definim  $(y, x)$  prin formula

$$\begin{aligned} (y, x) &= y(t) x(t) + \int_0^{\tau} y(t + \eta) B(t + \eta) x(t + \eta - \tau) d\eta = \\ &= y(t) x(t) + \int_t^{t+\tau} y(\xi) B(\xi) x(\xi - \tau) d\xi. \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (y, x) &= \dot{y}(t) x(t) + y(t) \dot{x}(t) + \frac{d}{dt} \int_t^{t+\tau} y(\xi) B(\xi) x(\xi - \tau) d\xi = \\ &= -y(t) A(t) x(t) - y(t + \tau) B(t + \tau) x(t) + y(t) A(t) x(t) + \\ &\quad + y(t) B(t) x(t - \tau) + y(t) f(t) + y(t + \tau) B(t + \tau) x(t) - \\ &\quad - y(t) B(t) x(t - \tau) = y(t) f(t). \end{aligned}$$

Dacă  $x(t)$  și  $y(t)$  sînt periodice de perioadă  $\omega$ , avem

$$(y, x)_{\omega} = (y, x)_0,$$

deci

$$\int_0^{\omega} \frac{d}{dt} (y, x) dt = 0.$$

Aceasta înseamnă că

$$\int_0^{\omega} y(t) f(t) dt = 0$$

și teorema e demonstrată.

Pentru a merge mai departe începem prin a stabili o formulă analogă cu (18) pentru sistemul (25). Fie  $y(t)$  o soluție a sistemului (25) definită pentru  $t \leq \sigma$  prin condiții inițiale date pe  $[\sigma, \sigma + \tau]$ ,  $X(\alpha, t)$  matricea formată din soluțiile sistemului (24) cu  $\dot{X}(t, t) = E$ ,  $X(\alpha, t) \equiv 0$  pentru  $\alpha < t$  (variabila este  $\alpha$ , iar  $t$  e fixat). Avem

$$\int_t^{\sigma} \dot{y}(s) X(s, t) ds = - \int_t^{\sigma} y(s) A(s) X(s, t) ds - \int_t^{\sigma} y(s + \tau) B(s + \tau) X(s, t) ds.$$

De aici

$$\begin{aligned} y(\sigma) X(\sigma, t) - y(t) X(t, t) - \int_t^{\sigma} y(s) \frac{\partial}{\partial s} X(s, t) ds = \\ = - \int_t^{\sigma} y(s) A(s) X(s, t) ds - \int_{t+\tau}^{\sigma+\tau} y(\beta) B(\beta) X(\beta - \tau, t) d\beta. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} y(t) = & y(\sigma) X(\sigma, t) - \int_t^\sigma y(s) A(s) X(s, t) ds - \int_t^\sigma y(s) B(s) X(s - \tau, t) ds + \\ & + \int_t^\sigma y(s) A(s) X(s, t) ds + \int_{t+\tau}^t y(s) B(s) X(s - \tau, t) ds + \\ & + \int_t^\sigma y(s) B(s) X(s - \tau, t) ds + \int_\sigma^{\sigma+\tau} y(s) B(s) X(s - \tau, t) ds. \end{aligned}$$

Deoarece pentru  $t \leq s < t + \tau$  avem  $t - \tau \leq s - \tau < t$ , rezultă  $X(s - \tau, t) \equiv 0$  pentru  $t \leq s < t + \tau$ , deci, în definitiv

$$y(t) = y(\sigma) X(\sigma, t) + \int_\sigma^{\sigma+\tau} y(s) B(s) X(s - \tau, t) ds. \quad (26)$$

Vom avea nevoie și de formula care corespunde formulei (18) în acest caz particular. Fie  $Y(\alpha, t)$  o matrice ale cărei linii verifică (ca funcții de  $\alpha$ ), sistemul (25) pentru  $\alpha < t$  și condițiile  $Y(t, t) = E$ ,  $Y(\alpha, t) \equiv 0$  pentru  $t < \alpha \leq t + \tau$ . E ușor de văzut că o asemenea matrice poate fi construită prin pași. Într-adevăr, pentru  $t - \tau \leq \alpha \leq t$  vom avea

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Y(\alpha, t) + Y(\alpha, t) A(\alpha) = 0, \quad Y(t, t) = E,$$

deci  $Y(\alpha, t)$  se determină ca matrice fundamentală a unui sistem de ecuații diferențiale ordinare. Pentru  $t - 2\tau \leq \alpha \leq t - \tau$ ,  $Y(\alpha, t)$  se va determina din sistemul

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Y(\alpha, t) + Y(\alpha, t) A(\alpha) + Y(\alpha + \tau, t) B(\alpha + \tau) = 0$$

în care  $Y(\alpha + \tau, t)$  se înlocuiește cu matricea găsită în etapa precedentă. Operația continuă mai departe în același mod.

Avem, dacă  $x(\alpha)$  este soluție a sistemului (23),

$$\begin{aligned} \int_\sigma^t Y(\alpha, t) \dot{x}(\alpha) d\alpha &= \int_\sigma^t Y(\alpha, t) A(\alpha) x(\alpha) d\alpha + \\ &+ \int_\sigma^t Y(\alpha, t) B(\alpha) x(\alpha - \tau) d\alpha + \int_\sigma^t Y(\alpha, t) f(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Integrând prin părți,

$$\begin{aligned} Y(t, t) x(t) - Y(\sigma, t) x(\sigma) - \int_\sigma^t \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} Y(\alpha, t) \right] x(\alpha) d\alpha &= \\ = \int_\sigma^t Y(\alpha, t) A(\alpha) x(\alpha) d\alpha + \int_{\sigma-\tau}^{t-\tau} Y(\beta + \tau, t) B(\beta + \tau) x(\beta) d\beta + \\ &+ \int_\sigma^t Y(\alpha, t) f(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$



De aici

$$\begin{aligned} x(t) = & Y(\sigma, t) x(\sigma) - \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) A(\alpha) x(\alpha) d\alpha - \\ & - \int_{\sigma}^t Y(\alpha + \tau, t) B(\alpha + \tau) x(\alpha) d\alpha + \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) A(\alpha) x(\alpha) d\alpha + \\ & + \int_{\sigma-\tau}^{t-\tau} Y(\alpha + \tau, t) B(\alpha + \tau) x(\alpha) d\alpha + \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) f(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} x(t) = & Y(\sigma, t) x(\sigma) - \int_{t-\tau}^t Y(\alpha + \tau, t) B(\alpha + \tau) x(\alpha) d\alpha + \\ & + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} Y(\alpha + \tau, t) B(\alpha + \tau) x(\alpha) d\alpha + \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) f(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Dar pentru  $t - \tau < \alpha \leq t$  avem  $t < \alpha + \tau \leq t + \tau$ , deci  $Y(\alpha + \tau, t) \equiv 0$ . Obținem în definitiv

$$x(t) = Y(\sigma, t) x(\sigma) + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} Y(\alpha + \tau, t) B(\alpha + \tau) x(\alpha) d\alpha + \int_{\sigma}^t Y(\alpha, t) f(\alpha) d\alpha.$$

Pentru  $f \equiv 0$  se capătă soluția generală a sistemului (24). Luând soluțiile care formează matricea  $X(t, \sigma)$  (soluții nule pe  $[\sigma - \tau, \sigma]$ , cu  $X(\sigma, \sigma) = E$ ), rezultă

$$X(t, \sigma) = Y(\sigma, t).$$

Formula precedentă devine

$$\begin{aligned} x(t) = & X(t, \sigma) x(\sigma) + \int_{\sigma-\tau}^{\sigma} X(t, \alpha + \tau) B(\alpha + \tau) x(\alpha) d\alpha + \\ & + \int_{\sigma}^t X(t, \alpha) f(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

Aceasta este formula (18) în cazul particular al sistemului (23). Să observăm că aici  $x$  este un vector coloană, în timp ce în formula (18)  $x$  era vector linie.

Fie, ca mai sus,  $U$  operatorul definit de  $U\varphi = z(\omega + s, \varphi)$ , unde  $z(t, \varphi)$  este soluția sistemului (24) care pe  $[-\tau, 0]$  coincide cu  $\varphi$ .

Soluțiile periodice ale sistemului (24), de perioadă  $\omega$ , vor fi determinate de funcțiile inițiale care verifică relația  $U\varphi = \varphi$  și cum am văzut că operatorul  $U$  este compact rezultă că sistemul (24) admite un număr finit de soluții periodice de perioadă  $\omega$  liniar independente.

Fie acum  $y(t, \psi)$  soluția sistemului (25) definită pentru  $t \leq \omega + \tau$  și care pe  $[\omega, \omega + \tau]$  coincide cu  $\psi$ . O dată cu  $y(t, \psi)$  este soluție a sistemului și  $y(t - \omega, \psi)$ , definită pentru  $t - \omega \leq \omega + \tau$ , deci pentru  $t \leq 2\omega + \tau$ . Dacă  $y(t - \omega, \psi)$  coincide cu  $\psi$  pentru  $\omega \leq t \leq \omega + \tau$ , atunci pe baza

teoremei de unicitate avem  $y(t - \omega, \psi) \equiv y(t, \psi)$  și soluția e periodică. Rezultă deci că funcțiile  $\psi$  care sînt funcții inițiale pentru soluțiile periodice ale sistemului (25) verifică relația

$$y(t - \omega, \psi) = \psi(t)$$

pentru  $\omega \leq t \leq \omega + \tau$ .

Această relație se scrie, ținînd seama de (26),

$$\psi(t) = \psi(\omega) X(\omega, t - \omega) + \int_{\omega}^{\omega + \tau} \psi(\xi) B(\xi) X(\xi - \tau, t - \omega) d\xi.$$

Notăm  $\tilde{\varphi}(s) = \psi(s + \omega + \tau)$ ,  $-\tau \leq s \leq 0$ . Dacă  $\psi$  verifică ecuația de mai sus, funcția  $\tilde{\varphi}$  verifică ecuația

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\varphi}(-\tau) X(\omega, s + \tau) + \int_{\omega}^{\omega + \tau} \tilde{\varphi}(\xi - \omega - \tau) B(\xi) X(\xi - \tau, s + \tau) d\xi,$$

deci

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(s) &= \tilde{\varphi}(-\tau) X(\omega, s + \tau) + \\ &+ \int_{-\tau}^0 \tilde{\varphi}(\eta) B(\eta + \tau) X(\eta + \omega, s + \tau) d\eta. \end{aligned} \quad (28)$$

În cele ce urmează vom demonstra că ecuația  $\varphi - U\varphi = 0$  și ecuația (28) au același număr de soluții liniar independente și că ecuația  $\varphi - U\varphi = F$  are soluții dacă și numai dacă

$$\tilde{\varphi}(-\tau) F(0) + \int_{-\tau}^0 \tilde{\varphi}(\eta) B(\eta + \tau) F(\eta) d\eta = 0$$

pentru toate soluțiile  $\varphi$  ale ecuației (28).

Fiind date două funcții matriciale  $\psi, \varphi$  definite pe  $[-\tau, 0]$ , pentru care înmulțirea este posibilă, definim operația

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \psi(-\tau) \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \psi(\xi) B(\xi + \tau) \varphi(\xi) d\xi.$$

Această operație este evident biliniară. Să punem în evidență următoarea proprietate fundamentală

$$\langle \langle L(\sigma), M(\alpha, \sigma) \rangle, N(\alpha) \rangle = \langle L(\sigma), \langle M(\alpha, \sigma), N(\alpha) \rangle \rangle. \quad (29)$$

Fie

$$K(\alpha) = \langle L(\sigma), M(\alpha, \sigma) \rangle.$$

Avem

$$\langle K(\alpha), N(\alpha) \rangle = K(-\tau) N(0) + \int_{-\tau}^0 K(\xi) B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi,$$

$$K(\alpha) = L(-\tau) M(\alpha, 0) + \int_{-\tau}^0 L(\xi) B(\xi + \tau) M(\alpha, \xi) d\xi.$$

## Rezultă

$$\begin{aligned}
\langle K(\alpha), N(\alpha) \rangle &= \left[ L(-\tau) M(-\tau, 0) + \int_{-\tau}^0 L(\xi) B(\xi + \right. \\
&+ \tau) M(-\tau, \xi) d\xi \Big] N(0) + \int_{-\tau}^0 \left[ L(-\tau) M(\xi, 0) + \int_{-\tau}^0 L(\eta) B(\eta + \right. \\
&+ \tau) M(\xi, \eta) d\eta \Big] B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi = L(-\tau) M(-\tau, 0) N(0) + \\
&+ \int_{-\tau}^0 L(\xi) B(\xi + \tau) M(-\tau, \xi) N(0) d\xi + L(-\tau) \int_{-\tau}^0 M(\xi, 0) B(\xi + \\
&+ \tau) N(\xi) d\xi + \int_{-\tau}^0 \left[ \int_{-\tau}^0 L(\eta) B(\eta + \tau) M(\xi, \eta) d\eta \right] B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi = \\
&= L(-\tau) \left[ M(-\tau, 0) N(0) + \int_{-\tau}^0 M(\xi, 0) B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi \right] + \\
&+ \int_{-\tau}^0 L(\eta) B(\eta + \tau) M(-\tau, \eta) N(0) d\eta + \int_{-\tau}^0 L(\eta) B(\eta + \\
&+ \tau) \left[ \int_{-\tau}^0 M(\xi, \eta) B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi \right] d\eta = L(-\tau) \left[ M(-\tau, 0) N(0) + \right. \\
&+ \int_{-\tau}^0 M(\xi, 0) B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi \Big] + \int_{-\tau}^0 L(\eta) B(\eta + \tau) \left[ M(-\tau, \eta) N(0) + \right. \\
&+ \int_{-\tau}^0 M(\xi, \eta) B(\xi + \tau) N(\xi) d\xi \Big] d\eta = \langle L(\sigma), \langle M(\alpha, \sigma), N(\alpha) \rangle \rangle.
\end{aligned}$$

Relația (29) e demonstrată.

Considerăm ecuația

$$\varphi(s) - \lambda K_1(s, -\tau) \varphi(0) - \lambda \int_{-\tau}^0 K_1(s, \eta) B(\eta + \tau) \varphi(\eta) d\eta = \chi(s) \quad (30)$$

care cu notațiile adoptate se scrie

$$\varphi(s) - \lambda \langle K_1(s, \alpha), \varphi(\alpha) \rangle = \chi(s).$$

Căutăm soluția sub forma

$$\varphi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \varphi_i(s).$$

Înlocuind în ecuație și identificând coeficienții puterilor lui  $\lambda$  obținem

$$\varphi_0(s) = \chi(s), \quad \varphi_i(s) = \langle K_1(s, \alpha), \varphi_{i-1}(\alpha) \rangle.$$

De aici rezultă

$$|\varphi_i(s)| \leq M^i \sup |\chi(s)|,$$

unde  $M$  este oricît de mic dacă  $|K_1|$  este suficient de mic. Rezultă că dacă  $|K_1|$  e suficient de mic pentru ca  $M < 1$ , seria converge uniform și absolut pentru  $\lambda = 1$ . Avem

$$\varphi_1(s) = \langle K_1(s, \alpha), \chi(\alpha) \rangle.$$

Verificăm prin inducție formula

$$\varphi_l(s) = \langle K_l(s, \alpha), \chi(\alpha) \rangle,$$

unde

$$K_l(s, \eta) = \langle K_1(s, \alpha), K_{l-1}(\alpha, \eta) \rangle$$

Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \varphi_{l+1}(s) &= \langle K_1(s, \alpha), \varphi_l(\alpha) \rangle = \langle K_1(s, \alpha), \langle K_l(\alpha, \eta), \chi(\eta) \rangle \rangle = \\ &= \langle \langle K_1(s, \alpha), K_l(\alpha, \eta) \rangle, \chi(\eta) \rangle = \langle K_{l+1}(s, \eta), \chi(\eta) \rangle. \end{aligned}$$

Notînd

$$\Gamma(s, \eta) = \sum_1^\infty K_l(s, \eta)$$

rezultă că soluția ecuației (30) pentru  $\lambda = 1$  se scrie

$$\varphi(s) = \chi(s) + \langle \Gamma(s, \alpha), \chi(\alpha) \rangle.$$

Fie acum ecuația

$$\tilde{\varphi}(s) - \lambda \tilde{\varphi}(-\tau) K_1(0, s) - \lambda \int_{-\tau}^0 \tilde{\varphi}(\eta) B(\eta + \tau) K_1(\eta, s) d\eta = \tilde{\chi}(s) \quad (31)$$

care cu notațiile adoptate se scrie

$$\tilde{\varphi}(s) - \lambda \langle \tilde{\varphi}(\alpha), K_1(\alpha, s) \rangle = \tilde{\chi}(s).$$

Căutăm din nou soluția sub forma

$$\tilde{\varphi}(s) = \sum_{i=0}^\infty \lambda^i \tilde{\varphi}_i(s);$$

obținem

$$\tilde{\varphi}_0(s) = \tilde{\chi}(s), \quad \tilde{\varphi}_i(s) = \langle \tilde{\varphi}_{i-1}(\alpha), K_1(\alpha, s) \rangle.$$

Ca mai sus se arată convergența absolută și uniformă a seriei dacă  $|K_1|$  e destul de mic și  $\lambda = 1$  și prin inducție se obține

$$\tilde{\varphi}_l(s) = \langle \tilde{\chi}(\alpha), \tilde{K}_l(\alpha, s) \rangle,$$

unde

$$\tilde{K}_l(\eta, s) = \langle \tilde{K}_{l-1}(\eta, \alpha), K_1(\alpha, s) \rangle.$$

În definitiv, soluția ecuației (31) pentru  $\lambda = 1$  se scrie

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + \langle \tilde{\chi}(\alpha), \tilde{\Gamma}(\alpha, s) \rangle$$

unde

$$\tilde{\Gamma}(\eta, s) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{K}_l(\eta, s).$$

Demonstrăm prin inducție relația

$$\tilde{K}_l(\eta, s) = K_l(\eta, s).$$

Avem

$$K_2(\eta, s) = \langle K_1(\eta, \alpha), K_1(\alpha, s) \rangle = \tilde{K}_2(\eta, s).$$

Presupunem egalitatea adevărată pentru  $j \leq l$ . Avem

$$\begin{aligned} K_l(\eta, s) &= \langle K_1(\eta, \alpha), K_{l-1}(\alpha, s) \rangle = \tilde{K}_l(\eta, s) = \\ &= \langle \tilde{K}_{l-1}(\eta, \alpha), K_1(\alpha, s) \rangle = \langle K_{l-1}(\eta, \alpha), K_1(\alpha, s) \rangle \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} K_{l+1}(\eta, s) &= \langle K_1(\eta, \alpha), K_l(\alpha, s) \rangle = \\ &= \langle K_1(\eta, \alpha), \langle K_{l-1}(\alpha, \beta), K_1(\beta, s) \rangle \rangle = \\ &= \langle K_1(\eta, \alpha), K_{l-1}(\alpha, \beta) \rangle, K_1(\beta, s) \rangle = \\ &= \langle K_l(\eta, \beta), K_1(\beta, s) \rangle = \langle \tilde{K}_l(\eta, \beta), K_1(\beta, s) \rangle = \tilde{K}_{l+1}(\eta, s). \end{aligned}$$

Rezultă astfel că

$$\tilde{\Gamma}(\eta, s) = \Gamma(\eta, s)$$

și soluția ecuației (31) pentru  $\lambda = 1$  se scrie

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + \langle \tilde{\chi}(\alpha), \Gamma(\alpha, s) \rangle.$$

Ecuția

$$\varphi - U\varphi = F(s),$$

se scrie, ținând seama de formula (27),

$$\varphi(s) - X(\omega + s, 0) \varphi(0) - \int_{-\tau}^0 X(\omega + s, \eta + \tau) B(\eta + \tau) \varphi(\eta) d\eta = F(s)$$

sau

$$\varphi(s) - \langle X(\omega + s, \eta + \tau), \varphi(\eta) \rangle = F(s).$$

Deoarece  $X(\omega + s, \eta + \tau)$  este uniform continuă în pătratul  $-\tau \leq \eta \leq 0, -\tau \leq s \leq 0$ , putem scrie, folosind de exemplu teorema lui Weierstrass,

$$X(\omega + s, \eta + \tau) = \sum_k a_k(s) b_k(\eta) + K_1(s, \eta),$$

unde  $a_k(s)$  sînt vectori coloană,  $b_k(\eta)$  vectori linie,  $\{a_k\}$  și  $\{b_k\}$  sînt liniar independenți, iar  $|K_1(s, \eta)|$  poate fi luată oricît de mică. Ecuația

$$\varphi - U\varphi = F$$

devine

$$\varphi(s) - \left\langle \sum_k a_k(s) b_k(\eta) + K_1(s, \eta), \varphi(\eta) \right\rangle = F(s)$$

deci

$$\varphi(s) - \sum_k a_k(s) \langle b_k(\eta), \varphi(\eta) \rangle - \langle K_1(s, \eta), \varphi(\eta) \rangle = F(s)$$

sau

$$\varphi(s) - \langle K_1(s, \eta), \varphi(\eta) \rangle = \sum_k a_k(s) \langle b_k(\eta), \varphi(\eta) \rangle + F(s).$$

Notînd

$$\varphi(s) - \langle K_1(s, \eta), \varphi(\eta) \rangle = \chi(s)$$

deducem

$$\varphi(s) = \chi(s) + \langle \Gamma(s, \alpha), \chi(\alpha) \rangle$$

și obținem pentru  $\chi(s)$  ecuația

$$\chi(s) = \sum_k a_k(s) \langle b_k(\eta), \chi(\eta) \rangle + \langle \Gamma(\eta, \alpha), \chi(\alpha) \rangle + F(s) \quad (***)$$

sau

$$\begin{aligned} \chi(s) &= \sum_k a_k(s) [\langle b_k(\eta), \chi(\eta) \rangle + \langle b_k(\eta), \langle \Gamma(\eta, \alpha), \chi(\alpha) \rangle \rangle] + F(s) = \\ &= \sum_k a_k(s) [\langle b_k(\eta), \chi(\eta) \rangle + \langle \langle b_k(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) \rangle, \chi(\alpha) \rangle] + F(s) = \\ &= \sum_k a_k(s) \langle b_k(\alpha) + \langle b_k(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) \rangle, \chi(\alpha) \rangle + F(s) \end{aligned}$$

deci, în definitiv,

$$\chi(s) = \sum_k a_k(s) \langle \bar{b}_k(\alpha), \chi(\alpha) \rangle + F(s),$$

unde

$$\bar{b}_k(\alpha) = b_k(\alpha) + \langle b_k(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) \rangle.$$

Rezultă de aici că

$$\chi(s) - F(s) = \sum_k \lambda_k a_k(s);$$

înlocuind în ecuația (\*\*\*) se obține

$$\sum_k \lambda_k a_k(s) = \sum_k a_k(s) \langle \bar{b}_k(\alpha), F(\alpha) \rangle + \sum_i \lambda_i a_i(\alpha).$$

Ținînd seama de faptul că vectorii  $a_k$  sînt liniar independenți deducem

$$\lambda_k = \sum_j \gamma_{kj} \lambda_j + f_k, \quad (32)$$

unde

$$\gamma_{kj} = \langle \bar{b}_k(\alpha), a_j(\alpha) \rangle, \quad f_k = \langle \bar{b}_k(\alpha), F(\alpha) \rangle.$$

Sistemul (32) are soluție dacă și numai dacă

$$\sum f_k \mu_k = 0 \quad (33)$$

pentru toate soluțiile sistemului

$$\mu_k = \sum_j \gamma_{jk} \mu_j. \quad (34)$$

Deoarece sistemul (32) este echivalent cu ecuația în  $\chi$ , iar aceasta e echivalentă cu ecuația

$$\varphi - U\varphi = F,$$

rezultă că (33) reprezintă condiția necesară și suficientă ca  $\varphi - U\varphi = F$  să admită soluții. Pentru a vedea ce reprezintă condiția (33) să observăm că ecuația (28) se scrie

$$\tilde{\varphi}(s) = \langle \tilde{\varphi}(\alpha), X(\alpha + \omega, s + \tau) \rangle$$

sau

$$\tilde{\varphi}(s) = \langle \tilde{\varphi}(\alpha), \sum_k a_k(\alpha) b_k(s) + K_1(\alpha, s) \rangle,$$

deci

$$\tilde{\varphi}(s) - \langle \tilde{\varphi}(\alpha), K_1(\alpha, s) \rangle = \sum_k \langle \tilde{\varphi}(\alpha), a_k(\alpha) \rangle b_k(s).$$

Punînd

$$\tilde{\varphi}(s) - \langle \tilde{\varphi}(\alpha), K_1(\alpha, s) \rangle = \tilde{\chi}(s)$$

obținem

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + \langle \tilde{\chi}(\alpha), \Gamma(\alpha, s) \rangle,$$

ceea ce ne conduce pentru  $\tilde{\chi}$  la ecuația

$$\tilde{\chi}(s) = \sum_k \langle \tilde{\chi}(\alpha) + \langle \tilde{\chi}(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) \rangle, a_k(\alpha) \rangle b_k(s)$$

care se mai scrie

$$\tilde{\chi}(s) = \sum_k \langle \tilde{\chi}(\eta), \bar{a}_k(\eta) \rangle b_k(s).$$

unde

$$\bar{a}_k(\eta) = a_k(\eta) + \langle \Gamma(\eta, \alpha), a_k(\alpha) \rangle.$$

Soluția acestei ecuații va fi de forma

$$\tilde{\chi}(s) = \sum_k \mu_k b_k(s)$$

și înlocuind în ecuație obținem

$$\sum_k \mu_k b_k(s) = \sum_k < \sum_j \mu_j b_j(\eta), \bar{a}_k(\eta) > b_k(s)$$

de unde, ținând seama că vectorii  $b_k$  sînt liniar independenți,

$$\mu_k = \sum_j \tilde{\gamma}_{jk} \mu_j, \quad \tilde{\gamma}_{jk} = < b_j(\eta), \bar{a}_k(\eta) >. \quad (35)$$

Verificăm egalitatea  $\tilde{\gamma}_{jk} = \gamma_{jk}$ . Avem

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{jk} &= < b_j(\eta), a_k(\eta) + < \Gamma(\eta, \alpha), a_k(\alpha) > > = < b_j(\eta), a_k(\eta) > + \\ &+ < b_j(\eta), < \Gamma(\eta, \alpha), a_k(\alpha) > > = < b_j(\eta), a_k(\eta) > + \\ &+ < < b_j(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) >, a_k(\alpha) > = < b_j(\alpha) + < b_j(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) >, a_k(\alpha) > = \\ &= < \bar{b}_j(\alpha), a_k(\alpha) > = \gamma_{jk}. \end{aligned}$$

Rezultă că sistemul (35) coincide cu (34). Condiția (33) se scrie  $\sum_k \mu_k < \bar{b}_k(\alpha), F(\alpha) > = 0$ , sau, ținând seama de expresia lui  $\bar{b}_k$ ,

$$\sum_k \mu_k < b_k(\alpha) + < b_k(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) >, F(\alpha) > = 0.$$

Dacă  $\mu_k$  verifică sistemul (35), avem

$$\sum_k \mu_k b_k(s) = \tilde{\chi}(s)$$

deci condiția (33) devine

$$< \tilde{\chi}(\alpha), F(\alpha) > + < < \tilde{\chi}(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) >, F(\alpha) > = 0.$$

Dar

$$\tilde{\chi}(\alpha) + < \tilde{\chi}(\eta), \Gamma(\eta, \alpha) > + \tilde{\varphi}(\alpha),$$

și obținem în definitiv condiția

$$< \tilde{\varphi}(\alpha), F(\alpha) > = 0.$$

Am ajuns astfel la următorul rezultat : condiția necesară și suficientă ca ecuația  $\varphi - U\varphi = F$  să aibă soluție este ca

$$< \tilde{\varphi}(\alpha), F(\alpha) > = 0,$$

pentru toate soluțiile  $\tilde{\varphi}$  ale ecuației (28).

Ținând seama de faptul că

$$F(s) = \int_0^{\omega+s} X(\omega + s, \alpha), f(\alpha) d\alpha$$



și

$$\tilde{\varphi}(s) = \psi(s + \tau + \omega),$$

condiția se scrie

$$\begin{aligned} \psi(\omega) \int_0^{\omega} X(\omega, \alpha) f(\alpha) d\alpha + \int_{-\tau}^0 \psi(\eta + \tau + \omega) B(\eta + \\ + \tau) \left[ \int_0^{\omega + \eta} X(\omega + \eta, \alpha) f(\alpha) d\alpha \right] d\eta = 0. \end{aligned}$$

În ultima integrală permutăm ordinea de integrare și obținem

$$\begin{aligned} \psi(\omega) \int_0^{\omega} X(\omega, \alpha) f(\alpha) d\alpha + \int_0^{\omega - \tau} \left[ \int_{-\tau}^0 \psi(\eta + \tau + \omega) B(\eta + \\ + \tau) X(\omega + \eta, \alpha) d\eta \right] f(\alpha) d\alpha + \int_{\omega - \tau}^{\omega} \left[ \int_{\alpha - \omega}^0 \psi(\eta + \tau + \omega) B(\eta + \\ + \tau) X(\omega + \eta, \alpha) d\eta \right] f(\alpha) d\alpha = 0. \end{aligned}$$

Dar pentru  $\eta < \alpha - \omega$  avem  $\alpha > \omega + \eta$ , deci  $X(\omega + \eta, \alpha) \equiv 0$ , deci în ultima integrală putem înlocui pe  $\alpha - \omega$  cu  $-\tau$  și condiția se scrie

$$\begin{aligned} \psi(\omega) \int_0^{\omega} X(\omega, \alpha) f(\alpha) d\alpha + \int_0^{\omega} \left[ \int_{-\tau}^0 \psi(\eta + \tau + \omega) B(\eta + \\ + \tau) X(\omega + \eta, \alpha) d\eta \right] f(\alpha) d\alpha = 0 \end{aligned}$$

sau

$$\int_0^{\omega} \left[ \psi(\omega) X(\omega, \alpha) + \int_{\omega}^{\omega + \tau} \psi(\xi) B(\xi) X(\xi - \tau, \alpha) d\xi \right] f(\alpha) d\alpha = 0.$$

Ținând seama de formula (26), această condiție se scrie

$$\int_0^{\omega} y(\alpha) f(\alpha) d\alpha = 0, \quad (36)$$

unde  $y(\alpha)$  este soluția sistemului (25) care pe  $[\omega, \omega + \tau]$  coincide cu  $\psi$ . Dar  $\tilde{\varphi}$  este soluție a ecuației (28) deci  $\psi$  este funcție inițială a unei soluții periodice a sistemului (25). Am demonstrat astfel următoarea teoremă:

**TEOREMA 4.20.** *Sistemele (24) și (25) au același număr de soluții periodice de perioadă  $\omega$  liniar independente. Dacă este îndeplinită condiția (36) pentru toate soluțiile periodice independente ale sistemului (25), atunci sistemul (23) admite soluții periodice.*

Faptul că cele două sisteme (24) și (25) au același număr de soluții periodice de perioadă  $\omega$  liniar independente, se vede în felul următor. Numărul soluțiilor periodice liniar independente ale sistemului (25) este egal

cu cel al soluțiilor independente ale sistemului (35), iar numărul soluțiilor periodice liniar independente ale sistemului (24) este egal cu cel al soluțiilor independente ale sistemului care se obține în (32) când  $f_k = 0$ . Cele două sisteme de ecuații liniare au același număr de soluții liniar independente, deoarece matricea sistemului (35) este transpusa matricii sistemului (32).

### § 8. CAZUL CRITIC LA SISTEME GENERALE CU ÎNTÎRZIERE

Reluăm aceeași problemă în cazul general. Sistemul adjunct sistemului (17) are forma

$$-\frac{d}{d\alpha} [y(\alpha) + \eta(\alpha - \gamma, \gamma) y(\alpha - \gamma) d\gamma] \equiv 0 \quad (37)$$

sau

$$y(\alpha) + \int_{-\infty}^0 \eta(\alpha - \gamma, \gamma) y(\alpha - \gamma) d\gamma = \text{const.}$$

Deoarece  $\eta(t, s) \equiv 0$  pentru  $s \geq 0$  și  $s \leq -\tau$ , acest sistem se scrie

$$y(\alpha) + \int_{\alpha}^{\alpha+\tau} \eta(\beta, \alpha - \beta) y(\beta) d\beta = \text{const.}$$

Rezultă că pentru  $\sigma$  fixat putem scrie

$$y(\alpha) + \int_{\alpha}^{\alpha+\tau} \eta(\beta, \alpha - \beta) y(\beta) d\beta = y(\sigma) + \int_{\sigma}^{\sigma+\tau} \eta(\beta, \sigma - \beta) y(\beta) d\beta$$

sau

$$\begin{aligned} y(\alpha) + \int_{\alpha}^{\sigma} \eta(\beta, \alpha - \beta) y(\beta) d\beta &= y(\sigma) + \\ &+ \int_{\sigma}^{\sigma+\tau} \eta(\beta, \sigma - \beta) y(\beta) d\beta - \int_{\sigma}^{\alpha+\tau} \eta(\beta, \alpha - \beta) y(\beta) d\beta. \end{aligned}$$

Dacă se dă soluția  $y$  pe segmentul  $[\sigma, \sigma + \tau]$ , atunci pentru  $\alpha < \sigma$  în membrul al doilea se află o funcție cunoscută și  $y$  se determină pentru  $\alpha < \sigma$  dintr-un sistem de ecuații integrale de tip Volterra. Aceasta permite să se formuleze pentru sistemul (37) teorema de existență și unicitate. Pentru fiecare funcție inițială cu variații mărginită pe  $[\sigma, \sigma + \tau]$  soluția există și e unică în clasa funcțiilor cu variație mărginită. Dacă funcția inițială e continuă, soluția rezultă continuă. Fie  $X(\alpha, \gamma)$  matricea ale cărei linii sînt soluții ale sistemului (17) nule pentru  $\alpha < \gamma$ , și astfel ca  $X(\gamma, \gamma) = E$ . Pentru  $t < \sigma$  și o soluție  $y(\alpha)$  a sistemului (37) a cărei funcție inițială e cu variație mărginită, avem

$$\int_t^{\sigma} X(\alpha, t) dy(\alpha) = X(\sigma, t) y(\sigma) - X(t, t) y(t) - \int_t^{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} X(\alpha, t) \right] y(\alpha) d\alpha.$$

De aici

$$y(t) = X(\sigma, t) y(\sigma) + \int_t^\sigma X(\alpha, t) d_\alpha \left[ \int_{-\infty}^0 \eta(\alpha - \gamma, \gamma) y(\alpha - \gamma) d\gamma \right] - \\ - \int_t^\sigma \left[ \int_{-\infty}^0 X(\alpha + s, t) d_s \eta(\alpha, s) \right] y(\alpha) d\alpha.$$

Dar

$$\int_t^\sigma \left[ \int_{-\infty}^0 X(\alpha + s, t) d_s \eta(\alpha, s) \right] y(\alpha) d\alpha = \int_t^\sigma \left[ \int_{-\infty}^\alpha X(\beta, t) d_\beta \eta(\alpha, \beta - \alpha) \right] y(\alpha) d\alpha = \\ = \int_{-\infty}^t X(\beta, t) d_\beta \int_t^\sigma \eta(\alpha, \beta - \alpha) y(\alpha) d\alpha + \int_t^\sigma X(\beta, t) d_\beta \int_\beta^\sigma \eta(\alpha, \beta - \alpha) y(\alpha) d\alpha.$$

Rezultă

$$y(t) = X(\sigma, t) y(\sigma) + \int_t^\sigma X(\beta, t) d_\beta \int_\beta^\sigma \eta(\alpha, \beta - \alpha) y(\alpha) d\alpha - \\ - \int_{-\infty}^t X(\beta, t) d_\beta \int_t^\sigma \eta(\alpha, \beta - \alpha) y(\alpha) d\alpha - \int_t^\sigma X(\beta, t) d_\beta \int_\beta^\sigma \eta(\alpha, \beta - \alpha) y(\alpha) d\alpha.$$

Deoarece  $X(\beta, t) \equiv 0$  pentru  $\beta < t$ , cea de-a doua integrală e nulă și obținem

$$y(t) = X(\sigma, t) y(\sigma) + \int_t^\sigma X(\beta, t) d_\beta \int_\beta^\sigma \eta(\alpha, \beta - \alpha) y(\alpha) d\alpha.$$

Ținând din nou seama de faptul că  $X(\beta, t) \equiv 0$  pentru  $\beta < t$ , scriem

$$y(t) = X(\sigma, t) y(\sigma) + \int_{-\infty}^\sigma X(\beta, t) d_\beta \int_\sigma^\infty \eta(\alpha, \beta - \alpha) y(\alpha) d\alpha$$

și, deoarece  $\eta(\alpha, \beta - \alpha) \equiv 0$  pentru  $\beta - \alpha < -\tau$ ,

$$y(t) = X(\sigma, t) y(\sigma) + \int_{\sigma-\tau}^\sigma X(\beta, t) d_\beta \int_\sigma^{\sigma+\tau} \eta(\alpha, \beta - \alpha) y(\alpha) d\alpha. \quad (38)$$

Direct din sistemul (37) se vede că dacă  $y(\alpha)$  e soluție a sistemului atunci  $y(\alpha - \omega)$  este de asemenea soluție, căci  $\eta(t, s)$  e periodică în  $t$  cu perioadă  $\omega$ . Fie  $y(\alpha, \psi)$  soluția sistemului (37) definită pentru  $\alpha < \omega$  cu ajutorul funcției  $\psi$ , cu variație mărginită pe  $[\omega, \omega + \tau]$ . Funcția  $y(\alpha - \omega, \psi)$  va fi și ea soluție și această soluție e definită pentru  $\alpha - \omega < \omega$  deci pentru  $\alpha < 2\omega$ . Dacă pentru  $\omega \leq \alpha \leq \omega + \tau$  această soluție coincide cu  $\psi$ , rezultă că pentru  $\alpha < \omega$  ea va coincide cu  $y(\alpha, \psi)$ , deci  $y(\alpha - \omega, \psi) \equiv y(\alpha, \psi)$  și soluția  $y(\alpha, \psi)$  este periodică de perioadă  $\omega$ . Prin urmare, condiția ca soluția să fie periodică de perioadă  $\omega$  se scrie  $y(\alpha - \omega, \psi) = \psi$  pentru  $\omega \leq \alpha \leq \omega + \tau$ . Ținând seama de (38), această condiție se scrie

$$\psi(\alpha) = X(\omega, \alpha - \omega) \psi(\omega) + \int_{\omega-\tau}^\omega X(\beta, \alpha - \omega) d_\beta \int_\omega^{\omega+\tau} \eta(\gamma, \beta - \gamma) \psi(\gamma) d\gamma.$$

Notăm  $\tilde{\varphi}(s) = \psi(s + \omega + \tau)$ ; obținem

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(s) &= X(\omega, s + \tau) \tilde{\varphi}(-\tau) + \\ &+ \int_{\omega-\tau}^{\omega} X(\beta, s + \tau) d_{\beta} \int_{\omega}^{\omega+\tau} \eta(\gamma, \beta - \gamma) \tilde{\varphi}(\gamma - \omega - \tau) d\gamma. \end{aligned}$$

Făcând în ultima integrală  $\gamma - \omega - \tau = \xi$ , obținem

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(s) &= X(\omega, s + \tau) \tilde{\varphi}(-\tau) + \\ &+ \int_{\omega-\tau}^{\omega} X(\beta, s + \tau) d_{\beta} \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \omega + \tau, \beta - \xi - \omega - \tau) \tilde{\varphi}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Punem în prima integrală  $\beta = \zeta + \omega$  și obținem

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(s) &= X(\omega, s + \tau) \tilde{\varphi}(-\tau) + \\ &+ \int_{-\tau}^0 X(\zeta + \omega, s + \tau) d_{\zeta} \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \tau, \zeta - \xi - \tau) \tilde{\varphi}(\xi) d\xi. \quad (39) \end{aligned}$$

Soluțiile ecuației (39) dau funcțiile inițiale ale soluțiilor periodice ale sistemului (37).

Pe baza formulei (18) avem

$$\begin{aligned} x(t, \varphi) &= \varphi(0) X(t, 0) + \int_{-\infty}^0 \varphi(s) d_s \int_0^t \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha + \\ &+ \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Deoarece  $\alpha \geq 0$ , dacă  $s \leq -\tau$ , rezultă  $s - \alpha \leq -\tau$ , deci  $\eta(\alpha, s - \alpha) \equiv 0$  și formula se poate scrie

$$\begin{aligned} x(t, \varphi) &= \varphi(0) X(t, 0) + \int_{-\tau}^0 \varphi(s) d_s \int_0^t \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha + \\ &+ \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Ținând seama de faptul că  $X(t, \alpha) \equiv 0$  pentru  $t < \alpha$ , deducem

$$\begin{aligned} x(t, \varphi) &= \varphi(0) X(t, 0) + \int_{-\tau}^0 \varphi(s) d_s \int_0^{\infty} \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha + \\ &+ \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Dar  $s \leq 0$  și deci dacă  $\alpha > \tau$  avem  $s - \alpha \leq -\tau$  și  $\eta(\alpha, s - \alpha) \equiv 0$  deci în definitiv

$$x(t, \varphi) = \varphi(0) X(t, 0) + \int_{-\tau}^0 \varphi(s) d_s \int_0^{\tau} \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha + \\ + \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha$$

sau

$$x(t, \varphi) = \varphi(0) X(t, 0) + \int_{-\tau}^0 \varphi(\beta) d_\beta \int_{-\tau}^0 \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau) X(t, \gamma + \tau) d\gamma + \\ + \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha.$$

Condiția ca soluția să fie periodică se scrie, după cum am mai văzut,

$$x(\omega + s, \varphi) = \varphi(s),$$

deci

$$\varphi(s) = \varphi(0) X(\omega + s, 0) + \int_{-\tau}^0 \varphi(\beta) d_\beta \int_{-\tau}^0 \eta(\gamma + \tau, \beta - \gamma - \tau) X(\omega + \\ + s, \gamma + \tau) d\gamma + \int_0^{\omega+s} f(\alpha) X(\omega + s, \alpha) d\alpha. \quad (40)$$

Definim operația

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \varphi(0) \psi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \varphi(\gamma) d_\gamma \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) \psi(\xi) d\xi.$$

Demonstrăm proprietatea fundamentală

$$\langle \langle L(\beta), M(\beta, \sigma) \rangle, N(\sigma) \rangle = \langle L(\beta), \langle M(\beta, \sigma), N(\sigma) \rangle \rangle. \quad (41)$$

Fie

$$K(\sigma) = \langle L(\beta), M(\beta, \sigma) \rangle, \quad P(\beta) = \langle M(\beta, \sigma), N(\sigma) \rangle.$$

Avem

$$K(\sigma) = L(0) M(-\tau, \sigma) + \int_{-\tau}^0 L(\gamma) d_\gamma \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) M(\xi, \sigma) d\xi,$$

$$\langle \langle L(\beta), M(\beta, \sigma) \rangle, N(\sigma) \rangle = \langle K(\sigma), N(\sigma) \rangle = K(0) N(-\tau) +$$

$$+ \int_{-\tau}^0 K(\gamma) d_\gamma \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) N(\xi) d\xi =$$

$$= \left[ L(0) M(-\tau, 0) + \int_{-\tau}^0 L(\gamma) d_\gamma \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \tau, \gamma - \xi - \tau) M(\xi, 0) d\xi \Big] N(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \left[ L(0) M(-\tau, \gamma) + \right. \\
& + \int_{-\tau}^0 L(\zeta) d\zeta \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \tau, \zeta - \xi - \tau) M(\xi, \gamma) d\xi \Big] d\gamma \int_{-\tau}^0 \eta(\alpha + \\
& + \tau, \gamma - \alpha - \tau) N(\alpha) d\alpha = L(0) \left[ M(-\tau, 0) N(-\tau) + \right. \\
& + \int_{-\tau}^0 M(-\tau, \gamma) d\gamma \int_{-\tau}^0 \eta(\alpha + \tau, \gamma - \alpha - \tau) N(\alpha) d\alpha \Big] + \\
& + \int_{-\tau}^0 L(\gamma) d\gamma \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) M(\xi, 0) N(-\tau) d\xi + \\
& + \int_{-\tau}^0 \left[ \int_{-\tau}^0 L(\zeta) d\zeta \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \tau, \zeta - \xi - \tau) M(\xi, \gamma) d\xi \right] d\gamma \int_{-\tau}^0 \eta(\alpha + \\
& + \tau, \gamma - \alpha - \tau) N(\alpha) d\alpha = L(0) P(-\tau) + \int_{-\tau}^0 L(\gamma) d\gamma \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \\
& + \tau, \gamma - \xi - \tau) M(\xi, 0) N(-\tau) d\xi + \int_{-\tau}^0 L(\zeta) d\zeta \int_{-\tau}^0 \left( \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \right. \\
& + \tau, \zeta - \xi - \tau) M(\xi, \gamma) d\xi \Big) d\gamma \int_{-\tau}^0 \eta(\alpha + \tau, \gamma - \alpha - \tau) N(\alpha) d\alpha = \\
& = L(0) P(-\tau) + \int_{-\tau}^0 L(\zeta) d\zeta \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \tau, \zeta - \xi - \tau) M(\xi, 0) N(-\tau) d\xi + \\
& + \int_{-\tau}^0 L(\zeta) d\zeta \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \tau, \zeta - \xi - \tau) \left( \int_{-\tau}^0 M(\xi, \gamma) d\gamma \int_{-\tau}^0 \eta(\alpha + \right. \\
& + \tau, \gamma - \alpha - \tau) N(\alpha) d\alpha \Big) d\xi = L(0) P(-\tau) + \int_{-\tau}^0 L(\zeta) d\zeta \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \\
& + \tau, \zeta - \xi - \tau) \left[ M(\xi, 0) N(-\tau) + \int_{-\tau}^0 M(\xi, \gamma) d\gamma \int_{-\tau}^0 \eta(\alpha + \right. \\
& + \tau, \gamma - \alpha - \tau) N(\alpha) d\alpha \Big] d\xi = L(0) P(-\tau) + \int_{-\tau}^0 L(\zeta) d\zeta \int_{-\tau}^0 \eta(\xi + \\
& + \tau, \zeta - \xi - \tau) P(\xi) d\xi = \langle L(\beta), P(\beta) \rangle = \\
& = \langle L(\beta), \langle M(\beta, \alpha) N(\alpha) \rangle \rangle.
\end{aligned}$$

Relația (41) este astfel demonstrată.

Considerăm ecuația

$$\varphi(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma), K_1(\sigma, s) \rangle = \chi(s)$$

și căutăm soluția ei sub forma

$$\varphi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \varphi_i(s).$$

Se capătă

$$\varphi_0(s) = \chi(s), \quad \varphi_i(s) = \langle \varphi_{i-1}(\sigma), K_1(\sigma, s) \rangle.$$

De aici rezultă că dacă  $|K_1|$  e suficient de mic, seria este uniform și absolut convergentă pentru  $\lambda = 1$ .

Avem

$$\varphi_1(s) = \langle \chi(\sigma), K_1(\sigma, s) \rangle, \quad \varphi_i(s) = \langle \chi(\sigma), K_i(\sigma, s) \rangle$$

unde

$$K_i(\alpha, s) = \langle K_{i-1}(\alpha, \sigma), K_1(\sigma, s) \rangle.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1}(s) &= \langle \varphi_i(\sigma), K_1(\sigma, s) \rangle = \langle \langle \chi(\alpha), K_i(\alpha, \sigma) \rangle, K_1(\sigma, s) \rangle = \\ &= \langle \chi(\alpha), \langle K_i(\alpha, \sigma), K_1(\sigma, s) \rangle \rangle = \langle \chi(\alpha), K_{i+1}(\alpha, s) \rangle. \end{aligned}$$

Notînd

$$\Gamma(\alpha, s) = \sum_1^{\infty} K_i(\alpha, s),$$

deducem că soluția ecuației

$$\varphi(s) - \langle \varphi(\sigma), K(\sigma, s) \rangle = \chi(s)$$

se scrie

$$\varphi(s) = \chi(s) + \langle \chi(\sigma), \Gamma(\sigma, s) \rangle.$$

Considerăm acum ecuația

$$\tilde{\varphi}(s) - \lambda \langle K_1(s, \alpha), \tilde{\varphi}(\alpha) \rangle = \tilde{\chi}(s)$$

și căutăm soluția sub forma

$$\tilde{\varphi}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \tilde{\varphi}_i(s).$$

Obținem

$$\tilde{\varphi}_0(s) = \tilde{\chi}(s), \quad \tilde{\varphi}_i(s) = \langle K_1(s, \alpha), \tilde{\varphi}_{i-1}(\alpha) \rangle.$$

Ca mai sus se deduce că seria e uniform și absolut convergentă pentru  $\lambda = 1$  dacă  $|K_1|$  e suficient de mic. De asemenea

$$\tilde{\varphi}_1(s) = \langle K_1(s, \alpha), \chi(\alpha) \rangle, \quad \tilde{\varphi}_i(s) = \langle \tilde{K}_i(s, \alpha), \chi(\alpha) \rangle,$$

unde

$$\tilde{K}_i(s, \alpha) = \langle K_1(s, \sigma), \tilde{K}_{i-1}(\sigma, \alpha) \rangle.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{l+1}(s) &= \langle K_1(s, \alpha), \tilde{\varphi}_l(\alpha) \rangle = \langle K_1(s, \alpha), \langle \tilde{K}_l(\alpha, \beta), \tilde{\chi}(\beta) \rangle \rangle = \\ &= \langle \langle K_1(s, \alpha), \tilde{K}_l(\alpha, \beta) \rangle, \tilde{\chi}(\beta) \rangle = \langle \tilde{K}_{l+1}(s, \beta), \tilde{\chi}(\beta) \rangle.\end{aligned}$$

Rezultă că soluția ecuației

$$\tilde{\varphi}(s) - \langle K_1(s, \alpha), \tilde{\varphi}(\alpha) \rangle = \tilde{\chi}(s)$$

e dată de

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + \langle \tilde{\Gamma}(s, \alpha), \tilde{\chi}(\alpha) \rangle,$$

unde

$$\tilde{\Gamma}(s, \alpha) = \sum_1^{\infty} \tilde{K}_l(s, \alpha).$$

Dovedim că

$$\tilde{K}_l(s, \alpha) = K_l(s, \alpha).$$

Avem

$$\tilde{K}_2(s, \alpha) = \langle K_1(s, \sigma), K_1(\sigma, \alpha) \rangle = K_2(s, \alpha).$$

Presupunem egalitatea adevărată pentru  $j \leq l$ . Atunci

$$\begin{aligned}K_l(s, \alpha) &= \langle K_{l-1}(s, \beta), K_1(\beta, \alpha) \rangle = \tilde{K}_l(s, \alpha) = \langle K_1(s, \beta), \tilde{K}_{l-1}(\beta, \alpha) \rangle = \\ &= \langle K_1(s, \beta), K_{l-1}(\beta, \alpha) \rangle \\ K_{l+1}(s, \alpha) &= \langle K_l(s, \beta), K_1(\beta, \alpha) \rangle = \\ &= \langle \langle K_1(s, \gamma), K_{l-1}(\gamma, \beta) \rangle, K_1(\beta, \alpha) \rangle = \langle K_1(s, \gamma) \langle K_{l-1}(\gamma, \beta), K_1(\beta, \alpha) \rangle \rangle = \\ &= \langle K_1(s, \gamma), K_l(\gamma, \alpha) \rangle = \langle K_1(s, \gamma), \tilde{K}_l(\gamma, \alpha) \rangle = \tilde{K}_{l+1}(s, \alpha).\end{aligned}$$

Rezultă de aici

$$\tilde{\Gamma}(s, \alpha) = \Gamma(s, \alpha).$$

Deoarece  $X(\omega + s, \alpha + \tau)$  este uniform continuă în  $-\tau \leq \alpha \leq 0$ ,  $-\tau \leq s \leq 0$ , putem scrie

$$X(\omega + s, \alpha + \tau) = \sum_k a_k(\alpha) b_k(s) + K_1(\alpha, s),$$

unde  $a_k(\alpha)$  sînt vectori coloană,  $b_k(s)$  vectori linie,  $\{a_k\}$  și  $\{b_k\}$  sînt formate din vectori liniar independenți, iar  $|K_1|$  poate fi luat oricît de mic. Ecuația (40) se scrie

$$\varphi(s) = \langle \varphi(\sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau) \rangle + F(s),$$

deci

$$\varphi(s) = \langle \varphi(\sigma), \sum_k a_k(\sigma) b_k(s) + K_1(\sigma, s) \rangle + F(s)$$

sau

$$\varphi(s) - \langle \varphi(\sigma), K_1(\sigma, s) \rangle = \sum_k \langle \varphi(\sigma), a_k(\sigma) \rangle b_k(s) + F(s).$$



Notăm

$$\varphi(s) - \langle \varphi(\sigma), K_1(\sigma, s) \rangle = \chi(s);$$

obținem

$$\varphi(s) = \chi(s) + \langle \chi(\sigma), \Gamma(\sigma, s) \rangle,$$

de unde deducem pentru  $\chi$  ecuația

$$\chi(s) = \sum_k \langle \chi(\sigma) + \langle \chi(\alpha), \Gamma(\alpha, \sigma) \rangle, a_k(\sigma) \rangle b_k(s) + F(s)$$

sau

$$\chi(s) = \sum_k \{ \langle \chi(\sigma), a_k(\sigma) \rangle + \langle \chi(\alpha), \langle \Gamma(\alpha, \sigma), a_k(\sigma) \rangle \rangle \} b_k(s) + F(s). (*)$$

Notînd

$$a_k(\alpha) + \langle \Gamma(\alpha, \sigma), a_k(\sigma) \rangle = \bar{a}_k(\alpha),$$

obținem

$$\chi(s) = \sum_k \langle \chi(\sigma), \bar{a}_k(\sigma) \rangle b_k(s) + F(s).$$

De aici deducem

$$\chi(s) - F(s) = \sum_k \lambda_k b_k(s),$$

și înlocuind în ecuația (\*), obținem

$$\sum_k \lambda_k b_k(s) = \sum_k \langle \sum_j \lambda_j b_j(\sigma), \bar{a}_k(\sigma) \rangle b_k(s) + \sum_k \langle F(\sigma), \bar{a}_k(\sigma) \rangle b_k(s)$$

de unde

$$\lambda_k = \sum_j \gamma_{kj} \lambda_j + f_k, \quad \gamma_{kj} = \langle b_j(\sigma), \bar{a}_k(\sigma) \rangle,$$

$$f_k = \langle F(\sigma), \bar{a}_k(\sigma) \rangle. \quad (42)$$

Sistemul (42) are soluții dacă și numai dacă

$$\sum_k f_k \mu_k = 0 \quad (43)$$

pentru toate soluțiile sistemului

$$\mu_k = \sum_j \gamma_{jk} \mu_j. \quad (44)$$

Deoarece (42) este echivalent cu ecuația în  $\chi(s)$  iar aceasta e echivalentă cu (40), rezultă că (43) reprezintă condiția necesară și suficientă pentru ca (40) să aibă soluții, deci pentru ca sistemul (16) să aibă soluții periodice. Ecuația (39) se scrie

$$\tilde{\varphi}(s) = \langle X(\omega + \sigma, s + \tau), \tilde{\varphi}(\sigma) \rangle,$$

deci

$$\tilde{\varphi}(s) = \langle \sum_k a_k(s) b_k(\sigma) + K_1(s, \sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) \rangle,$$

sau

$$\tilde{\varphi}(s) - \langle K_1(s, \sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) \rangle = \sum_k a_k(s) \langle b_k(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) \rangle.$$

Punem

$$\tilde{\varphi}(s) - \langle K_1(s, \sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) \rangle = \tilde{\chi}(s)$$

și obținem

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + \langle \Gamma(s, \alpha), \tilde{\chi}(\alpha) \rangle,$$

de unde deducem pentru  $\tilde{\chi}(s)$  ecuația

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(s) &= \sum_k a_k(s) \langle b_k(\sigma), \tilde{\chi}(\sigma) \rangle + \langle \Gamma(\sigma, \alpha), \tilde{\chi}(\alpha) \rangle = \\ &= \sum_k a_k(s) \{ \langle b_k(\sigma), \tilde{\chi}(\sigma) \rangle + \langle \langle b_k(\sigma), \Gamma(\sigma, \alpha) \rangle, \tilde{\chi}(\alpha) \rangle \} = \\ &= \sum_k a_k(s) \langle \bar{b}_k(\alpha), \tilde{\chi}(\alpha) \rangle, \end{aligned}$$

unde

$$\bar{b}_k(\alpha) = b_k(\alpha) + \langle b_k(\sigma), \Gamma(\sigma, \alpha) \rangle.$$

Rezultă

$$\tilde{\chi}(s) = \sum_k \mu_k a_k(s)$$

și înlocuind

$$\sum_k \mu_k a_k(s) = \sum_k a_k(s) \langle \bar{b}_k(\alpha), \sum_j \mu_j a_j(\alpha) \rangle,$$

deci

$$\mu_k = \sum_j \tilde{\gamma}_{kj} \mu_j,$$

unde

$$\tilde{\gamma}_{kj} = \langle b_k(\alpha), a_j(\alpha) \rangle.$$

Avem  $\tilde{\gamma}_{kj} = \gamma_{jk}$ . Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{kj} &= \langle b_k(\alpha) + \langle b_k(\sigma), \Gamma(\sigma, \alpha) \rangle, a_j(\alpha) \rangle = \langle b_k(\alpha), a_j(\alpha) \rangle + \\ &\quad + \langle b_k(\sigma), \langle \Gamma(\sigma, \alpha), a_j(\alpha) \rangle \rangle \\ \gamma_{jk} &= \langle b_k(\sigma), \bar{a}_j(\sigma) \rangle = \langle b_k(\sigma), a_j(\sigma) + \langle \Gamma(\sigma, \alpha), a_j(\alpha) \rangle \rangle = \\ &= \langle b_k(\sigma), a_j(\sigma) \rangle + \langle b_k(\sigma), \langle \Gamma(\sigma, \alpha), a_j(\alpha) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Rezultă că dacă  $\mu_k$  verifică sistemul (44), atunci

$$\tilde{\varphi}(s) = \tilde{\chi}(s) + \langle \Gamma(s, \alpha), \tilde{\chi}(\alpha) \rangle,$$

unde

$$\tilde{\chi}(\alpha) = \sum_k \mu_k a_k(\alpha)$$

verifică ecuația (39) și reciproc.

Mai departe,

$$\begin{aligned} \sum_k f_k \mu_k &= \sum_k \mu_k \langle F(\sigma), \bar{a}_k(\sigma) \rangle = \sum_k \mu_k \langle F(\sigma), a_k(\sigma) \rangle + \\ &+ \langle \Gamma(\sigma, \alpha), a_k(\alpha) \rangle = \langle F(\sigma), \sum_k \mu_k a_k(\sigma) \rangle + \\ &+ \langle F(\sigma), \langle \Gamma(\sigma, \alpha), \sum_k \mu_k a_k(\alpha) \rangle \rangle = \langle F(\sigma), \tilde{\chi}(\sigma) \rangle + \\ &+ \langle F(\sigma), \langle \Gamma(\sigma, \alpha), \tilde{\chi}(\alpha) \rangle \rangle = \langle F(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) \rangle. \end{aligned}$$

Rezultă de aici că (43) se scrie

$$\langle F(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) \rangle = 0,$$

pentru toate soluțiile ecuației (39). Avem

$$\begin{aligned} \langle F(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) \rangle &= \int_0^\omega f(\alpha) X(\omega, \alpha) d\alpha \tilde{\varphi}(-\tau) + \\ &+ \int_{-\tau}^0 \left( \int_0^{\omega+\beta} f(\alpha) X(\omega + \beta, \alpha) d\alpha \right) d\beta \int_{-\tau}^0 \eta(\alpha + \tau, \beta - \alpha - \tau) \tilde{\varphi}(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Dar

$$\tilde{\varphi}(s) = \psi(s + \omega + \tau)$$

și avem succesiv

$$\begin{aligned} \langle F(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) \rangle &= \int_0^\omega f(\alpha) X(\omega, \alpha) d\alpha \psi(\omega) + \\ &+ \int_{-\tau}^0 \left( \int_0^{\omega+\beta} f(\alpha) X(\omega + \beta, \alpha) d\alpha \right) d\beta \int_\omega^{\omega+\tau} \eta(\xi, \beta - \xi + \omega) \psi(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^\omega f(\alpha) X(\omega, \alpha) \psi(\omega) d\alpha + \int_{-\omega}^0 \left( \int_0^{\omega+\beta} f(\alpha) X(\omega + \right. \\ &+ \beta, \alpha) d\alpha \Big) d\beta \int_\omega^{\omega+\tau} \eta(\xi, \beta - \xi + \omega) \psi(\xi) d\xi = \int_0^\omega f(\alpha) X(\omega, \alpha) \psi(\omega) d\alpha + \\ &+ \int_0^\omega f(\alpha) \left[ \int_{\alpha-\omega}^0 X(\omega + \beta, \alpha) d\beta \int_\omega^{\omega+\tau} \eta(\xi, \beta - \xi + \omega) \psi(\xi) d\xi \right] d\alpha = \\ &= \int_0^\omega f(\alpha) \left[ X(\omega, \alpha) \psi(\omega) + \int_\alpha^\omega X(\gamma, \alpha) d\gamma \int_\omega^{\omega+\tau} \eta(\xi, \gamma - \xi) \psi(\xi) d\xi \right] d\alpha. \end{aligned}$$

Ținând seama de formula (38) deducem în definitiv că

$$\langle F(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma) \rangle = \int_0^\omega f(\alpha) y(\alpha) d\alpha,$$

unde  $y$  este soluția periodică a sistemului (37) determinată de funcția inițială  $\psi$ . Am obținut astfel următoarea teoremă:

**TEOREMA 4.19'.** *Sistemele (17) și (37) au același număr (finit) de soluții periodice de perioadă  $\omega$  liniar independente. Condiția necesară și suficientă ca sistemul (16) să admită soluții periodice de perioadă  $\omega$  este ca  $\int_0^\omega f(\alpha) y(\alpha) d\alpha = 0$  pentru toate soluțiile periodice  $y(\alpha)$ , de perioadă  $\omega$  ale sistemului (37).*

## § 9. TEORIA STABILITĂȚII SISTEMELOR LINIARE PERIODICE CU ÎNTÎRZIERE

Ne propunem să studiem problema stabilității soluției banale pentru sistemul (17) în cazul cînd matricea  $\eta(t, s)$  este periodică în  $t$  cu perioadă  $\omega > \tau$ .

Fie  $x(t, t_0, \varphi)$  soluția sistemului (17) definită pentru  $t \geq t_0 - \tau$  care pe  $[t_0 - \tau, t_0]$  coincide cu  $\varphi$ . Din cauza periodicității sistemului,  $x(t + \omega, t_0, \varphi)$  va fi de asemenea soluție. Notăm  $U_{t, t_0}$  operatorul definit de

$$U_{t, t_0} \varphi = x(t + s - t_0, t_0, \varphi) \quad t_0 - \tau \leq s \leq t_0.$$

Avem

$$U_{t_0, t_0} \varphi = \varphi$$

și

$$x(t + \omega + s - t_0, t_0, \varphi) = U_{t, t_0} x(\omega + s, t_0, \varphi) = U_{t, t_0} U_{t_0 + \omega, t_0} \varphi,$$

deci

$$U_{t + \omega, t_0} = U_{t, t_0} U_{t_0 + \omega, t_0}.$$

Fie

$$N\omega \leq t - t_0 < (N + 1)\omega,$$

deci

$$t = t_0 + N\omega + t', \quad 0 \leq t' < \omega.$$

Avem

$$U_{t, t_0} = U_{t_0 + t' + N\omega, t_0} = U_{t_0 + t', t_0} \cdot U_{t_0 + \omega, t_0}^N.$$

Pe baza inegalității (3) rezultă

$$\|U_{t_0 + t', t_0}\| < M_0,$$

unde  $M_0$  este o constantă care depinde numai de funcția  $\eta$ . Prin urmare

$$\|U_{t, t_0}\| \leq M_0 \|U_{t_0 + \omega, t_0}^N\|.$$

Rezultă de aici

$$|x(t, t_0, \varphi)| \leq M_0 \|U_{t_0 + \omega, t_0}^N\| \|\varphi\|,$$

deci proprietățile de stabilitate vor depinde numai de comportarea șirului  $\|U_{t_0 + \omega, t_0}^N\|$ . Dacă există  $M > 0$  astfel ca pentru orice  $N$  natural și orice  $t_0 \geq 0$  să avem

$$\|U_{t_0 + \omega, t_0}^N\| \leq M,$$

soluția banală a sistemului (17) este uniform stabilă. Dacă există  $k > 0$  și  $\varepsilon > 0$  astfel încît pentru orice  $N$  natural și orice  $t_0 \geq 0$  să avem

$$\|U_{t_0 + \omega, t_0}^N\| \leq k(1 - \varepsilon)^N,$$

va rezulta stabilitatea asimptotică uniformă.

După cum am mai văzut, operatorul  $U_{t_0 + \omega, t_0}$  este compact, dacă  $\omega > \tau$  (am arătat acest lucru în cazul  $t_0 = 0$ , dar demonstrația e aceeași și în cazul general). Pentru orice operator  $U$ , valorile  $\lambda$  cu  $|\lambda| > \|U\|$  nu se află în spectru, deci pentru orice  $\lambda$  din spectru avem  $|\lambda| \leq \|U\|$ , deci  $|\lambda^N| \leq \|U^N\|$  și din  $\|U^N\| \leq M$  rezultă  $|\lambda|^N \leq M$  pentru  $N = 1, 2, \dots, n, \dots$  ceea ce implică  $|\lambda| \leq 1$ . Rezultă că dacă  $\|U^N\| \leq M$ , atunci spectrul lui  $U$  se află în cercul unitate. Notînd cu  $\sigma(U)$  spectrul operatorului  $U$ , fie  $\sigma(U) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ , unde  $\sigma_1$  este în  $|\lambda| < 1$  iar  $\sigma_2$  pe  $|\lambda| = 1$ . Dacă  $U$  este compact, atunci  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  sînt separate și  $\sigma_2$  este finită. Spațiul  $\mathfrak{X}$  pe care este dat  $U$  se descompune în sumă directă  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$  și corespunzător  $U = U_1 \oplus U_2$ , astfel ca  $\sigma(U_1) = \sigma_1$ ,  $\sigma(U_2) = \sigma_2$ . Rezultă  $U^N = U_1^N \oplus U_2^N$  și dacă  $\|U^N\| \leq M$ , atunci  $\|U_2^N\| \leq M$ .

Deoarece  $U_2$  nu are originea în spectru, rezultă că  $\mathfrak{X}_2$  este de dimensiune finită, deci  $U_2$  poate fi reprezentat printr-o matrice. Dacă  $\|U_2^N\| \leq M$ , valorile proprii ale acestei matrici fiind situate pe cercul unitate, trebuie să aibă divizori elementari simpli.

Prin urmare, dacă  $U$  e compact și  $\|U^N\| \leq M$  pentru orice  $N$  natural, spectrul său este în cercul  $|\lambda| \leq 1$  iar valorilor proprii situate pe  $|\lambda| = 1$  le corespund divizori elementari simpli. Reciproc, dacă spectrul operatorului compact  $U$  se află în cercul  $|\lambda| \leq 1$  iar valorile proprii de pe  $|\lambda| = 1$  au divizori elementari simpli, rezultă  $U = U_1 \oplus U_2$ ,  $\|U_2^N\| \leq M$  și  $\sigma(U_1)$  situat în cercul  $|\lambda| < 1$ . Dar pentru orice operator avem relația

$$\sup |\sigma(U)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|U^n\|^{\frac{1}{n}};$$

dacă operatorul e compact, atunci  $\sup |\sigma(U)|$  e atinsă pentru o valoare proprie, căci singurul punct de acumulare al spectrului e origina. Rezultă că dacă  $\sigma(U_1)$  e în cercul  $|\lambda| < 1$ , atunci  $\sup |\sigma(U_1)| < 1$ , deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_1^n\|^{\frac{1}{n}} = \alpha < 1.$$

De aici deducem că pentru  $n$  suficient de mare

$$\|U_1^n\| < (1 - \varepsilon)^n,$$

ceea ce arată că pentru orice  $N$  natural avem

$$\|U_1^N\| < k(1 - \varepsilon)^N.$$

În definitiv  $\|U^N\|$  rezultă mărginită. Am arătat astfel că dacă  $U$  e compact, necesar și suficient pentru ca  $\|U^N\| \leq M$  pentru orice  $N$  natural este ca spectrul său să se afle în cercul  $|\lambda| \leq 1$  iar valorilor proprii de pe  $|\lambda| = 1$  să le corespundă divizori elementari simpli. Vom aplica acest rezultat general operatorului  $U_{t_0 + \omega, t_0}$ .

DEFINIȚIE. Valorile proprii ale operatorului  $U_{t_0+\omega, t_0}$  se numesc *multiplicatorii sistemului*.

Pentru a justifica această definiție să arătăm că dacă  $\rho$  este un multiplicator, există o soluție a sistemului (17) pentru care

$$x(t + \omega) = \rho x(t).$$

Într-adevăr, fie  $\varphi$  o funcție proprie corespunzătoare lui  $\rho$ ; avem

$$U_{t_0+\omega, t_0} \varphi = \rho \varphi,$$

deci

$$U_{t+\omega, t_0} \varphi = U_{t, t_0} U_{t_0+\omega, t_0} \varphi = \rho U_{t, t_0} \varphi$$

sau

$$x(t + \omega + s - t_0, t_0, \varphi) = \rho x(t + s - t_0, t_0, \varphi).$$

Pentru  $s = t_0$  obținem

$$x(t + \omega, t_0, \varphi) = \rho x(t, t_0, \varphi).$$

Reciproc, dacă există o soluție de forma  $x(t, t_0, \varphi)$ , cu proprietatea

$$x(t + \omega, t_0, \varphi) = \rho x(t, t_0, \varphi),$$

atunci  $\rho$  este valoare proprie a lui  $U_{t_0+\omega, t_0}$ .

Într-adevăr, egalitatea scrisă devine pentru  $t_0 - \tau \leq s \leq t_0$ ,

$$x(s + \omega, t_0, \varphi) = \rho \varphi$$

deci

$$U_{t_0+\omega, t_0} \varphi = \rho \varphi$$

și  $\rho$  e valoare proprie a lui  $U_{t_0+\omega, t_0}$ . Se vede imediat că dacă notăm

$\lambda = \frac{1}{\omega} \ln \rho$ , soluția  $x(t)$  cu proprietatea  $x(t + \omega) = \rho x(t)$  are structura

$$x(t) = e^{\lambda t} u(t) \text{ cu } u(t) \text{ periodică de perioadă } \omega. \text{ Într-adevăr, } u(t + \omega) = e^{-\lambda(t+\omega)} x(t + \omega) = e^{-\lambda t} e^{-\lambda \omega} \rho x(t) = e^{-\lambda t} x(t) = u(t).$$

În concluzie putem formula următorul rezultat:

TEOREMA 4.21. Dacă soluția banală a sistemului (17) este uniform stabilă, multiplicatorii sistemului se află pentru orice  $t_0$  în cercul  $|z| \leq 1$ , celor de pe cercul  $|z| = 1$  corespunzându-le divizori elementari simpli. Dacă soluția banală a sistemului (17) este uniform asimptotic stabilă, există  $\varepsilon > 0$  astfel ca pentru orice  $t_0$  multiplicatorii sistemului să se afle în  $|z| \leq 1 - \varepsilon$ . Dacă există  $\varepsilon > 0$  astfel încât pentru orice  $t_0$  multiplicatorii sistemului să se afle în cercul  $|z| \leq 1 - \varepsilon$ , atunci soluția banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă. Dacă multiplicatorii sistemului se află în cercul  $|z| \leq 1$ , celor de pe cercul  $|z| = 1$  corespunzându-le divizori elementari simpli, soluția banală a sistemului (17) este stabilă.

Considerăm sistemul (16) cu  $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$  și căutăm condiții care asigură că el admite soluții de forma  $e^{\lambda t} h(t)$ ,  $g$  și  $h$  fiind periodice de perioadă  $\omega$ . Punind  $x(t) = e^{\lambda t} h(t)$  avem

$$\lambda e^{\lambda t} h(t) + e^{\lambda t} \dot{h}(t) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda(t+s)} h(t+s) d_s \eta(t,s) + e^{\lambda t} g(t)$$

deci

$$\dot{h}(t) = -\lambda h(t) + \int_{-\infty}^0 h(t+s) e^{\lambda s} d_s \eta(t,s) + g(t)$$

sau

$$\dot{h}(t) = \int_{-\infty}^0 h(t+s) d_s \eta_1(t,s) + g(t),$$

unde  $\eta_1$  are aceleași proprietăți ca și  $\eta$ . Rezultă că necesar și suficient pentru ca oricare ar fi  $g$  periodică de perioadă  $\omega$ , sistemul (16) cu  $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$  să aibă soluții de forma  $e^{\lambda t} h(t)$  este ca sistemul în  $h$  să admită soluții periodice de perioadă  $\omega$  pentru orice  $g$  periodică de perioadă  $\omega$ , deci, conform teoremei 4.16, ca sistemul

$$\dot{h}(t) = \int_{-\infty}^0 h(t+s) d_s \eta_1(t,s)$$

să nu admită soluții periodice de perioadă  $\omega$ , diferite de cea banală. Aceasta este echivalent cu a cere ca multiplicatorii sistemului de mai sus să fie diferiți de 1. Dar acești multiplicatori se obțin din cei ai sistemului (17) prin înmulțirea cu  $e^{-\lambda \omega}$ . Într-adevăr, fie

$$x(t + \omega) = \rho x(t);$$

rezultă

$$e^{\lambda(t+\omega)} h(t + \omega) = \rho e^{\lambda t} h(t),$$

deci

$$e^{\lambda \omega} h(t + \omega) = \rho h(t),$$

$$h(t + \omega) = e^{-\lambda \omega} \rho h(t).$$

Reciproc, dacă

$$h(t + \omega) = \rho_1 h(t),$$

avem

$$x(t + \omega) = e^{\lambda(t+\omega)} h(t + \omega) = e^{\lambda t} e^{\lambda \omega} \rho_1 h(t) = e^{\lambda \omega} \rho_1 h(t),$$

deci

$$\rho = e^{\lambda \omega} \rho_1, \quad \rho_1 = e^{-\lambda \omega} \rho.$$

Ținând seama de aceasta, condiția ca sistemul (16) cu  $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$  să admită, oricare ar fi  $g(t)$  periodică de perioadă  $\omega$ , soluții de forma  $e^{\lambda t} h(t)$ , cu  $h(t)$  periodică de perioadă  $\omega$  este echivalentă cu cererea ca  $e^{\lambda \omega}$  să nu fie multiplicator al sistemului (17).

**TEOREMA 4.22.** Dacă pentru orice  $g(t)$  periodică, de perioadă  $\omega$  și pentru orice  $\lambda$  cu  $|e^{\lambda \omega}| \geq 1$  sistemul (16) cu  $f(t) = e^{\lambda t} g(t)$  admite o

soluție de forma  $e^{\lambda t} h(t)$ , cu  $h(t)$  periodică de perioadă  $\omega$ , soluția banală a sistemului (17) este asimptotic stabilă.

Într-adevăr, dacă e îndeplinită condiția din enunț rezultă că numerele  $e^{\lambda\omega}$  cu  $|e^{\lambda\omega}| \geq 1$  nu sînt multiplicatori ai sistemului (17) deci multiplicatorii sistemului (17) se află în cercul  $|z| < 1$  și concluzia rezultă din teorema 4.20.

Să observăm că teorema 4.21 este de același tip cu 4.15.

#### § 10. STABILITATEA SISTEMELOR LINIARE PERIODICE CU ÎNTÎRZIERE MICĂ

Pentru a înțelege mai bine semnificația rezultatelor care urmează vom presupune că sistemul (17) are forma

$$\dot{x}(t) = x(t) A(t) + \int_{-\infty}^0 x(t+s) d_s \eta_1(t, s), \quad (45)$$

unde  $A(t)$  este continuă și periodică în  $t$ , iar  $\eta_1$  are aceleași proprietăți ca  $\eta$  în (17). Fie  $Y(\alpha, t)$  o matrice care verifică pentru  $\alpha < t$  ecuația

$$Y(\alpha, t) + \int_{\alpha}^t [\eta_1(\beta, \alpha - \beta) - A(\beta)] Y(\beta, t) d\beta = E \quad (46)$$

și astfel încît  $Y(\alpha, t) \equiv 0$  pentru  $\alpha > t$ ,  $Y(t, t) = E$ .

Ecuația (46) este de același tip cu (19) și rămîn valabile proprietățile de existență, unicitate și regularitate formulate relativ la soluțiile ecuației (19). Avem

$$\int_{\sigma}^t \dot{x}(\alpha) Y(\alpha, t) d\alpha = \int_{\sigma}^t x(\alpha) A(\alpha) Y(\alpha, t) d\alpha + \int_{\sigma}^t \left[ \int_{-\infty}^0 x(\alpha+s) d_s \eta_1(\alpha, s) \right] Y(\alpha, t) d\alpha$$

de unde, integrînd prin părți,

$$\begin{aligned} x(t) Y(t, t) - y(\sigma) Y(\sigma, t) - \int_{\sigma}^t x(\alpha) d_{\alpha} Y(\alpha, t) = \\ = - \int_{\sigma}^t x(\alpha) d_{\alpha} \int_{\alpha}^t A(\beta) Y(\beta, t) d\beta + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s) d_s \int_{\sigma}^t \eta_1(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha + \\ + \int_{\sigma}^t x(s) d_s \int_s^t \eta_1(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha. \end{aligned}$$

**Rezultă**

$$\begin{aligned} x(t) = x(\sigma) Y(\sigma, t) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s) d_s \int_{\sigma}^t \eta_1(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha + \\ + \int_{\sigma}^t x(\alpha) d_{\alpha} \left\{ Y(\alpha, t) + \int_{\alpha}^t [\eta_1(\beta, \alpha - \beta) - A(\beta)] Y(\beta, t) d\beta \right\} \end{aligned}$$



și ținând seama de (46)

$$x(t) = x(\sigma) Y(\sigma, t) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s) d_s \int_{\sigma}^t \eta_1(\alpha, s - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha.$$

Dacă  $X(t, \sigma)$  este o matrice ale cărei linii verifică sistemul (45) și condițiile  $X(\sigma, \sigma) = E$ ,  $X(t, \sigma) \equiv 0$  pentru  $t < \sigma$ , avem

$$X(t, \sigma) = Y(\sigma, t).$$

Putem scrie deci formula, corespunzătoare formulei (18),

$$x(t) = x(\sigma) X(t, \sigma) + \int_{-\infty}^{\sigma} x(s) d_s \int_{\sigma}^t \eta_1(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha. \quad (47)$$

Ținând seama de proprietățile matricii  $\eta_1$ , formula (47) se poate scrie

$$x(t, t_0, \varphi) = \varphi(t_0) X(t, t_0) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \varphi(s) d_s \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \eta_1(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} U_{t, t_0} \varphi &= \varphi(t_0) X(t + s - t_0, t_0) + \\ &+ \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \varphi(\beta) d_{\beta} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \eta_1(\alpha, \beta - \alpha) X(t + s - t_0, \alpha) d\alpha \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} U_{t_0 + \omega, t_0} \varphi &= \varphi(t_0) X(\omega + s, t_0) + \\ &+ \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \varphi(\beta) d_{\beta} \int_{t_0}^{t_0} \eta_1(\alpha + \tau, \beta - \alpha - \tau) X(\omega + s, \alpha + \tau) d\alpha. \end{aligned} \quad (48)$$

Definim operația

$$< \varphi, \psi > = \varphi(t_0) \psi(t_0 - \tau) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \varphi(\gamma) d_{\gamma} \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) \psi(\xi) d\xi$$

(funcțiile  $\varphi, \psi$  sînt definite pe  $[t_0 - \tau, t_0]$  și înmulțirea matricială este admisă). Pentru această operație are loc relația (41) care se demonstrează exact cu aceleași calcule ca în cazul  $t_0 = 0$ . Operatorul  $U_{t_0 + \omega, t_0}$  se poate scrie

$$U_{t_0 + \omega, t_0} \varphi = < \varphi(\sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau) >.$$

LEMA 1. *Spectrul operatorului  $< \varphi(\sigma), M(\sigma, s) >$  se află în cercul*

$$\begin{aligned} |z| &\leq M(1 + \tau V), \text{ unde } M = \sup_{\sigma, s \in [t_0 - \tau, t_0]} |M(\sigma, s)|, \quad V \geq V(t), \\ V(t) &= \bigvee_{s = -\tau}^0 \eta_1(t, s). \end{aligned}$$

*Demonstrație.* Soluția ecuației

$$\varphi(s) = \lambda < \varphi(\sigma), M(\sigma, s) > + \chi(s)$$

poate fi căutată sub forma

$$\varphi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \varphi_i(s).$$

Se capătă

$$\varphi_0(s) = \chi(s), \quad \varphi_i(s) = \langle \varphi_{i-1}(\sigma), M(\sigma, s) \rangle.$$

Fie  $M_i = \sup |\varphi_i(s)|$ . Rezultă

$$|\varphi_i(s)| \leq M_{i-1} M + M_{i-1} \bigvee_{\beta=t_0-\tau}^{t_0} \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\alpha + \tau, \beta - \alpha - \tau) M(\alpha, s) d\alpha.$$

Dar

$$\begin{aligned} & \bigvee_{\beta=t_0-\tau}^{t_0} \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\alpha + \tau, \beta - \alpha - \tau) M(\alpha, s) d\alpha = \sup_j \left| \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\alpha + \tau, \beta_{j+1} - \right. \\ & \quad \left. - \alpha - \tau) M(\alpha, s) d\alpha - \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\alpha + \tau, \beta_j - \alpha - \tau) M(\alpha, s) d\alpha \right| = \\ & = \sup_j \sum_j \left| \int_{t_0-\tau}^{t_0} [\eta_1(\alpha + \tau, \beta_{j+1} - \alpha - \tau) - \eta_1(\alpha + \tau, \beta_j - \alpha - \tau)] M(\alpha, s) d\alpha \right| \leq \\ & \leq M \int_{t_0-\tau}^{t_0} \sup_j \sum_j |\eta_1(\alpha + \tau, \beta_{j+1} - \alpha - \tau) - \eta_1(\alpha + \tau, \beta_j - \alpha - \tau)| d\alpha \leq M\tau V. \end{aligned}$$

Rezultă

$$|\varphi_i(s)| \leq M_{i-1} M(1 + \tau V),$$

deci

$$M_i \leq M_{i-1} (1 + \tau V)$$

și prin inducție

$$M_i \leq M^i (1 + \tau V)^i \sup |\chi(s)|.$$

De aici rezultă că seria  $\sum \lambda^i \varphi_i$  este uniform și absolut convergentă pentru  $|\lambda| < \frac{1}{M(1 + \tau V)}$  deci dacă  $|\lambda| < \frac{1}{M(1 + \tau V)}$ , ecuația considerată are soluție unică pentru orice  $\chi$ , deci operatorul  $(I - \lambda U)$ , unde  $U\varphi = \langle \varphi(\sigma), M(\sigma, s) \rangle$ , admite un invers pentru  $|\lambda| < \frac{1}{M(1 + \tau V)}$ ; rezultă că pentru  $|\rho| > M(1 + \tau V)$ , operatorul  $\rho I - U$  are invers, deci spectrul operatorului  $U$  este în cercul  $|z| \leq M(1 + \tau V)$  și lema e demonstrată.

LEMA 2. Fie  $\sigma_K, \sigma_L, \sigma_M$  spectrele operatorilor  $\langle \varphi(\sigma), K(\sigma, s) \rangle, \langle \varphi(\sigma), L(\sigma, s) \rangle, \langle \varphi(\sigma), M(\sigma, s) \rangle$ ; dacă avem  $K(\alpha, s) = L(\alpha, s) + M(\alpha, s)$  și dacă  $\langle L(\alpha, \sigma), M(\sigma, s) \rangle = 0$  atunci  $\sigma_K = \sigma_L \cup \sigma_M$ .

*Demonstrație.* Fie  $\lambda$  astfel încît  $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_L$ ; există  $\varphi(s)$  neidentic nul, astfel încît  $\varphi(s) = \lambda \langle \varphi(\sigma), L(\sigma, s) \rangle$ . Avem  $\varphi(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma), K(\sigma, s) \rangle =$

$$\begin{aligned}
&= \varphi(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma), L(\sigma, s) \rangle - \lambda \langle \varphi(\sigma), M(\sigma, s) \rangle = -\lambda \langle \varphi(\sigma), M(\sigma, s) \rangle + \\
&\quad + \lambda^2 \langle \langle \varphi(\alpha), L(\alpha, \sigma) \rangle, M(\sigma, s) \rangle = \\
&= -\lambda \langle \varphi(\sigma) - \lambda \langle \varphi(\alpha), L(\alpha, \sigma) \rangle, M(\sigma, s) \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Rezultă că ecuația

$$\varphi(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma), K(\sigma, s) \rangle = 0$$

are soluție neidentică nulă, deci  $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_K$ ; așadar  $\sigma_L \subset \sigma_K$ .

Fie  $\lambda$  astfel încît  $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_M$ ; există  $f(s)$  neidentică nulă astfel ca

$$f(s) = \lambda \langle f(\sigma), M(\sigma, s) \rangle.$$

Dacă  $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_L$ , atunci, conform celor de mai sus  $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_K$ . Dacă  $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma_L$  există  $\varphi(s)$  astfel ca

$$\varphi(s) = \lambda \langle \varphi(\sigma), L(\sigma, s) \rangle + f(s).$$

Atunci

$$\begin{aligned}
\varphi(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma), K(\sigma, s) \rangle &= \varphi(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma), L(\sigma, s) \rangle - \lambda \langle \varphi(\sigma), M(\sigma, s) \rangle = \\
&= f(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma), M(\sigma, s) \rangle + \lambda^2 \langle \langle \varphi(\alpha), L(\alpha, \sigma) \rangle, M(\sigma, s) \rangle = \\
&= f(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma) - \lambda \langle \varphi(\alpha), L(\alpha, \sigma) \rangle, M(\sigma, s) \rangle = \\
&= f(s) - \lambda \langle f(\sigma), M(\sigma, s) \rangle = 0
\end{aligned}$$

deci  $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_K$ . Rezultă  $\sigma_M \subset \sigma_K$  deci  $\sigma_L \cup \sigma_M \subset \sigma_K$ .

Fie acum  $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{C}\sigma_L$ ,  $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{C}\sigma_M$ . Pentru orice  $\chi$  ecuația

$$f(s) = \lambda \langle f(\sigma), M(\sigma, s) \rangle + \chi(s)$$

are soluție  $f(s)$ ; pentru acest  $f$ , ecuația

$$\varphi(s) = \lambda \langle \varphi(\sigma), L(\sigma, s) \rangle + f(s)$$

are soluție  $\varphi$ .

Avem

$$\begin{aligned}
\varphi(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma), K(\sigma, s) \rangle &= \varphi(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma), L(\sigma, s) \rangle - \lambda \langle \varphi(\sigma), M(\sigma, s) \rangle = \\
&= f(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma), M(\sigma, s) \rangle + \lambda^2 \langle \langle \varphi(\alpha), L(\alpha, \sigma) \rangle, M(\sigma, s) \rangle = \\
&= f(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma) - \lambda \langle \varphi(\alpha), L(\alpha, \sigma) \rangle, M(\sigma, s) \rangle = \\
&= f(s) - \lambda \langle f(\sigma), M(\sigma, s) \rangle = \chi(s)
\end{aligned}$$

deci pentru orice  $\chi$  ecuația

$$\varphi(s) - \lambda \langle \varphi(\sigma), K(\sigma, s) \rangle = \chi(s)$$

are soluție, ceea ce arată că  $\frac{1}{\lambda} \in \mathfrak{C}\sigma_K$ . Rezultă  $\mathfrak{C}\sigma_L \cup \mathfrak{C}\sigma_M \subset \mathfrak{C}\sigma_K$  deci

$\sigma_L \cup \sigma_M \supset \sigma_K$ . În definitiv  $\sigma_L \cup \sigma_M = \sigma_K$  și lema e demonstrată.

Avem, pe baza formulei de integrare prin părți ( $\sigma \geq \alpha'$ ),

$$\begin{aligned} X(t, \alpha') Y(t, t) - X(\sigma, \alpha') Y(\sigma, t) &= \int_{\sigma}^t X(\alpha, \alpha') d_{\alpha} Y(\alpha, t) + \\ + \int_{\sigma}^t \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} X(\alpha, \alpha') \right] Y(\alpha, t) d\alpha &= \int_{\sigma}^t X(\alpha, \alpha') d_{\alpha} Y(\alpha, t) + \int_{\sigma}^t \left\{ X(\alpha, \alpha') A(\alpha) + \right. \\ + \int_{-\infty}^0 X(\alpha + s, \alpha') d_s \eta_1(\alpha, s) \Big\} Y(\alpha, t) d\alpha &= \int_{\sigma}^t X(\alpha, \alpha') d_{\alpha} Y(\alpha, t) - \\ - \int_{\sigma}^t X(\alpha, \alpha') d_{\alpha} \int_{\alpha}^t A(\beta) Y(\beta, t) d\beta + \int_{\sigma}^t \left[ \int_{-\infty}^{\alpha} X(\gamma, \alpha') d_{\gamma} \eta_1(\alpha, \gamma - \right. \\ - \alpha) \Big] Y(\alpha, t) d\alpha &= \int_{\sigma}^t X(\alpha, \alpha') d_{\alpha} \left[ Y(\alpha, t) - \int_{\alpha}^t A(\beta) Y(\beta, t) d\beta \right] + \\ + \int_{-\infty}^{\sigma} X(\gamma, \alpha') d_{\gamma} \int_{\sigma}^t \eta_1(\alpha, \gamma - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha + \int_{\sigma}^t X(\gamma, \alpha') d_{\gamma} \int_{\gamma}^t \eta_1(\alpha, \gamma - \\ - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha &= \int_{\sigma}^t X(\alpha, \alpha') d_{\alpha} \left[ Y(\alpha, t) + \int_{\alpha}^t \left[ \eta_1(\beta, \alpha - \beta) - \right. \right. \\ - A(\beta) \Big] Y(\beta, t) d\beta \Big] + \int_{-\infty}^{\sigma} X(\gamma, \alpha') d_{\gamma} \int_{\sigma}^t \eta_1(\alpha, \gamma - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{\sigma} X(\gamma, \alpha') d_{\gamma} \int_{\sigma}^t \eta_1(\alpha, \gamma - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha. \end{aligned}$$

Rezultă

$$X(t, \alpha') = X(\sigma, \alpha') X(t, \sigma) + \int_{-\infty}^{\sigma} X(\gamma, \alpha') d_{\gamma} \int_{\sigma}^t \eta_1(\alpha, \gamma - \alpha) Y(\alpha, t) d\alpha.$$

De aici

$$\begin{aligned} X(\omega + s, \alpha + \tau) &= X(\sigma, \alpha + \tau) X(\omega + s, \sigma) + \\ + \int_{-\infty}^{\sigma} X(\gamma, \alpha + \tau) d_{\gamma} \int_{\sigma}^{\omega + s} \eta_1(\xi, \gamma - \xi) Y(\xi, \omega + s) d\xi. \end{aligned}$$

Avem  $t_0 - \tau \leq \alpha \leq t_0$ ,  $t_0 - \tau \leq s \leq t_0$ , deci

$$t_0 \leq \alpha + \tau \leq t_0 + \tau, \quad \omega + t_0 - \tau \leq \omega + s \leq \omega + t_0.$$

Condiția  $\sigma \geq \alpha + \tau$  este sigur verificată dacă  $\sigma \geq t_0 + \tau$ ; condiția  $\omega + s \geq \sigma$  este sigur verificată dacă  $\omega + t_0 - \tau \geq t_0 + \tau$  și  $\sigma = t_0 + \tau$ . Vom presupune deci  $\omega \geq 2\tau$  și vom lua  $\sigma = t_0 + \tau$ .

Obținem formula

$$X(\omega + s, \alpha + \tau) = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau) X(\omega + s, t_0 + \tau) + \\ + \int_{-\infty}^{t_0 + \tau} X(\gamma, \alpha + \tau) d_\gamma \int_{t_0 + \tau}^{\omega + s} \eta_1(\xi, \gamma - \xi) Y(\xi, \omega + s) d\xi.$$

Pentru  $\gamma \leq t_0$ ,  $\xi \geq t_0 + \tau$  avem  $\gamma - \xi \leq -\tau$  și deci  $\eta_1(\xi, \gamma - \xi) \equiv 0$ , deci formula poate fi scrisă

$$X(\omega + s, \alpha + \tau) = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau) X(\omega + s, t_0 + \tau) + \\ + \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\gamma, \alpha + \tau) d_\gamma \int_{t_0 + \tau}^{\omega + s} \eta_1(\xi, \gamma - \xi) Y(\xi, \omega + s) d\xi. \quad (49)$$

LEMA 3. Fie

$$L(\alpha, s) = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau) X(\omega + s, t_0 + \tau),$$

$$M(\alpha, s) = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\gamma, \alpha + \tau) d_\gamma \int_{t_0 + \tau}^{\omega + s} \eta_1(\xi, \gamma - \xi) Y(\xi, \omega + s) d\xi.$$

Avem relația

$$\langle L(\alpha, \sigma), M(\sigma, s) \rangle = 0.$$

*Demonstrație.* Pe baza formulei (49) avem

$$X(\omega + s, \alpha + \tau) = L(\alpha, s) + M(\alpha, s)$$

deci

$$\langle L(\alpha, \sigma), M(\sigma, s) \rangle = \langle L(\alpha, \sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau) - L(\sigma, s) \rangle = \\ = \langle L(\alpha, \sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau) \rangle - \langle L(\alpha, \sigma), L(\sigma, s) \rangle.$$

Avem deci de dovedit relația

$$\langle L(\alpha, \sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau) \rangle = \langle L(\alpha, \sigma), L(\sigma, s) \rangle.$$

Avem

$$\langle L(\alpha, \sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau) \rangle = L(\alpha, t_0) X(\omega + s, t_0) + \\ + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} L(\alpha, \gamma) d_\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) X(\omega + s, \xi + \tau) d\xi = \\ = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau) X(\omega + t_0, t_0 + \tau) X(\omega + s, t_0) + \\ + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(t_0 + \tau, \alpha + \tau) X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \\ - \xi - \tau) X(\omega + s, \xi + \tau) d\xi = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau) \left\{ X(t_0 + \right. \\ \left. + \omega, t_0 + \tau) X(\omega + s, t_0) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \right. \\ \left. + \tau, \gamma - \xi - \tau) X(\omega + s, \xi + \tau) d\xi \right\}.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
 < L(\alpha, \sigma), L(\sigma, s) > = L(\alpha, t_0) L(t_0 - \tau, s) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} L(\alpha, \gamma) d_\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \\
 &+ \tau, \gamma - \xi - \tau) L(\xi, s) d\xi = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau) X(t_0 + \omega, t_0 + \\
 &+ \tau) X(t_0 + \tau, t_0) X(\omega + s, t_0 + \tau) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(t_0 + \tau, \alpha + \tau) X(\omega + \\
 &+ \gamma, t_0 + \tau) d_\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) X(t_0 + \tau, \xi + \tau) X(\omega + s, t_0 + \\
 &+ \tau) d\xi = X(t_0 + \tau, \alpha + \tau) \left[ X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) + \right. \\
 &+ \left. \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) X(t_0 + \tau, \xi + \right. \\
 &\left. + \tau) d\xi \right] X(\omega + s, t_0 + \tau).
 \end{aligned}$$

Vom dovedi relația

$$\begin{aligned}
 &X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(\omega + s, t_0) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \\
 &+ \tau, \gamma - \xi - \tau) X(\omega + s, \xi + \tau) d\xi = \left[ X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) + \right. \\
 &+ \left. \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) X(t_0 + \right. \\
 &\left. + \tau, \xi + \tau) d\xi \right] X(\omega + s, t_0 + \tau).
 \end{aligned}$$

Dar, pe baza formulei (49), avem

$$\begin{aligned}
 &X(\omega + s, \xi + \tau) = X(t_0 + \tau, \xi + \tau) X(\omega + s, t_0 + \tau) + \\
 &+ \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\gamma, \xi + \tau) d_\gamma \int_{t_0 + \tau}^{\omega + s} \eta_1(\zeta, \gamma - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) d\zeta.
 \end{aligned}$$

Relația de dovedit devine

$$\begin{aligned}
 &X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(\omega + s, t_0) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \\
 &+ \tau, \gamma - \xi - \tau) X(t_0 + \tau, \xi + \tau) X(\omega + s, t_0 + \tau) d\xi + \\
 &+ \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) \left[ \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\beta, \xi + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tau) d_{\beta} \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) d\zeta \Big] d\xi = \Big[ X(t_0 + \omega, t_0 + \\
& + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_{\gamma} \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \\
& - \xi - \tau) X(t_0 + \tau, \xi + \tau) d\xi \Big] X(\omega + s, t_0 + \tau).
\end{aligned}$$

Rămâne astfel de dovedit relația

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_{\gamma} \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) \Big[ \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, \xi + \\
& + \tau) d_{\beta} \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) d\zeta \Big] d\xi = X(t_0 + \omega, t_0 + \\
& + \tau) \Big[ X(t_0 + \tau, t_0) X(\omega + s, t_0 + \tau) - X(\omega + s, t_0) \Big].
\end{aligned}$$

Vom nota

$$F(\xi, s) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, \xi + \tau) d_{\beta} \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) d\zeta.$$

Avem

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_{\gamma} \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) F(\xi, s) d\xi = \\
& = \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{t_0-\tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_{\gamma} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) \Big] F(\xi, s) d\xi = \\
& = \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{t_0-\xi-2\tau}^{t_0-\xi-\tau} X(\omega + \xi + \tau + \beta, t_0 + \tau) d_{\beta} \eta_1(\omega + \xi + \\
& + \tau, \beta) \Big] F(\xi, s) d\xi = \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{-\infty}^{t_0-\xi-\tau} X(\omega + \xi + \tau + \beta, t_0 + \tau) d_{\beta} \eta_1(\omega + \\
& + \xi + \tau, \beta) \Big] F(\xi, s) d\xi = \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{-\infty}^0 X(\omega + \xi + \tau + \beta, t_0 + \tau) d_{\beta} \eta_1(\omega + \\
& + \xi + \tau, \beta) \Big] F(\xi, s) d\xi - \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{t_0-\xi-\tau}^0 X(\omega + \xi + \tau + \beta, t_0 + \tau) d_{\beta} \eta_1(\omega + \\
& + \xi + \tau, \beta) \Big] F(\xi, s) d\xi = \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \frac{d}{d\xi} X(\omega + \xi + \tau, t_0 + \tau) - X(\omega + \xi + \tau, t_0 + \\
& + \tau) A(\xi + \tau) \Big] F(\xi, s) d\xi - \int_{t_0-\tau}^{t_0} \Big[ \int_{t_0}^{\xi+\tau} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_{\gamma} \eta_1(\xi + \tau, \gamma -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \xi - \tau) \Big] F(\xi, s) \, d\xi = X(\omega + t_0 + \tau, t_0 + \tau) F(t_0, s) - X(\omega + \\
& + t_0, t_0 + \tau) F(t_0 - \tau, s) - \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + \xi + \tau, t_0 + \tau) \, d\xi F(\xi, s) - \\
& - \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + \xi + \tau, t_0 + \tau) A(\xi + \tau) F(\xi, s) \, d\xi - \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \left[ \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\omega + \gamma, t_0 + \right. \\
& + \tau) \, d\gamma \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) \Big] F(\xi, s) \, d\xi = X(\omega + t_0 + \tau, t_0 + \\
& + \tau) \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\beta, t_0 + \tau) \, d\beta \int_{t_0 + \tau}^{\omega + s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) \, d\zeta - X(t_0 + \\
& + \omega, t_0 + \tau) \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\beta, t_0) \, d\beta \int_{t_0 + \tau}^{\omega + s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) \, d\zeta - \\
& - \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + \xi + \tau, t_0 + \tau) \, d\xi F(\xi, s) - \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + \xi + \tau, t_0 + \\
& + \tau) A(\xi + \tau) F(\xi, s) \, d\xi - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) \, d\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \\
& - \xi - \tau) F(\xi, s) \, d\xi = -X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) [X(\omega + s, t_0) - X(t_0 + \\
& + \tau, t_0) X(\omega + s, t_0 + \tau)] - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) \, d\gamma F(\gamma - \tau, s) - \\
& - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) A(\gamma) F(\gamma - \tau, s) \, d\gamma - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\omega + \gamma, t_0 + \\
& + \tau) \, d\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) F(\xi, s) \, d\xi = X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) [X(t_0 + \\
& + \tau, t_0) X(\omega + s, t_0 + \tau) - X(\omega + s, t_0)] - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\omega + \gamma, t_0 + \\
& + \tau) \, d\gamma \left[ F(\gamma - \tau, s) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) F(\xi, s) \, d\xi - \right. \\
& \left. - \int_{\gamma}^{t_0} A(\beta) F(\beta - \tau, s) \, d\beta \right].
\end{aligned}$$

Pentru a termina demonstrația lemei rămâne de arătat că ultima integrală e nulă. Vom dovedi pentru aceasta că

$$\begin{aligned}
& F(\gamma - \tau, s) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) F(\xi, s) \, d\xi - \\
& - \int_{\gamma}^{t_0} A(\beta) F(\beta - \tau, s) \, d\beta = G(\gamma, s)
\end{aligned}$$



nu depinde de  $\gamma$ . Avem

$$\begin{aligned}
 G(\gamma, s) = & \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, \gamma) d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) d\zeta - \\
 & - \int_{\gamma}^{t_0} A(\xi) \left[ \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, \xi) d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) d\zeta \right] d\xi + \\
 & + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) \left[ \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, \xi + \tau) d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \right. \\
 & \left. - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) d\zeta \right] d\xi = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(\beta, \gamma) d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) d\zeta - \\
 & - \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ \int_{\gamma}^{t_0} A(\xi) X(\beta, \xi) d\xi \right] d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) d\zeta + \\
 & + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) X(\beta, \xi + \tau) d\xi \right] d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \\
 & - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) d\zeta = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ Y(\gamma, \beta) - \int_{\gamma}^{t_0} A(\xi) Y(\xi, \beta) d\xi + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \right. \\
 & \left. + \tau, \gamma - \xi - \tau) Y(\xi + \tau, \beta) d\xi \right] d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) d\zeta.
 \end{aligned}$$

Pe baza formulei (46) rezultă

$$\begin{aligned}
 Y(\gamma, \beta) = & E + \int_{\gamma}^{\beta} A(\xi) Y(\xi, \beta) d\xi - \int_{\gamma}^{\beta} \eta_1(\xi, \gamma - \xi) Y(\xi, \beta) d\xi = E + \\
 & + \int_{\gamma}^{\beta} A(\xi) Y(\xi, \beta) d\xi - \int_{\gamma-\tau}^{\beta-\tau} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) Y(\xi + \tau, \beta) d\xi = E + \\
 & + \int_{\gamma}^{t_0} A(\xi) Y(\xi, \beta) d\xi + \int_{t_0}^{\beta} A(\xi) Y(\xi, \beta) d\xi - \\
 & - \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) Y(\xi + \tau, \beta) d\xi
 \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}
 Y(\gamma, \beta) = & \int_{\gamma}^{t_0} A(\xi) Y(\xi, \beta) d\xi + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) Y(\xi + \tau, \beta) d\xi = \\
 & = \int_{t_0}^{\beta} A(\xi) Y(\xi, \beta) d\xi + E.
 \end{aligned}$$

Prin urmare

$$G(\gamma, s) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ E + \int_{t_0}^{\beta} A(\xi) Y(\xi, \beta) d\xi \right] d_\beta \int_{t_0+\tau}^{\omega+s} \eta_1(\zeta, \beta - \zeta) Y(\zeta, \omega + s) d\zeta$$

nu depinde de  $\gamma$ . Lema este demonstrată.

LEMA 4. Dacă  $L(\alpha, s)$  este ca în lema 3, spectrul operatorului  $\langle \varphi(\sigma), L(\sigma, s) \rangle$  coincide cu cel al matricii  $X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$ .

*Demonstrație.* Formăm ecuația

$$\rho \varphi(s) = \langle \varphi(\sigma), L(\sigma, s) \rangle = \langle \varphi(\sigma), X(t_0 + \tau, \sigma + \tau) X(\omega + s, t_0 + \tau) \rangle = \\ = \langle \varphi(\sigma), X(t_0 + \tau, \sigma + \tau) \rangle X(\omega + s, t_0 + \tau).$$

Căutăm soluția ecuației sub forma

$$\varphi(s) = \frac{1}{\rho} a X(\omega + s, t_0 + \tau),$$

unde  $a$  este un vector linie, constant. Înlocuind în ecuație se capătă

$$a X(\omega + s, t_0 + \tau) = \frac{1}{\rho} a \langle X(\omega + \sigma, t_0 + \tau), X(t_0 + \tau, \sigma + \tau) \rangle X(\omega + \\ + s, t_0 + \tau),$$

sau

$$a[\rho E - \langle X(\omega + \sigma, t_0 + \tau), X(t_0 + \tau, \sigma + \tau) \rangle] X(\omega + s, t_0 + \tau) = 0.$$

Fie  $\rho \in \sigma_L$ ; atunci ecuația are soluție și această soluție este de forma arătată; dacă  $\det X(\omega + s, t_0 + \tau)$  nu este identic nul, rezultă că  $\rho$  e valoare proprie a matricii  $\langle X(\omega + \sigma, t_0 + \tau), X(t_0 + \tau, \sigma + \tau) \rangle$ . Reciproc, fie  $\rho$  o valoare proprie a acestei matrici; atunci există  $a \neq 0$  care verifică ecuația

$$a[\rho E - \langle X(\omega + \sigma, t_0 + \tau), X(t_0 + \tau, \sigma + \tau) \rangle] = 0,$$

deci

$$\varphi(s) = \frac{1}{\rho} a X(\omega + s, t_0 + \tau)$$

verifică ecuația

$$\rho \varphi(s) = \langle \varphi(\sigma), L(\sigma, s) \rangle.$$

Dacă  $\det X(\omega + s, t_0 + \tau)$  nu este identic nul,  $\varphi(s)$  nu poate fi identic nul, deci  $\rho \in \sigma_L$ . Să verificăm că  $\det X(\omega + s, t_0 + \tau)$  nu este identic nul. Din formula (47) deducem

$$x(\omega + s) = x(t_0 + \tau) X(\omega + s, t_0 + \tau) + \int_{t_0}^{t_0 + \tau} x(\sigma) d_\sigma \int_{t_0 + \tau}^{\omega + s} \eta_1(\alpha, \sigma - \\ - \alpha) X(\omega + s, \alpha) d\alpha.$$

Dacă  $\det X(\omega + s, t_0 + \tau) \equiv 0$ , există  $a \neq 0$  astfel ca  $a X(\omega + s, t_0 + \tau) = 0$ . Rezultă că soluția ecuației (45) care verifică condițiile  $x(t) \equiv 0$  pentru  $t_0 \leq t < t_0 + \tau$ ,  $x(t_0 + \tau) = a$  este astfel încît  $x(\omega + s) \equiv 0$  pentru  $t_0 - \tau \leq s \leq t_0$ , ceea ce ar atrage după sine faptul că e identic nulă peste tot unde e definită, și acest lucru e contradictoriu căci  $a \neq 0$ .

Prin urmare,  $\det X(\omega + s, t_0 + \tau)$  nu este identic nul și  $\sigma_L$  coincide cu spectrul matricii  $\langle X(\omega + \sigma, t_0 + \tau), X(t_0 + \tau, \sigma + \tau) \rangle$ .  
 Avem

$$\langle X(\omega + \sigma, t_0 + \tau), X(t_0 + \tau, \sigma + \tau) \rangle = X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) + \\ + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + \gamma, t_0 + \tau) d_\gamma \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, \gamma - \xi - \tau) X(t_0 + \tau, \xi + \tau) d\xi.$$

Folosind formula de integrare prin părți deducem

$$\int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(t + \omega, t_0 + \tau) d_t Y(t, t_0 + \tau) = X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) Y(t_0 + \tau, t_0 + \tau) - \\ - X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) Y(t_0, t_0 + \tau) - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \left[ \frac{d}{dt} X(t + \omega, t_0 + \tau) \right] Y(t, t_0 + \tau) dt = \\ = X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) - X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) - \\ - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(t + \omega, t_0 + \tau) A(t) Y(t, t_0 + \tau) dt - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \left[ \int_{-\infty}^0 X(t + \omega + s, t_0 + \tau) d_s \eta_1(t, s) \right] Y(t, t_0 + \tau) dt = \\ = X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) - X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) + \\ + \int_{-\infty}^{t_0} X(\omega + u, t_0 + \tau) d_u \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \eta_1(t, u - t) Y(t, t_0 + \tau) dt - \\ - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\omega + u, t_0 + \tau) d_u \int_u^{t_0 + \tau} \eta_1(t, u - t) Y(t, t_0 + \tau) dt = \\ = X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) - X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(u + \omega, t_0 + \tau) d_u \int_u^{t_0 + \tau} A(t) Y(t, t_0 + \tau) dt - \\ - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\omega + u, t_0 + \tau) d_u \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \eta_1(t, u - t) Y(t, t_0 + \tau) dt - \\ - \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\omega + u, t_0 + \tau) d_u \int_u^{t_0 + \tau} \eta_1(t, u - t) Y(t, t_0 + \tau) dt.$$

Rezultă

$$X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) = X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\omega + u, t_0 + \tau) d_u \left[ Y(u, t_0 + \tau) + \int_u^{t_0 + \tau} [\eta_1(t, u - t) - A(t)] Y(t, t_0 + \tau) dt \right] + \\ + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + u, t_0 + \tau) d_u \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, u - \xi - \tau) X(t_0 + \tau, \xi + \tau) d\xi.$$

Ținând seama de formula (46) rezultă

$$\begin{aligned} X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) &= X(t_0 + \omega, t_0 + \tau) X(t_0 + \tau, t_0) + \\ &+ \int_{t_0 - \tau}^{t_0} X(\omega + u, t_0 + \tau) d_u \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \eta_1(\xi + \tau, u - \xi - \tau) X(t_0 + \tau, \xi + \tau) d\xi = \\ &= \langle X(\omega + \sigma, t_0 + \tau), X(t_0 + \tau, \sigma + \tau) \rangle. \end{aligned}$$

În definitiv  $\sigma_L$  coincide cu spectrul matricii  $X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$ .

LEMA 5. Dacă  $\tau V$  e suficient de mic spectrul operatorului  $\langle \varphi(\sigma), M(\sigma, s) \rangle$ , unde  $M$  e ca în lema 3, se află în cercul  $|z| \leq 1 - \varepsilon$ .

Demonstrație. Pe baza lemei 1 spectrul operatorului  $\langle \varphi(\sigma), M(\sigma, s) \rangle$  se află în cercul  $|z| \leq M(1 + \tau V)$ ,  $M = \sup_{\sigma, s \in [t_0 - \tau, t_0]} |M(\sigma, s)|$ .

Avem

$$\begin{aligned} M(\alpha, s) &= \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\gamma, \alpha + \tau) d_\gamma \int_{t_0 + \tau}^{\omega + s} \eta_1(\xi, \gamma - \xi) X(\omega + s, \xi) d\xi = \\ &= \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\gamma, \alpha + \tau) d_\gamma \int_{t_0 + \tau}^{t_0 + 2\tau} \eta_1(\xi, \gamma - \xi) X(\omega + s, \xi) d\xi = \\ &= \int_{t_0}^{t_0 + \tau} X(\gamma, \alpha + \tau) d_\gamma \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \eta_1(\beta + \tau, \gamma - \beta - \tau) X(\omega + s, \beta + \tau) d\beta. \end{aligned}$$

Pe baza inegalității (3) deducem

$$\begin{aligned} |X(\omega + s, \beta + \tau)| &\leq e^{(V+A)\omega} \\ |X(\gamma, \alpha + \tau)| &\leq e^{(V+A)\tau}, \end{aligned}$$

unde  $A = \sup |A(t)|$ . Rezultă

$$\begin{aligned} |M(\alpha, s)| &\leq e^{(V+A)\tau} \bigvee_{\gamma=t_0}^{t_0+\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \eta_1(\beta + \tau, \gamma - \beta - \tau) X(\omega + s, \beta + \tau) d\beta \leq \\ &\leq \tau V e^{(V+A)(\omega+\tau)} \end{aligned}$$

deci  $M \leq \tau V e^{(V+A)(\omega+\tau)}$ . Rezultă că spectrul operatorului considerat se află în cercul  $|z| \leq V(1 + \tau V) e^{(V+A)(\omega+\tau)}$ . Dacă  $\tau V$  este destul de mic pentru ca  $\tau V(1 + \tau V) e^{(V+A)(\omega+\tau)} \leq 1 - \varepsilon$ , spectrul  $\sigma_M$  se află în cercul  $|z| \leq 1 - \varepsilon$ . Lema este demonstrată.

Putem acum demonstra teorema fundamentală relativă la stabilitatea soluției banale pentru sistemul de forma (45).

TEOREMA 4.23. Fie  $\tau V$  suficient de mic; dacă există  $C > 0$  astfel încât pentru orice  $t_0 \geq 0$  și orice  $n$  natural să avem  $|X^n(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)| < C$ , atunci soluția banală a sistemului (45) este uniform stabilă; dacă pentru orice  $t_0 \geq 0$  avem  $|X^n(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)| \leq k(1 - \varepsilon)^n$ , atunci soluția banală a sistemului (45) este uniform asimptotic stabilă; dacă  $X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$  are o valoare proprie în regiunea  $|z| > 1$ , soluția banală a sistemului (45) este nestabilă.

*Demonstrație.* Pe baza formulei (48) avem

$$U_{t_0+\omega, t_0} \varphi = \langle \varphi(\sigma), X(\omega + s, \sigma + \tau) \rangle$$

iar din formula (49) deducem

$$X(\omega + s, \alpha + \tau) = L(\alpha, s) + M(\alpha, s).$$

Din lema 3 rezultă

$$\langle L(\alpha, \sigma), M(\sigma, s) \rangle = 0.$$

Din lema 2 deducem că spectrul lui  $U_{t_0+\omega, t_0}$  este egal cu  $\sigma_L \cup \sigma_M$ . Din lema 4 rezultă că  $\sigma_L$  coincide cu spectrul matricii  $X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$  iar din lema 5 rezultă,  $\tau V$  fiind suficient de mic, că  $\sigma_M$  e în  $|z| \leq 1 - \varepsilon$ . Dacă

$$|X^n(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)| < C,$$

spectrul matricii  $X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$  se află în cercul  $|z| \leq 1$  și valorilor proprii de pe  $|z| = 1$  le corespund divizori elementari simpli; deducem că  $U_{t_0+\omega, t_0} = U_1 \oplus U_2$  cu  $\sigma(U_1)$  în  $|z| \leq 1 - \varepsilon$  și  $\sigma(U_2) = \sigma_L$ . De aici, pe baza teoremei 4.20, rezultă stabilitatea uniformă. Dacă

$$|X^n(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)| \leq k(1 - \varepsilon)^n$$

rezultă  $\sigma_L$  situat în  $|z| \leq 1 - \varepsilon$  deci și  $\sigma(U_2)$  situat în  $|z| \leq 1 - \varepsilon$  și stabilitatea asimptotică uniformă rezultă din teorema 4.20. Dacă  $X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$  are o valoare proprie în  $|z| > 1$ , rezultă că  $U_{t_0+\omega, t_0}$  are o asemenea valoare proprie și instabilitatea rezultă din prima parte a teoremei 4.20. Teorema este demonstrată.

*Aplicație.* 1° Să considerăm ecuația scalară

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t - \tau)$$

unde  $a(t)$  și  $b(t)$  sînt funcții continue periodice.  $x(t, t_0 + \tau)$  este soluția sistemului determinată pentru  $t \geq t_0 + \tau$  prin condițiile  $x(t, t_0 + \tau) \equiv 0$  pentru  $t_0 \leq t < t_0 + \tau$ ,  $x(t_0 + \tau, t_0 + \tau) = 1$ . Pentru  $t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau$  această soluție este dată de sistemul

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t), \quad x(t_0 + \tau, t_0 + \tau) = 1.$$

Rezultă

$$x(t, t_0 + \tau) = e^{\int_{t_0+\tau}^t a(s) ds}, \quad t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau.$$

Pe intervalul  $t_0 + 2\tau \leq t \leq t_0 + 3\tau$ , soluția e dată de sistemul

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)e^{\int_{t_0+\tau}^{t-\tau} a(s) ds}, \quad x(t_0 + 2\tau, t_0 + \tau) = e^{\int_{t_0+\tau}^{t_0+2\tau} a(s) ds}.$$

Și această soluție poate fi scrisă explicit. Procedeu continuă și conduce la formula explicită pentru  $x(\omega + t_0 + \tau, t_0 + \tau)$ . Condiția de stabilitate se scrie  $|x(\omega + t_0 + \tau, t_0 + \tau)| \leq 1$ , iar de stabilitate asimptotică  $|x(\omega + t_0 + \tau, t_0 + \tau)| \leq 1 - \varepsilon$ . După cum se vede pentru  $\tau \sup |b(t)|$  suficient de mic problema stabilității pentru ecuația scalară considerată poate fi rezolvată pînă la capăt.

2°. Să considerăm un sistem de forma

$$\dot{x}(t) = [A(t) + C(t)]x(t) + [B(t) + D(t)]x(t - \tau) \quad (50)$$

unde  $A, B, C, D$ , sînt matrici periodice cu perioadă  $\omega > \tau$ .

Demonstrăm că *dacă soluția banală a sistemului*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau) \quad (51)$$

*este uniform asimptotic stabilă și  $\int_0^\omega \{|C(t)| + |D(t)|\} dt$  este suficient de mică, atunci soluția banală a sistemului (50) este de asemenea uniform asimptotic stabilă.*

Fie  $U'_{t_0+\omega, t_0}$  operatorul atașat sistemului (50),  $U''_{t_0+\omega, t_0}$  operatorul atașat sistemului (51). Din cauza ipotezei făcute asupra sistemului (51), spectrul operatorului  $U'_{t_0+\omega, t_0}$  se află în cercul  $|z| \leq 1 - \varepsilon$  (pe baza teoremei 4.20). Dar  $\sigma(U'_{t_0+\omega, t_0}) = \sigma_{L''} \cup \sigma_{M'}$  și deci  $\sigma_{L''}$  și  $\sigma_{M'}$  se află în cercul  $|z| \leq 1 - \varepsilon$ . Avem și o descompunere de forma  $\sigma(U'_{t_0+\omega, t_0}) = \sigma_{L'} \cup \sigma_{M'}$ . Rămîne de dovedit că în ipoteza din enunț,  $\sigma_{L'}$  diferă oricît de puțin de  $\sigma_{L''}$  iar  $\sigma_{M'}$  diferă oricît de puțin de  $\sigma_{M''}$ ; pentru aceasta e suficient să arătăm că în ipoteza din enunț  $X'(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$  diferă oricît de puțin de  $X''(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)$  și că  $M'$  diferă oricît de puțin de  $M''$ .

Pentru sistemele de forma considerată avem

$$M''(\alpha, s) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X''(\omega + s, \xi + \tau) B(\xi + \tau) X''(\xi, \alpha + \tau) d\xi,$$

$$M'(\alpha, s) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X'(\omega + s, \xi + \tau) [B(\xi + \tau) + D(\xi + \tau)] X'(\xi, \alpha + \tau) d\xi.$$

Operatorii corespunzători se scriu

$$\begin{aligned} \langle M''(\sigma, s), \varphi(\sigma) \rangle'' &= M''(t_0 - \tau, s) \varphi(t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} M''(\xi, s) B(\xi + \\ &+ \tau) \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle M'(\sigma, s), \varphi(\sigma) \rangle' &= M'(t_0 - \tau, s) \varphi(t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} M'(\xi, s) [B(\xi + \tau) + D(\xi + \\ &+ \tau)] \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

**Rezultă**

$$\begin{aligned} < M''(\sigma, s), \varphi(\sigma) >'' - < M'(\sigma, s), \varphi(\sigma) >' = [M''(t_0 - \tau, s) - M'(t_0 - \\ & - \tau, s)] \varphi(t_0) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \{ [M''(\xi, s) - M'(\xi, s)] B(\xi + \tau) + M'(\xi, s) D(\xi + \\ & + \tau) \} \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Avem, notînd  $X(t, u) = X'(t, u) - X''(t, u)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X(t, u) &= [A(t) + C(t)] X'(t, u) + [B(t) + D(t)] X'(t - \tau, u) - \\ &- A(t) X''(t, u) - B(t) X''(t - \tau, u) = A(t) X(t, u) + B(t) X(t - \tau, u) + \\ &+ C(t) X'(t, u) + D(t) X'(t - \tau, u) \end{aligned}$$

și  $X(t, u) \equiv 0$  pentru  $t \leq u$ .

**Rezultă**

$$X(t, u) = \int_u^t X''(t, \alpha) [C(\alpha) X'(\alpha, u) + D(\alpha) X'(\alpha - \tau, u)] d\alpha.$$

Avem

$$|X''(t, \alpha)| \leq e^{A\tau} \text{ pentru } \alpha \leq t \leq \alpha + \tau, \quad A = \sup |A(t)|, \quad B = \sup |B(t)|.$$

Din

$$\frac{d}{dt} X''(t, \alpha) = A(t) X''(t, \alpha) + B(t) X''(t - \tau, \alpha)$$

**rezultă**

$$X''(t, \alpha) = X''(\alpha + \tau, \alpha) + \int_{\alpha + \tau}^t A(u) X''(u, \alpha) du + \int_{\alpha + \tau}^t B(u) X''(u - \tau, \alpha) du$$

deci

$$\begin{aligned} |X''(t, \alpha)| &\leq |X''(\alpha + \tau, \alpha)| + \int_{\alpha + \tau}^t |A(u)| |X''(u, \alpha)| du + \\ &+ \tau |B| e^{A\tau} \text{ pentru } \alpha - \tau \leq t \leq \alpha + 2\tau. \end{aligned}$$

**Rezultă**

$$|X''(t, \alpha)| \leq (1 + \tau B) e^{A\tau} e^{A\tau} = (1 + \tau B) e^{2A\tau} \text{ pentru } \alpha \leq t \leq \alpha + 2\tau.$$

La fel, pentru  $\alpha + 2\tau \leq t \leq \alpha + 3\tau$ , avem

$$|X''(t, \alpha)| \leq (1 + \tau B) e^{2A\tau} + \tau B (1 + \tau B) e^{2A\tau} + \int_{\alpha + 2\tau}^t |A(u)| |X''(u, \alpha)| du$$

deci

$$|X''(t, \alpha)| \leq (1 + \tau B)^2 e^{2A\tau} e^{A\tau} = (1 + \tau B)^2 e^{3A\tau}, \text{ pentru } \alpha \leq t \leq \alpha + 3\tau.$$

**Rezultă în general** pentru  $\alpha \leq t \leq \alpha + k\tau$  evaluarea

$$|X''(t, \alpha)| \leq (1 + \tau B)^{k-1} e^{kA\tau}.$$

Analog

$$|X'(t, \alpha)| \leq [1 + \tau(B + D)]^{k-1} e^{k\tau(A+C)}.$$

Dacă  $\tau < \omega \leq k\tau$ , rezultă

$$|X(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) \leq (1 + \tau B)^{k-1} e^{kA\tau} [1 + \tau(B + D)]^{k-1} e^{k\tau(A+C)} \int_{t_0+\tau}^{t_0+\tau+\omega} (|C(\alpha)| + |D(\alpha)|) d\alpha = K_1 \int_0^\omega (|C(\alpha)| + |D(\alpha)|) d\alpha$$

și se vede că dacă  $\int_0^\omega (|C(\alpha)| + |D(\alpha)|) d\alpha$  e suficient de mică  $|X'(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau) - X''(t_0 + \tau + \omega, t_0 + \tau)|$  este oricît de mică.

La fel

$$|M'(\alpha, s)| \leq \tau [1 + \tau(B + D)]^{k-1} e^{k\tau(A+C)} (B + D) e^{\tau(A+C)} = K_2$$

$$|M''(\alpha, s) - M'(\alpha, s)| \leq \tau B e^{k\tau(A+C)} (1 + \tau(B + D))^{k-1} K_1 \int_0^\omega (|C(\alpha)| + |D(\alpha)|) d\alpha + [1 + \tau(B + D)]^{k-1} e^{k\tau(A+B)} e^{\tau(A+B)} \int_0^\omega |D(\alpha)| d\alpha$$

deci

$$|M''(\alpha, s) - M'(\alpha, s)| \leq K_3 \int_0^\omega (|C(\alpha)| + |D(\alpha)|) d\alpha.$$

Ținînd seama de aceste evaluări rezultă

$$|<M''(\sigma, s), \varphi(\sigma)>'' - <M'(\sigma, s), \varphi(\sigma)>'| \leq \leq K_4 \int_0^\omega (|C(\alpha)| + |D(\alpha)|) d\alpha \|\varphi\|.$$

De aici se capătă concluzia anunțată.

## § 11. SISTEME CU PARAMETRU MIC, CU ÎNTÎRZIERE

Începem studiul sistemelor neliniare cu problema soluțiilor periodice ale sistemelor cu parametru mic.

Considerăm un sistem de forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t+s), \mu], \quad (52)$$

unde  $f$  este periodică de perioadă  $\omega > \tau$  și are proprietățile din § 1.

TEOREMA 4.24. Dacă pentru  $\mu = 0$  sistemul (52) admite o soluție periodică  $x_0(t)$ , de perioadă  $\omega$ , astfel încît sistemul în variații corespunzător nu admite soluții periodice de perioadă  $\omega$  diferite de soluția banală, atunci există  $\mu_0 > 0$  astfel încît pentru  $|\mu| < \mu_0$  sistemul (52) admite o soluție periodică unică  $x(t, \mu)$  de perioadă  $\omega$ , cu proprietatea  $\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = x_0(t)$ .



*Demonstrație.* Deoarece componentele lui  $f$  sînt diferențiabile putem scrie

$$f[t, x(t+s), 0] - f[t, x_0(t+s), 0] = A[t, x(t+s) - x_0(t+s)] + o(\|x - x_0\|),$$

unde

$$A(t, \varphi) = \int_{-\tau}^0 \varphi(s) d_s \eta(t, s).$$

Sistemul în variații corespunzător soluției  $x_0(t)$  este sistemul liniar

$$\dot{y}(t) = \int_{-\tau}^0 y(t+s) d_s \eta(t, s). \quad (53)$$

În § 1 am demonstrat relația (8) din care rezultă în particular

$$|x(\omega + s; \varphi, 0) - x(\omega + s; \varphi_0, 0) - y(\omega + s; \varphi - \varphi_0)| = o(\|\varphi - \varphi_0\|),$$

unde am notat  $x(t; \varphi, \mu)$  soluția sistemului (52) care pentru  $t \in [-\tau, 0]$  coincide cu  $\varphi$  și  $y(t; \varphi)$  soluția sistemului (53) care pentru  $t \in [-\tau, 0]$  coincide cu  $\varphi$ . Din cauza periodicității sistemului (52),  $x(t + \omega; \varphi, \mu)$  este de asemenea soluție și dacă  $x(\omega + s; \varphi, \mu) = \varphi(s)$  pentru  $s \in [-\tau, 0]$  această soluție este periodică (și reciproc). Fie  $F[\varphi, \mu] = x(\omega + s; \varphi, \mu) - \varphi$ . Dacă  $\varphi_0$  este funcția inițială a soluției periodice  $x_0(t)$ , avem  $F[\varphi_0, 0] = 0$ . Din relația (8) rezultă că pentru orice  $\mu$ ,  $F[\varphi, \mu]$  e diferențiabilă; într-adevăr,

$$F[\varphi_2, \mu] - F[\varphi_1, \mu] = x(\omega + s; \varphi_2, \mu) - \varphi_2 - x(\omega + s; \varphi_1, \mu) + \varphi_1$$

și pe baza relației (8),

$$\|F[\varphi_2, \mu] - F[\varphi_1, \mu] - I(\varphi_2 - \varphi_1) - U_\mu(\varphi_2 - \varphi_1)\| = \|x(\omega + s; \varphi_2, \mu) - x(\omega + s; \varphi_1, \mu) - y(\omega + s; \varphi_2 - \varphi_1, \mu)\| = o(\|\varphi_2 - \varphi_1\|),$$

unde  $y(t; \varphi, \mu)$  este soluția sistemului în variații corespunzător soluției  $x(t; \varphi_1, \mu)$ . Rezultă că diferențiala lui  $F[\varphi, \mu]$  este  $I - U_\mu$ , unde  $U_\mu \varphi = y(\omega + s; \varphi, \mu)$ .

În particular, diferențiala în punctul  $[\varphi_0, 0]$  este  $I - U_0$ , unde  $U_0 \varphi = y(\omega + s; \varphi)$  (reamintim că  $y(t; \varphi)$  este soluția sistemului (53), sistemul în variații corespunzător soluției  $x_0(t)$ ). Operatorul  $U_0$  este complet continuu (compact) după cum s-a arătat în § 5. Deoarece prin ipoteză sistemul (53) nu admite soluții periodice de perioadă  $\omega$  diferite de cea banală, ecuația  $\varphi - U_0 \varphi = 0$  nu are soluții diferite de cea banală. Dar atunci din proprietățile generale ale operatorilor complet continui rezultă că  $I - U_0$  e inversabil. Deoarece  $F[\varphi, \mu]$  e diferențiabilă,  $F[\varphi_0, 0] = 0$  și diferențiala în punctul  $[\varphi_0, 0]$  e inversabilă; rezultă, pe baza teoremei funcțiilor implicite în spații Banach, că există  $\mu_0 > 0$  astfel încît pentru  $|\mu| < \mu_0$  ecuația  $F[\varphi, \mu] = 0$  admite o soluție  $[\varphi_\mu, \mu]$  cu proprietatea  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \varphi_\mu = \varphi_0$ . Din  $F[\varphi_\mu, \mu] \equiv 0$  rezultă că soluția  $x(t; \varphi_\mu, \mu)$  este periodică; în plus  $\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t; \varphi_\mu, \mu) = x(t; \varphi_0, 0) = x_0(t)$ . Teorema este demonstrată.

*Aplicație.* Considerăm sistemul

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 x(t+s) d_s \eta(t, s) + f(t) + \mu g[t, x(t+s), \mu], \quad (54)$$

unde  $\eta$  are aceleași proprietăți ca în § 5, iar  $g$  are pentru  $t$  fixat drept componente funcționale definite pe spațiul funcțiilor vectoriale continue pe  $[-\tau, 0]$  și e periodică în  $t$  de perioadă  $\omega$ . Ca peste tot pînă acum presupunem  $\omega > \tau$ . Presupunem că sistemul liniar

$$\frac{dy(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 y(t+s) d_s \eta(t, s) \quad (55)$$

nu are soluții periodice de perioadă  $\omega$  diferite de cea banală. Atunci, pe baza teoremei 4.16, sistemul (54) admite pentru  $\mu = 0$  o soluție periodică unică  $x_0(t)$ , de perioadă  $\omega$ .

Sistemul în variații corespunzător este tocmai sistemul (55). Condițiile teoremei 4.23 sînt verificate, deci există  $\mu_0 > 0$  astfel încît dacă  $|\mu| < \mu_0$  sistemul (54) admite o soluție periodică  $x(t, \mu)$  unică, de perioadă  $\omega$ , cu proprietatea  $\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = x_0(t)$ .

Să presupunem acum că sistemul (55) admite soluții periodice de perioadă  $\omega$ . Conform teoremei 4.19' există un număr finit de astfel de soluții liniar independente; le vom nota  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Sistemul adjunct admite și el același număr finit de soluții periodice independente,  $q_1, q_2, \dots, q_k$ .

Sistemul (54) pentru  $\mu = 0$  admite soluții periodice de perioadă  $\omega$  dacă și numai dacă  $\int_0^\omega f(t) q_j(t) dt = 0$  pentru  $j = 1, 2, \dots, k$ . Soluțiile periodice ale sistemului (54) pentru  $\mu = 0$  sînt date de formula

$$x(t) = x(0)X(t, 0) + \int_{-\tau}^0 x(s) d_s \int_0^\tau \eta(\alpha, s - \alpha) X(t, \alpha) d\alpha + \int_0^t f(\alpha) X(t, \alpha) d\alpha;$$

unde funcțiile inițiale  $x(s)$ ,  $s \in [-\tau, 0]$  sînt date de sistemul

$$x(s) = x(0)X(\omega + s, 0) + \int_{-\tau}^0 x(\beta) d_\beta \int_{-\tau}^0 \eta(\alpha + \tau, \beta - \alpha - \tau) X(\omega + s, \alpha + \tau) d\alpha + \int_0^{\omega+s} f(\alpha) X(\omega + s, \alpha) d\alpha$$

(vezi (40)). După cum s-a văzut în § 7, soluțiile acestui sistem sînt de forma

$$x(s) = \chi(s) + \chi(0) \Gamma(-\tau, s) + \int_{-\tau}^0 \chi(\beta) d_\beta \int_{-\tau}^0 \eta(\alpha + \tau, \beta - \alpha - \tau) \Gamma(\alpha, s) d\alpha,$$

unde  $\Gamma$  depinde numai de sistemul (55), iar

$$\chi(s) = \int_0^{\omega+s} f(\alpha) X(\omega + s, \alpha) d\alpha + \sum_j \lambda_j b_j(s),$$

unde  $b_k(s)$  depind numai de sistemul (55) și  $\lambda_j$  verifică sistemul

$$\lambda_i = \sum_j \gamma_{ij} \lambda_j + f_i.$$

Dacă  $\int_0^\omega f(t) q_j(t) dt = 0, j = 1, \dots, k$ , sistemul în  $\lambda_i$  admite soluții. Proprietăți simple din algebra liniară arată că există o soluție și numai una care verifică o evaluare de forma  $|\lambda_i| \leq K_1 \max_j |f_j|$ , unde  $K_1$  depinde numai de  $\gamma_{ij}$ , deci de sistemul (55). Ținând seama de expresiile pentru  $f_j$ , rezultă o evaluare de forma  $|\lambda_i| \leq K_2 \sup |f|$ , unde  $K_2$  depinde numai de sistemul (55). Rezultă de aici că există  $\chi(s)$  unic admitînd o evaluare de forma  $|\chi(s)| \leq K_3 \sup |f|$ , unde  $K_3$  depinde numai de sistemul (55). În definiție, deducem că există o soluție periodică unică a sistemului (54), pentru  $\mu = 0$  care admite o evaluare de forma  $|x(t)| < K \sup |f|$ , unde  $K$  depinde numai de sistemul (55).

Notînd cu  $p(t)$  această soluție, soluțiile periodice de perioadă  $\omega$  ale sistemului (54) pentru  $\mu = 0$  vor fi de forma  $p(t) + \sum_{j=1}^k \alpha_j p_j(t)$ .

**TEOREMA 4.25.** *Fie*

$$P_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \mu) = \int_0^\omega g[t, p(t+s) + \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i(t+s), \mu] q_j(t) dt.$$

*Dacă  $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0$  verifică relațiile*

$$P_j(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0, 0) = 0, \quad \frac{\partial(P_1, P_2, \dots, P_k)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)} \neq 0 \text{ pentru } \alpha_j = \alpha_j^0, \mu = 0,$$

*atunci există  $\mu_0 > 0$  astfel încît pentru  $|\mu| < \mu_0$  sistemul (54) admite o soluție periodică  $x(t, \mu)$  de perioadă  $\omega$  cu proprietatea*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = p(t) + \sum_{j=1}^k \alpha_j^0 p_j(t).$$

*Se presupune că  $g$  este diferențiabilă într-o vecinătate a punctului  $p(t+s) + \sum_{i=1}^k \alpha_i^0 p_i(t+s)$ .*

**Demonstrație.** Pe baza teoremei funcțiilor implicite există funcțiile  $\alpha_j^0(\mu)$  cu  $\alpha_j^0(0) = \alpha_j^0$ , astfel ca

$$P_j[\alpha_1^0(\mu), \dots, \alpha_k^0(\mu), \mu] \equiv 0.$$

Ținând seama de felul cum sînt definite  $P_j$ , rezultă că sistemul

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 x(t+s) d_s \eta(t, s) + g[t, p(t+s) + \sum_{i=1}^k \alpha_i^0(\mu) p_i(t+s), \mu],$$

admite soluții periodice de perioadă  $\omega$ . Fie  $x_1^*(t)$  soluția periodică a acestui sistem aleasă astfel ca

$$|x_1^*| < K \sup |g[t, p(t+s) + \sum_{i=1}^k \alpha_i^0(\mu) p_i(t+s), \mu]|.$$

Punem

$$x_1(t) = p(t) + \sum_{j=1}^k \alpha_j^1 p_j(t) + \mu x_1^*(t).$$

Funcția  $x_1(t)$  este o soluție periodică, de perioadă  $\omega$ , a sistemului

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 x(t+s) d_s \eta(t, s) + f(t) + \mu g[t, p(t+s) + \sum_{j=1}^k \alpha_j^0(\mu) p_j(t+s), \mu].$$

Considerăm sistemul

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 x(t+s) d_s \eta(t, s) + g[t, x_1(t+s), \mu]. \quad (56)$$

Condiția ca acest sistem să admită soluție periodică de perioadă  $\omega$  se scrie

$$\int_0^\omega g[t, p(t+s) + \sum_{i=1}^k \alpha_i^1 p_i(t+s) + \mu x_1^*(t+s), \mu] q_j(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Acste condiții sînt verificate pentru  $\mu = 0$ ,  $\alpha_i^1 = \alpha_i^0$  și în plus determinantul funcțional în raport cu  $\alpha_1^1, \dots, \alpha_k^1$  este nenul în acest punct, deci, pe baza teoremei funcțiilor implicite, putem găsi funcțiile  $\alpha_i^1(\mu)$  cu  $\alpha_i^1(0) = \alpha_i^0$ , astfel încît condițiile să fie verificate.

Presupunem  $\alpha_i^1$  astfel alese și  $x_1(t)$  definit corespunzător. Fie  $x_2^*(t)$  soluția periodică, de perioadă  $\omega$ , a sistemului (56) care admite evaluarea

$$|x_2^*(t)| < K \sup |g[t, x_1(t+s), \mu]|.$$

Punem

$$x_2(t) = p(t) + \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 p_j(t) + \mu x_2^*(t)$$

și alegem pe  $\alpha_j^2(\mu)$  astfel încît procedeul să poată continua. Obținem astfel un șir  $\alpha_j^i(\mu)$  cu  $\alpha_j^i(0) = \alpha_j^0$  și un șir de funcții periodice

$$x_i(t) = p(t) + \sum_{j=1}^k \alpha_j^i(\mu) p_j(t) + \mu x_i^*(t)$$

care verifică relațiile

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \int_{-\infty}^0 x_i(t+s) d_s \eta(t, s) + f(t) + \mu g[t, x_{i-1}(t+s), \mu], \\ |x_i^*(t)| &< K \sup |g[t, x_{i-1}(t+s), \mu]|. \end{aligned}$$

Este ușor de verificat că pentru  $|\mu|$  suficient de mic, funcțiile  $x_i(t)$  astfel construite nu părăsesc vecinătatea punctului  $p(t+s) + \sum_{i=1}^k \alpha_i^0 p_i(t+s)$  în care  $g$  este diferențiabilă.

Dacă vom demonstra că șirul  $x_i(t)$  converge uniform, va rezulta că limita lui este o soluție periodică, de perioadă  $\omega$ , a sistemului (54) cu proprietățile din enunț.

Avem

$$x_{i+1}(t) - x_i(t) = \sum_j [\alpha_j^{i+1}(\mu) - \alpha_j^i(\mu)] p_j(t) + \mu [x_{i+1}^*(t) - x_i^*(t)].$$

Ținînd seama de felul în care au fost alese soluțiile  $x_i^*(t)$  rezultă

$$|x_{i+1}^*(t) - x_i^*(t)| \leq K \sup |g[t, x_i(t+s), \mu] - g[t, x_{i-1}(t+s), \mu]| \leq \\ \leq KL \|x_i(t+s) - x_{i-1}(t+s)\| \leq KL \sup |x_i(t) - x_{i-1}(t)|.$$

Să notăm  $a_i = \sup_k |x_{i+1}(t) - x_i(t)|$ ,  $b_i = \max_j \sup |\alpha_j^{i+1}(\mu) - \alpha_j^i(\mu)|$ ,  $L_1 = \sup \sum_{j=1}^k |p_j(t)|$ . Rezultă

$$a_i \leq L_1 b_i + |\mu| KL a_{i-1}.$$

Considerăm funcțiile

$$R_j^i(\beta_1, \dots, \beta_k, \mu, \lambda) \equiv \int_0^\omega g[t, p(t+s) + \sum_i \beta_i p_i(t+s) + \mu x_{i-1}^*(t+s) + \\ + \lambda [x_i^*(t+s) - x_{i-1}^*(t+s)], \mu] q_j(t) dt.$$

Fie  $\beta_i^l(\mu, \lambda)$  definite de relațiile  $R_j^l(\beta_1, \dots, \beta_k, \mu, \lambda) = 0$  și de condițiile  $\beta_i^l(0, 0) = \alpha_j^0$  (pe baza teoremei funcțiilor implicite). Se vede că  $\beta_i^l(\mu, 0) = \alpha_i^{l-1}(\mu)$ ,  $\beta_i^l(\mu, \mu) = \alpha_i^l(\mu)$ , deci

$$\alpha_i^l(\mu) - \alpha_i^{l-1}(\mu) = \beta_i^l(\mu, \mu) - \beta_i^l(\mu, 0) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \beta_i^l(\mu, \theta\mu) \mu.$$

De aici rezultă o evaluare de forma

$$|\alpha_i^l(\mu) - \alpha_i^{l-1}(\mu)| \leq |\mu| L_2 \sup |x_i^* - x_{i-1}^*| \leq |\mu| L_2 KL a_{i-1}$$

deoarece

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \beta_i^l = - \frac{\frac{\partial (R_1, R_2^i, \dots, R_k^l)}{\partial (\beta_1, \dots, \lambda, \beta_{i+1}, \dots, \beta_k)}}{\frac{\partial (R_1^l, \dots, R_k^l)}{\partial (\beta_1, \dots, \beta_i, \dots, \beta_k)}} \text{ și } \frac{\partial R_j}{\partial \lambda} = \mathcal{E} [x_i^*(t+s) - x_{i-1}^*(t+s)],$$

$\mathcal{E}$  fiind un operator liniar.

Deducem  $b_{i-1} \leq |\mu| LL_2 K a_{i-1}$  și deci

$$a_i \leq L_1 |\mu| LL_2 K a_i + |\mu| KL a_{i-1}, \quad a_i \leq \frac{|\mu| L_3}{1 + |\mu| L_4} a_{i-1}.$$

Ținând seama de această evaluare rezultă pentru  $|\mu|$  suficient de mic convergența seriei  $\Sigma a_i$ , deci convergența uniformă a șirului  $x_i(t)$ . Teorema este demonstrată.

## § 12. SISTEME CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT CU PARAMETRU MIC

În cele ce urmează părăsim cadrul general al sistemelor cu întârziere și considerăm numai sisteme cu argument întârziat de forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t), x(t - \tau), \mu]. \quad (57)$$

Aici  $x$  și  $f$  sînt vectori coloană;  $f$  este periodică în  $t$  de perioadă  $\omega > \tau$ .

Să presupunem că sistemul generator obținut pentru  $\mu = 0$  admite o familie de soluții periodice de perioadă  $\omega$ . Fie  $x_0(t, h)$  această familie. Sistemul în variații

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} = & f'_u[t, x_0(t, h_0), x_0(t - \tau, h_0), 0] y(t) + \\ & + f'_v[t, x_0(t, h_0), x_0(t - \tau, h_0), 0] y(t - \tau) \end{aligned} \quad (58)$$

admite soluțiile periodice  $\frac{\partial x_0(t, h_0)}{\partial h}$ . Într-adevăr, din

$$\frac{dx_0(t, h)}{dt} = f[t, x_0(t, h), x_0(t - \tau, h), 0]$$

rezultă

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial h} x_0(t, h) = & f'_u[t, x_0(t, h), x_0(t - \tau, h), 0] \frac{\partial x_0(t, h)}{\partial h} + \\ & + f'_v[t, x_0(t, h), x_0(t - \tau, h), 0] \frac{\partial x_0(t - \tau, h)}{\partial h} \end{aligned}$$

deci coloanele matricii  $\frac{\partial x_0(t, h)}{\partial h}$  reprezintă soluții ale sistemului în variații considerat. Presupunem că sistemul în variații (58) nu mai admite, oricare ar fi  $h_0$  într-un anumit domeniu, alte soluții periodice de perioadă  $\omega$  independente de acestea.

Fie  $q_1(t, h_0), \dots, q_k(t, h_0)$  soluțiile periodice independente ale sistemului adjunct sistemului (58). Dacă sistemul (57) admite o soluție periodică de perioadă  $\omega$  de forma

$$x(t, \mu) = x_0(t, h_0) + \mu x_1(t, \mu),$$

atunci

$$\int_0^\omega q_j(t, h_0) f'_\mu[t, x_0(t, h_0), x_0(t - \tau, h_0), 0] dt = 0, \quad j = 1, \dots, k \quad (59)$$

Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t, \mu) &= \frac{d}{dt} x_0(t, h_0) + \mu \frac{d}{dt} x_1(t, \mu) = \\ &= f[t, x_0(t, h_0) + \mu x_1(t, \mu), x_0(t - \tau, h_0) + \mu x_1(t - \tau, \mu), \mu] = \\ &= f[t, x_0(t, h_0), x_0(t - \tau, h_0), 0] + \mu f'_u[t, x_0(t, h_0), x_0(t - \tau, h_0), 0] x_1(t, 0) + \\ &\quad + \mu f'_v[t, x_0(t, h_0), x_0(t - \tau, h_0), 0] x_1(t - \tau, 0) + \\ &\quad + \mu f'_\mu[t, x_0(t, h_0), x_0(t - \tau, h_0), 0] + O(\mu^2). \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t, 0) &= f'_u[t, x_0(t, h_0), x_0(t - \tau, h_0), 0] x_1(t, 0) + \\ &\quad + f'_v[t, x_0(t, h_0), x_0(t - \tau, h_0), 0] x_1(t - \tau, 0) + \\ &\quad + f'_\mu[t, x_0(t, h_0), x_0(t - \tau, h_0), 0]. \end{aligned}$$

Deoarece  $x_1(t, 0)$  este periodică de perioadă  $\omega$ , rezultă, pe baza teoremei 4.18, egalitățile (59).

TEOREMA 4.26. *Fie*

$$P_j(h) \equiv \int_0^\omega q_j(t, h), f'_\mu[t, x_0(t, h), x_0(t - \tau, h), 0] dt.$$

*Dacă  $h_0$  verifică relațiile*

$$P, (h_0) = 0, \det \frac{\partial}{\partial h_i} \int_0^\omega q_i(t, h_0) f'_\mu[t, x_0(t, h), x_0(t - \tau, h), 0] dt \neq 0$$

*pentru  $h = h_0$ , iar  $f$  este analitică, atunci sistemul (57) admite o soluție periodică  $x(t, \mu)$  astfel ca*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = x_0(t, h_0).$$

*Demonstrație.* Scriem sistemul (57) sub forma

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f_0[t, x(t), x(t - \tau)] + \mu f_1[t, x(t), x(t - \tau)] + \\ &\quad + \mu^2 f_2[t, x(t), x(t - \tau)] + \dots \end{aligned}$$

unde, evident,

$$f_0(t, u, v) = f(t, u, v, 0), f_1(t, u, v) = f'_\mu(t, u, v, 0).$$

Căutăm soluția periodică sub forma

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots$$

Înlocuind în sistem obținem

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f_0[t, x_0(t), x_0(t - \tau)],$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} = & f'_{0u}[t, x_0(t), x_0(t - \tau)]x_1(t) + f'_{0v}[t, x_0(t), x_0(t - \tau)]x_1(t - \tau) + \\ & + f_1[t, x_0(t), x_0(t - \tau)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2(t)}{dt} = & f'_{0u}[t, x_0(t), x_0(t - \tau)]x_2(t) + f'_{0v}[t, x_0(t), x_0(t - \tau)]x_2(t - \tau) + \\ & + f'_{1u}[t, x_0(t), x_0(t - \tau)]x_1(t) + f'_{1v}[t, x_0(t), x_0(t - \tau)]x_1(t - \tau) + \\ & + f_2[t, x_0(t), x_0(t - \tau)] \end{aligned}$$

și așa mai departe.

Alegem  $x_0(t) = x_0(t, h_0)$ . Deoarece  $P_j(h_0) = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ , există soluții periodice ale sistemului care determină pe  $x_1(t)$ . Aceste soluții sînt de forma

$$p^1(t) + \sum_{j=1}^k \alpha_j^1 p_j(t), \quad p_j(t) = \frac{\partial x_0(t, h_0)}{\partial h_j}.$$

Pentru ca sistemul care determină pe  $x_2(t)$  să admită soluții periodice este necesar și suficient ca

$$\begin{aligned} & \int_0^\omega q_j(t, h_0) \left\{ f'_{1u}[t, x_0(t), x_0(t - \tau)] [p^1(t) + \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^k \alpha_l^1 p_l(t) + f'_{1v}[\ ] p^1(t - \tau) + \sum_{l=1}^k \alpha_l^1 p_l(t - \tau)] + f_2 \right\} dt = 0. \end{aligned}$$

Aceste condiții reprezintă un sistem de ecuații liniare în  $\alpha_i^1$  a cărui matrice are elementele  $A_{ji}$  date de

$$\begin{aligned} A_{ji} = & \int_0^\omega q_j(t, h_0) \left\{ f'_{1u}[t, x_0(t), x_0(t - \tau)] \frac{\partial x_0(t, h_0)}{\partial h_i} + f'_{1v}[\ ] \frac{\partial x_0(t - \tau, h_0)}{\partial h_i} \right\} dt = \\ = & \frac{\partial}{\partial h_i} \int_0^\omega q_j(t, h_0) f'_u[t, x_0(t, h_0), x_0(t - \tau, h_0), 0] dt. \end{aligned}$$

Conform ipotezei din enunț,  $\det A_{ji} \neq 0$ , deci putem alege, în mod unic, constantele  $\alpha_i^1$  astfel ca sistemul care determină pe  $x_2(t)$  să admită soluții periodice.

Continuînd calculul se determină succesiv în mod unic funcțiile  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ , ...

Din ipotezele de analiticitate făcute, rezultă evaluări de forma

$$|f_j| \leq K_1 L^j, \quad |f'_{ju}| + |f'_{jv}| \leq K_2 L^j.$$



Avem

$$|p^1(t)| \leq K_0 K_1 L, \quad \Sigma |p_j(t)| \leq K_3, \quad |\alpha_i^1| \leq K_4 K_1 L^2$$

deci

$$|x_1(t)| \leq K_1 L (K_0 + K_3 K_4 L).$$

Mai departe

$$\begin{aligned} |p^2(t)| &\leq K_0 [K_2 L K_1 L (K_0 + K_3 K_4 L) + K_1 L^2] = K_0 K_1 L^2 [1 + \\ &+ K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)], \quad |\alpha_i^2| \leq K_4 \{K_2 L^2 K_1 L (K_0 + K_3 K_4 L) + K_1 L^3\} = \\ &= K_1 K_4 L^3 [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)] \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} |x_2(t)| &\leq K_1 L^2 \{K_0 [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L) + K_3 K_4 L [1 + K_2 (K_0 + \\ &+ K_3 K_4 L)]]\} = K_1 L^2 (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]. \end{aligned}$$

În general

$$\begin{aligned} |p^j(t)| &\leq K_0 \{K_2 L \sup |x_{j-1}| + K_2 L^2 |\sup x_{j-2}| + \dots + \\ &+ K_2 L^{j-1} \sup |x_1| + K_1 L^j\} \end{aligned}$$

$$|\alpha_j^j| \leq K_4 \{K_2 L^2 \sup |x_{j-1}| + \dots + K_2 L^j \sup |x_1| + K_1 L^{j+1}\}$$

deci

$$\begin{aligned} |x_j(t)| &\leq K_2 L (K_0 + K_3 K_4 L) \sup |x_{j-1}| + \dots + K_2 L^{j-1} (K_0 + \\ &+ K_3 K_4 L) \sup |x_1| + K_1 L^j (K_0 + K_3 K_4 L). \end{aligned}$$

Să presupunem că

$$|x_{j-1}(t)| \leq K_1 L^{j-1} (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L^{j-2})].$$

Avem

$$\begin{aligned} |x_j(t)| &\leq K_2 L (K_0 + K_3 K_4 L) K_1 L^{j-1} (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + \\ &+ K_3 K_4 L)]^{j-2} + K_2 L^2 (K_0 + K_3 K_4 L) K_1 L^{j-2} (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + \\ &+ K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]^{j-3} + \dots + K_2 L^{j-1} (K_0 + K_3 K_4 L) K_1 L (K_0 + \\ &+ K_3 K_4 L) + K_1 L^j (K_0 + K_3 K_4 L) = K_1 L^j (K_0 + K_3 K_4 L) \{1 + K_2 (K_0 + \\ &+ K_3 K_4 L) + \dots + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]^{j-3} + \\ &+ K_2 (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]^{j-2}\} = K_1 L^j (K_0 + \\ &+ K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)] \{1 + \dots + K_2 (K_0 + \\ &+ K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]^{j-4} + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + \\ &+ K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]^{j-3}\} = K_1 L^j (K_0 + K_3 K_4 L) [1 + K_2 (K_0 + K_3 K_4 L)]^{j-1}. \end{aligned}$$

În definitiv se obține o evaluare de forma  $|x_j(t)| \leq K_5 K_6^{j-1}$  care arată că pentru  $|\mu|$  suficient de mic seria e convergentă. Cu aceasta demonstrația este încheiată.

Considerăm acum cazul sistemelor autonome de forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), x(t - \tau), \mu]. \quad (60)$$

Presupunem că pentru  $\mu = 0$  sistemul (60) admite o soluție periodică  $p(t)$  cu perioadă  $\omega_0 > \tau$ . Fie

$$A(t) = f'_u[p(t), p(t - \tau), 0], \quad B(t) = f'_v[p(t), p(t - \tau), 0].$$

Sistemul

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) + B(t)z(t - \tau) \quad (61)$$

este sistemul în variații corespunzătoare soluției  $p(t)$ ; el are coeficienții periodici de perioadă  $\omega_0$  și admite în orice caz soluția  $z(t) = \frac{dp(t)}{dt}$ .

Într-adevăr, din

$$\frac{dp(t)}{dt} = f[p(t), p(t - \tau), 0]$$

rezultă

$$\frac{d}{dt} \frac{dp}{dt} = f'_u[p(t), p(t - \tau), 0] \frac{dp(t)}{dt} = f'_v[p(t), p(t - \tau), 0] \frac{dp(t - \tau)}{dt}.$$

LEMĂ. Să presupunem că sistemul (61) nu admite soluții de forma  $z_1(t) + tz_0(t)$ ,  $z_1(t)$  fiind periodică de perioadă  $\omega_0$ . Atunci

$$\int_0^{\omega_0} q(t)G(t) dt \neq 0,$$

unde  $q(t)$  este o soluție periodică a sistemului adjunct sistemului (61), iar

$$\begin{aligned} G(t) &= f[p(t), p(t - \tau), 0] + \tau B(t) f[p(t - \tau), p(t - 2\tau), 0] = \\ &= z_0(t) + \tau B(t) z_0(t - \tau). \end{aligned}$$

Reciproc, dacă

$$\int_0^{\omega_0} q(t) G(t) dt \neq 0$$

pentru o soluție periodică a sistemului adjunct, atunci sistemul (61) nu admite soluții de forma considerată.

Demonstrație. Să presupunem că

$$\int_0^{\omega_0} q(t) G(t) dt = 0$$

pentru toate soluțiile periodice ale sistemului adjunct sistemului (61). Fie  $z(t)$  o soluție a sistemului (61) și  $z_1(t) = z(t) - tz_0(t)$ . Avem

$$\begin{aligned} \frac{dz_1(t)}{dt} &= \frac{dz(t)}{dt} - z_0(t) - t \frac{dz_0(t)}{dt} = A(t)z(t) + B(t)z(t - \tau) - z_0(t) - \\ &- tA(t)z_0(t) - tB(t)z_0(t - \tau) = A(t)[z(t) - tz_0(t)] + B(t)[z(t - \tau) - \\ &- (t - \tau)z_0(t - \tau)] - z_0(t) - \tau B(t)z_0(t - \tau) = A(t)z_1(t) + \\ &+ B(t)z_1(t - \tau) - G(t). \end{aligned}$$

Deoarece

$$\int_0^{\omega_0} q(t)G(t)dt = 0$$

pentru toate soluțiile periodice de perioadă  $\omega_0$  ale sistemului adjunct sistemului (61), pe baza teoremei 4.19 există o soluție  $z_1(t)$  periodică de perioadă  $\omega_0$ , deci o soluție  $z(t)$  a sistemului (61) de forma  $z_1(t) + tz_0(t)$  ceea ce am exclus. La fel se vede că dacă sistemul (61) admite soluții de această formă, integrala trebuie să fie nulă pentru toate soluțiile periodice de perioadă  $\omega_0$  ale sistemului adjunct sistemului (61). Lema este demonstrată.

**TEOREMA 4.27.** *Dacă sistemul (61) nu admite soluții periodice de perioadă  $\omega_0$  independente de  $z_0(t)$  și nici soluții de forma  $z_1(t) + tz_0(t)$ , cu  $z_1(t)$  periodică de perioadă  $\omega_0$ , atunci pentru  $|\mu|$  suficient de mic sistemul (60) admite o soluție periodică  $x(t, \mu)$  de perioadă  $\omega(\mu)$  astfel ca*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \omega(\mu) = \omega_0, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = p(t).$$

**Demonstrație.** Fie  $\omega(\mu) = \omega_0(1 + \mu\alpha(\mu))$ ,  $t = s[1 + \mu\alpha(\mu)]$ ,  $y(s, \mu) = x[s(1 + \mu\alpha), \mu]$ . Avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} y(s, \mu) &= \frac{d}{dt} x[s(1 + \mu\alpha), \mu] (1 + \mu\alpha) = \\ &= (1 + \mu\alpha) f\{x[s(1 + \mu\alpha), \mu], x[s(1 + \mu\alpha) - \tau, \mu], \mu\} = \\ &= (1 + \mu\alpha) f[y(s, \mu), y(s - \theta(\mu), \mu), \mu], \quad \theta(\mu) = \frac{\tau}{1 + \mu\alpha(\mu)}. \end{aligned}$$

Dacă  $x$  e periodică de perioada  $\omega(\mu)$ ,  $y$  va fi periodică de perioadă  $\omega_0$  și reciproc. Avem

$$\frac{d}{ds} y(s, \mu) = f[y(s, \mu), y(s - \theta, \mu), \mu] + \mu\alpha f[y(s, \mu), y(s - \theta, \mu), \mu]. \quad (62)$$

Punem  $y(s, \mu) = p(s) + \mu z(s, \mu)$ . Rezultă

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} p(s) + \mu \frac{d}{ds} z(s, \mu) &= f[p(s) + \mu z(s, \mu), p(s - \theta) + \mu z(s - \theta, \mu), \mu] + \\ &+ \mu \alpha f[p(s) + \mu z(s, \mu), p(s - \theta) + \mu z(s - \theta, \mu), \mu] = \\ &= f[p(s), p(s - \theta), 0] + \mu f'_\mu[p(s), p(s - \theta), 0] z(s, \mu) + \\ &+ \mu f'_v[p(s), p(s - \theta), 0] z(s - \theta, \mu) + \mu f'_\mu[p(s), p(s - \theta), 0] + \\ &+ \mu \alpha f[p(s), p(s - \theta), 0] + \mu O(\mu) = f[p(s), p(s - \tau), 0] + \\ &+ \mu f'_\mu[p(s), p(s - \tau), 0] z(s, \mu) + \mu f'_v[p(s), p(s - \tau), 0] z(s - \theta, \mu) + \\ &+ \mu f'_\mu[p(s), p(s - \tau), 0] + \mu \alpha f[p(s), p(s - \tau), 0] + \\ &+ f[p(s), p(s - \theta), 0] - f[p(s), p(s - \tau), 0] + \mu O(\mu). \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned} f[p(s), p(s - \theta), 0] - f[p(s), p(s - \tau), 0] &= \\ = f'_v[p(s), p(s - \tau), 0] [p(s - \theta) - p(s - \tau)] + O(\mu^2) &= \\ = f'_v[p(s), p(s - \tau), 0] \dot{p}(s - \tau) (\theta - \tau) + O(\mu^2) &= \\ = \frac{\mu \alpha \tau}{1 + \mu \alpha} f'_v[p(s), p(s - \tau), 0] f[p(s - \tau), p(s - 2\tau), 0] + O(\mu^2). \end{aligned}$$

Rezultă

$$\frac{dz(s, \mu)}{ds} = A(s) z(s, \mu) + B(s) z(s - \theta, \mu) + F(s) + \alpha(\mu) G(s) +$$

$$+ \mu H(s, z(s, \mu), z(s - \theta, \mu), \mu), \quad (63)$$

unde am notat

$$F(s) = f'_\mu[p(s), p(s - \tau), 0].$$

Considerăm sistemul

$$\dot{z}(s) = A(s) z(s) + B(s) z(s - \tau) + F(s) + \alpha_0 G(s). \quad (64)$$

Condiția ca acest sistem să aibă o soluție periodică de perioadă  $\omega_0$  este

$$\int_0^{\omega_0} q(s) [F(s) + \alpha_0 G(s)] ds = 0.$$

Deoarece conform ipotezei din enunț, pe baza lemei rezultă

$$\int_0^{\omega_0} q(s) G(s) ds \neq 0$$

această condiție permite determinarea unică a lui  $\alpha_0$ . Fie  $\alpha_0$ , determinat astfel și  $z_0(s)$  soluția periodică a sistemului (64) care admite evaluarea

$$|z_0(s)| \leq K (\sup |F| + |\alpha_0| \sup |G|).$$

Formăm sistemul

$$\dot{z}(s) = A(s)z(s) + B(s)z(s - \tau) + F(s) + \alpha_1(\mu)G(s) + \\ + B(s)[z_0(s - \theta_0) - z_0(s - \tau)] + \mu H_0[s, z_0(s), z_0(s - \theta_0), \mu], \quad (65)$$

unde  $\theta_0 = \frac{\tau}{1 + \mu\alpha_0}$ , iar  $H_0$  este ceea ce devine  $H$  când  $\alpha$  se înlocuiește cu  $\alpha_0$ . Sistemul (65) admite soluție periodică de perioadă  $\omega_0$  dacă și numai dacă

$$\int_0^{\omega_0} q(s) \{F(s) + \alpha_1 G(s) + B(s)[z_0(s - \theta_0) - z_0(s - \tau)] + \\ + \mu H_0[s, z_0(s), z_0(s - \theta_0), \mu]\} ds = 0.$$

Deoarece

$$\int_0^{\omega_0} q(s) G(s) ds \neq 0,$$

această ecuație permite determinarea unică a lui  $\alpha_1(\mu)$  astfel ca  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \alpha_1(\mu) = \alpha_0$ .

Presupunem  $\alpha_1(\mu)$  astfel determinat și fie  $z_1(s, \mu)$  soluția periodică corespunzătoare aleasă în mod unic la fel ca mai sus. Formăm sistemul

$$\dot{z}(s) = A(s)z(s) + B(s)z(s - \tau) + F(s) + \alpha_2(\mu)G(s) + \\ + B(s)[z_1(s - \theta_1, \mu) - z_1(s - \tau, \mu)] + \mu H_1[s, z_1(s, \mu), z_1(s - \theta_1, \mu), \mu],$$

unde  $\theta_1 = \frac{\tau}{1 + \mu\alpha_1}$ , iar  $H_1$  este ceea ce devine  $H$  când  $\alpha$  se înlocuiește cu  $\alpha_1$ .

Ca mai sus, din condiția ca acest sistem să admită o soluție periodică, de perioadă  $\omega_0$  se determină  $\alpha_2(\mu)$  și apoi se alege soluția periodică  $z_2(s, \mu)$ . În general, se consideră sistemul

$$\dot{z}(s) = A(s)z(s) + B(s)z(s - \tau) + F(s) + \alpha_n(\mu)G(s) + \\ + B(s)[z_{n-1}(s - \theta_{n-1}, \mu) - z_{n-1}(s - \tau, \mu)] + \\ + \mu H_{n-1}[s, z_{n-1}(s, \mu), z_{n-1}(s - \theta_{n-1}, \mu), \mu],$$

unde  $\theta_{n-1} = \frac{\tau}{1 + \mu\alpha_{n-1}}$ , iar  $H_{n-1}$  este ceea ce devine  $H$  când  $\alpha$  este înlocuit

cu  $\alpha_{n-1}$ . Condiția ca acest sistem să admită o soluție periodică permite determinarea lui  $\alpha_n(\mu)$  și apoi se alege soluția periodică  $z_n(s, \mu)$ . Dacă demonstrăm că șirurile  $\alpha_n(\mu)$  și  $z_n(s, \mu)$  converg uniform pentru  $|\mu| \leq \mu_0$  și dacă

$$\alpha(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(\mu), \quad z(s, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(s, \mu), \quad \theta(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(\mu),$$

atunci  $z(s, \mu)$  verifică sistemul (63). Calculele efectuate arată că  $y(s, \mu) = p(s) + \mu z(s, \mu)$  este o soluție periodică de perioadă  $\omega_0$  a sistemului (62)

și  $x(t, \mu)$  obținută din  $y(s, \mu)$  punînd  $s = \frac{t}{1 + \mu\alpha}$  va fi o soluție periodică de perioadă  $\omega(\mu) = \omega_0(1 + \mu\alpha)$  a sistemului (60) care pentru  $\mu \rightarrow 0$  tinde către  $p(t)$ . În acest fel, pentru ca teorema să fie demonstrată, rămîne să demonstrăm convergența aproximațiilor succesive. Avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [z_{n+1}(s, \mu) - z_n(s, \mu)] &= A(s) [z_{n+1}(s, \mu) - z_n(s, \mu)] + \\ &+ B(s) [z_{n+1}(s - \tau, \mu) - z_n(s - \tau, \mu)] + [\alpha_{n+1}(\mu) - \alpha_n(\mu)] G(s) + \\ &+ B(s) [z_n(s - \theta_n, \mu) - z_{n-1}(s - \theta_{n-1}, \mu)] + B(s) [z_{n-1}(s - \tau, \mu) - \\ &- z_n(s - \tau, \mu)] + \mu H_n - \mu H_{n-1}. \end{aligned}$$

Fie

$$b_n = \sup |z_{n+1}(s, \mu) - z_n(s, \mu)|, \quad a_n = \sup |\alpha_{n+1}(\mu) - \alpha_n(\mu)|.$$

Atunci rezultă

$$b_n \leq M_0 a_n + |\mu| M_1 b_{n-1} + |\mu| M_2 b_{n-1} + |\mu| M_3 a_{n-1}$$

deci

$$b_n \leq M_0 a_n + |\mu| M (b_{n-1} + a_{n-1}).$$

Mai departe, din

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_0} q(s) \{F(s) + \alpha_{n+1} G(s) + B(s) [z_n(s - \theta_n, \mu) - z_n(s - \tau, \mu)] + \\ + \mu H_n\} ds = 0 \\ \int_0^{\omega_0} q(s) \{F(s) + \alpha_n G(s) + B(s) [z_{n-1}(s - \theta_{n-1}, \mu) - z_{n-1}(s - \tau, \mu)] + \\ + \mu H_{n-1}\} ds = 0 \end{aligned}$$

rezultă

$$\begin{aligned} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \int_0^{\omega_0} q(s) G(s) ds = \int_0^{\omega_0} q(s) B(s) [z_n(s - \theta_n, \mu) - z_{n-1}(s - \\ - \theta_{n-1}, \mu) - z_n(s - \tau, \mu) + z_{n-1}(s - \tau, \mu)] ds + \mu \int_0^{\omega_0} q(s) [H_n - H_{n-1}] ds. \end{aligned}$$

De aici se capătă

$$a_n \leq M_4 |\mu| b_{n-1} + M_5 |\mu| b_{n-1} + M_6 |\mu| a_{n-1}$$

deci

$$a_n \leq |\mu| M (b_{n-1} + a_{n-1}).$$

Rezultă, în definitiv,

$$b_n + a_n \leq |\mu| M' (b_{n-1} + a_{n-1}),$$

ceea ce arată că dacă  $|\mu|$  e suficient de mic, convergența uniformă este asigurată.

Evaluările făcute au presupus evaluări prealabile ale aproximațiilor succesive care să asigure că aceste aproximații nu părăsesc un anumit domeniu, relativ la care se calculează constantele  $M$  care apar în aceste evaluări. Asemenea evaluări prealabile se obțin imediat prin inducție. Teorema este demonstrată.

Continuând studiul sistemelor de forma (60) vom presupune că pentru  $\mu = 0$ , sistemul admite o familie de soluții periodice  $p(t, c_1, \dots, c_k)$  de perioadă  $\omega_0(c_1, c_2, \dots, c_k) > \tau$ . Vom face ipoteza că  $\omega_0(c_1, c_2, \dots, c_k)$  admite derivate parțiale continue. Acolo unde nu există pericol de confuzii vom scrie  $c$  în loc de  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ . Fie

$$A(t, c) = f_u[p(t, c), p(t - \tau, c), 0], \quad B(t, c) = f_v[p(t, c), p(t - \tau, c), 0].$$

Considerăm sistemul

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t, c)z(t) + B(t, c)z(t - \tau). \quad (66)$$

Avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(t, c) &= f[p(t, c), p(t - \tau, c), 0] \\ \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} p(t, c) &= f_u[p(t, c), p(t - \tau, c), 0] \frac{dp(t, c)}{dt} + \\ &+ f_v[p(t, c), p(t - \tau, c), 0] \frac{dp(t - \tau, c)}{dt} = A(t, c) \frac{d}{dt} p(t, c) + \\ &+ B(t, c) \frac{d}{dt} p(t - \tau, c), \end{aligned}$$

deci  $\frac{d}{dt} p(t, c)$  este o soluție a sistemului (66) și această soluție este periodică de perioadă  $\omega_0(c)$ .

La fel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial p}{\partial c_i} &= \frac{\partial}{\partial c_i} \frac{dp}{dt} = \frac{\partial}{\partial c_i} f[p(t, c), p(t - \tau, c), 0] = \\ &= A(t, c) \frac{\partial p(t, c)}{\partial c_i} + B(t, c) \frac{\partial p(t - \tau, c)}{\partial c_i} \end{aligned}$$

și deci  $\frac{\partial p}{\partial c_i}$  sînt soluții ale sistemului (66). Dacă  $\omega_0(c)$  nu e constantă, aceste soluții nu sînt periodice. În cele ce urmează vom considera tocmai cazul cînd  $\omega_0(c)$  nu e constantă.

Fie  $c^*$  o valoare fixată a lui  $c$ . Considerăm funcția  $p \left[ \frac{\omega_0(c)}{\omega_0(c^*)} t, c \right]$  care este periodică de perioadă  $\omega_0(c^*)$ . Derivatele ei în raport cu  $c_i$  în punc-

tul  $c^*$  vor fi funcții periodice de perioadă  $\omega_0(c^*)$ . Vom nota aceste derivate cu  $\varphi_i(t, c^*)$ .

Avem

$$\varphi_i(t, c^*) = \frac{\partial p\left(\frac{\omega_0(c^*)}{\omega_0(c^*)}t, c^*\right)}{\partial c_i} + \frac{1}{\omega(c^*)} \frac{dp\left(\frac{\omega_0(c^*)}{\omega_0(c^*)}t, c^*\right)}{dt} \frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i} t$$

deci

$$\frac{\partial p(t, c^*)}{\partial c_i} = \varphi_i(t, c^*) - \frac{t}{\omega_0(c^*)} \frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i} \frac{dp(t, c^*)}{dt}$$

Considerăm funcția

$$z(t) = t \frac{dp(t, c^*)}{dt} = tf[p(t, c^*), p(t - \tau, c^*), 0].$$

Avem

$$\frac{dz}{dt} = f[p(t, c), p(t - \tau, c^*), 0] + tA(t, c^*) \frac{dp(t, c^*)}{dt} + tB(t, c^*) \frac{dp(t - \tau, c^*)}{dt}$$

deci

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = & A(t, c^*)z(t) + B(t, c^*)z(t - \tau) + f[p(t, c^*), p(t - \tau, c^*), 0] + \\ & + \tau B(t, c^*)f[p(t - \tau, c^*), p(t - 2\tau, c^*), 0]. \end{aligned}$$

Notînd

$$G(t, c^*) = f[p(t, c^*), p(t - \tau, c^*), 0] + \tau B(t, c^*)f[p(t - \tau, c^*), p(t - 2\tau, c^*), 0]$$

rezultă

$$\frac{dz}{dt} = A(t, c^*)z(t) + B(t, c^*)z(t - \tau) + G(t, c^*). \quad (67)$$

Presupunem că pentru indicele  $i$ ,  $\frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i} \neq 0$ . Atunci

$$\frac{\omega_0(c^*)}{\frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i}} \varphi_i(t, c^*) = z(t) - \frac{\partial p(t, c^*)}{\partial c_i} \frac{\omega_0(c^*)}{\frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i}}.$$

Dar  $\frac{\partial p(t, c^*)}{\partial c_i} \frac{\omega_0(c^*)}{\frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i}}$  este soluție a sistemului (66) cu  $c = c^*$ , iar  $z$

verifică sistemul (67); rezultă că  $\frac{\omega_0(c^*)}{\frac{\partial \omega_0(c^*)}{\partial c_i}} \varphi_i(t, c^*)$  verifică sistemul (67).

Cum  $\varphi_i(t, c^*)$  este periodică de perioadă  $\omega_0(c^*)$ , rezultă că sistemul (67) admite soluții periodice de perioadă  $\omega_0(c^*)$ .



Pe de altă parte,

$$\frac{\partial p(t, c)}{\partial c_1} = \varphi_1(t, c) - \frac{t}{\omega_0(c)} \frac{\partial \omega_0(c)}{\partial c_1} \frac{d}{dt} p(t, c)$$

$$\frac{\partial p(t, c)}{\partial c_j} = \varphi_j(t, c) - \frac{t}{\omega_0(c)} \frac{\partial \omega_0(c)}{\partial c_j} \frac{d}{dt} p(t, c).$$

Rezultă

$$\frac{\partial \omega_0(c)}{\partial c_j} \frac{\partial p(t, c)}{\partial c_1} - \frac{\partial \omega_0(c)}{\partial c_1} \frac{\partial p(t, c)}{\partial c_j} = \frac{\partial \omega_0(c)}{\partial c_j} \varphi_1(t, c) - \frac{\partial \omega_0(c)}{\partial c_1} \varphi_j(t, c)$$

și deoarece  $\varphi_j(t, c)$  sînt periodice de perioadă  $\omega_0(c)$ , funcția din primul membru este periodică de perioadă  $\omega_0(c)$ . Rezultă că pentru toți  $c$  sistemul (66) admite cel puțin soluțiile periodice de perioadă  $\omega_0(c)$ ,

$$\frac{d}{dt} p(t, c), \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial c_j} \frac{\partial p(t, c)}{\partial c_1} - \frac{\partial \omega_0}{\partial c_1} \frac{\partial p(t, c)}{\partial c_j}, \quad (j = 2, 3, \dots, k).$$

Sistemul adjunct sistemului (66) va admite și el  $k$  soluții periodice de perioadă  $\omega_0(c)$  pe care le vom nota cu  $\psi_j(t, c)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Deoarece sistemul (67) admite soluții periodice de perioadă  $\omega_0(c^*)$ , rezultă, pe baza teoremei 4.18, că

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) G(s, c^*) ds = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

**TEOREMA 4.28.** *Dacă pentru  $|\mu| < \mu_0$  sistemul (50) admite o soluție periodică  $x(t, c^*, \mu)$  de perioadă  $\omega(c^*, \mu)$  astfel ca*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, c^*, \mu) = p(t, c^*), \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \omega(c^*, \mu) = \omega_0(c^*),$$

atunci

$$P_j(c^*) = 0,$$

unde

$$P_j(c) \equiv \int_0^{\omega_0(c)} \psi_j(t, c) f_\mu[p(t, c), p(t - \tau, c), 0] dt, \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

**Demonstrație.** Fie  $\omega(c^*, \mu) = \omega_0(c^*) [1 + \mu\alpha(c^*), \mu]$ . Facem schimbarea de variabilă  $t = s [1 + \mu\alpha(c^*, \mu)]$ . Notăm

$$y(s, c^*, \mu) = x[s(1 + \mu\alpha), c^*, \mu].$$

Avem

$$\frac{d}{ds} y(s, c^*, \mu) = (1 + \mu\alpha) f[y(s, c^*, \mu), y(s - \theta(c^*, \mu), c^*, \mu)],$$

unde

$$\theta(c^*, \mu) = \frac{\tau}{1 + \mu\alpha(c^*, \mu)}.$$

Punem

$$y(s, c^*, \mu) = p(s, c^*) + \mu z(s, c^*, \mu).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \frac{dp(s, c^*)}{ds} + \mu \frac{d}{ds} z(s, c^*, \mu) &= (1 + \mu\alpha) f[p(s, c^*) + \mu z(s, c^*, \mu), p(s - \theta, c^*) + \\ &+ \mu z(s - \theta, c^*, \mu), \mu] = (1 + \mu\alpha) f[p(s, c^*), p(s - \tau, c^*), 0] + \\ &+ (1 + \mu\alpha) \{f[p(s, c^*) + \mu z(s, c^*, \mu), p(s - \theta, c^*) + \mu z(s - \theta, c^*, \mu), \mu] - \\ &- f[p(s, c^*), p(s - \tau, c^*), 0]\} = (1 + \mu\alpha) f[p(s, c^*), p(s - \tau, c^*), 0] + \\ &+ (1 + \mu\alpha) \{A(s, c^*) \mu z(s, c^*, \mu) + B(s, c^*) [\mu z(s - \theta, c^*, \mu) + p(s - \theta, c^*) - \\ &- p(s - \tau, c^*)] + \mu f_\mu[p(s, c^*), p(s - \tau, c^*), 0] + O(\mu^2)\} = \\ &= (1 + \mu\alpha) f[p(s, c^*), p(s - \tau, c^*), 0] + \mu(1 + \mu\alpha) A(s, c^*) z(s, c^*, \mu) + \\ &+ \mu(1 + \mu\alpha) B(s, c^*) z(s - \theta, c^*, \mu) + (1 + \mu\alpha) \frac{\mu\alpha\tau}{1 + \mu\alpha} B(s, c^*) \frac{d}{dt} p(s - \\ &- \tau, c^*) + \mu f_\mu[p(s, c^*), p(s - \tau, c^*), 0] + O(\mu^2). \end{aligned}$$

De aici se capătă

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} z(s, c^*, \mu) &= A(s, c^*) z(s, c^*, \mu) + B(s, c^*) z(s - \theta, c^*, \mu) + \\ &+ f_\mu[p(s, c^*), p(s - \tau, c^*), 0] + \alpha f[p(s, c^*), p(s - \tau, c^*), 0] + \\ &+ \alpha\tau B(s, c^*) f[p(s - \tau, c^*), p(s - 2\tau, c^*), 0] + O(\mu). \end{aligned}$$

Notînd

$$F(s, c^*) = f_\mu[p(s, c^*), p(s - \tau, c^*), 0]$$

avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} z(s, c^*, \mu) &= A(s, c^*) z(s, c^*, \mu) + B(s, c^*) z(s - \tau, c^*, \mu) + F(s, c^*) + \\ &+ \alpha G(s, c^*) + \mu H[s, z(s, c^*, \mu), z(s - \theta, c^*, \mu), \mu]. \end{aligned} \quad (68)$$

Dacă  $x(t, \mu)$  este de perioadă  $\omega(c^*, \mu)$ , atunci  $y(s, c^*, \mu)$  este periodică de perioadă  $\omega_0(c^*)$ , deci  $z(s, c^*, \mu)$  este periodică de perioadă  $\omega_0(c^*)$ . Deoarece sistemul (68) admite soluții periodice de perioadă  $\omega_0(c^*)$ , pe baza teoremei 4.19 rezultă

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) \{F(s, c^*) + \alpha G(s, c^*) + \mu H\} ds = 0.$$

Am văzut însă că

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) G(s, c^*) ds = 0,$$

deci

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) \{F(s, c^*) + \mu H\} ds = 0.$$

Cum această relație este verificată pentru toți  $\mu$  cu  $|\mu| < \mu_0$ , rezultă

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) F(s, c^*) ds = 0,$$

deci  $P_j(c^*) = 0$  și teorema este demonstrată.

Pentru obținerea unor condiții suficiente de existență a soluțiilor periodice se poate folosi o metodă dată de S. N. Simanov. Fie  $z_1, z_2, \dots, z_k$  soluțiile periodice de perioadă  $\omega_0(c^*)$  ale sistemului (66) pentru  $c = c^*$ . Vom presupune că sistemul (66) nu admite soluții periodice de perioadă  $\omega_0(c^*)$  independente de acestea și nici soluții de forma  $z_0(t) + t \sum_{i=1}^k \gamma_i z_i(t, c^*)$ , unde  $z_0$  e periodică de perioadă  $\omega_0(c^*)$ . Această ultimă ipoteză este echivalentă cu faptul că

$$\det \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) [z_i(s, c^*) + \tau B(s, c^*) z_i(s - \tau, c^*)] ds \neq 0.$$

Într-adevăr, funcția  $z(t) = t \sum_j \gamma_j \varphi_j$  verifică sistemul

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= A(t, c^*) z(t) + B(t, c^*) z(t - \tau) + \\ &+ \sum_j \gamma_j [z_j(t, c^*) + \tau B(t, c^*) z_j(t - \tau, c^*)]. \end{aligned} \quad (69)$$

Dacă determinantul e nul, se pot alege  $\gamma_i$  astfel ca

$$\sum_i \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_i(s, c^*) [z_i(s, c^*) + \tau B(s, c^*) z_i(s - \tau, c^*)] ds \gamma_i = 0$$

deci sistemul (69) admite o soluție  $z_0(t)$  periodică de perioadă  $\omega_0(c^*)$ . Atunci  $z_0(t) - t \sum_j \gamma_j \varphi_j$  ar fi soluție a sistemului (66). Reciproc, dacă există

o soluție de această formă a sistemului (66), funcția  $z_0(t)$  verifică sistemul (69); dacă sistemul (69) are soluție periodică, există  $\gamma_j$  pentru care sistemul de ecuații liniare are soluții, deci determinantul e nul.

Să formăm acum sistemul ajutător

$$\begin{aligned} \frac{dz(s)}{ds} &= A(s, c^*) z(s) + B(s, c^*) z(s - \tau) + B(s, c^*) [z(s - \theta) - z(s - \tau)] + \\ &+ F(s, c^*) + \alpha(c^*, \mu) G(s, c^*) + \mu H[s, z(s), z(s - \theta), \mu] + \\ &+ \sum_{i=1}^k W_i [z_i(s, c^*) + \tau B(s, c^*) z_i(s - \tau, c^*)]. \end{aligned} \quad (70)$$

Demonstrăm că se poate construi un procedeu de aproximații succesive care să permită determinarea simultană a constantelor  $W_j$  și a unei soluții periodice  $z(s, M_1, \dots, M_k, \alpha, \mu)$  a sistemului (70), corespunzătoare unei soluții  $\sum M_j z_j$  a sistemului (66). Dacă se pot alege  $M_j(\mu)$  și  $\alpha_j(\mu)$  astfel încît pentru soluția corespunzătoare să avem  $W_j = 0, j = 1, \dots, k$ , această soluție verifică sistemul (68) și conduce la o soluție periodică de perioadă  $\omega(c^*, \mu)$  a sistemului (60). Alegem

$$z^0 = M_1 z_1 + \dots + M_k z_k, \quad W_j^0 = 0$$

și considerăm sistemul

$$\frac{dz(s)}{ds} = A(s, c^*) z(s) + B(s, c^*) z(s - \tau) + B(s, c^*) [z^0(s - \theta) - z^0(s - \tau)] + \\ + F(s, c^*) + \alpha(c^*, \mu) G(s, c^*) + \mu H[s, z^0(s), z^0(s - \theta), \mu] + \sum_j W_j \chi_j(s, c^*),$$

unde am notat

$$\chi_j(s, c^*) = z_j(s, c^*) + \tau B(s, c^*) z_j(s - \tau, c^*).$$

Acest sistem admite soluții periodice de perioadă  $\omega_0(c^*)$  dacă și numai dacă

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) \{B(s, c^*) [z^0(s - \theta) - z^0(s - \tau)] + \\ + F(s, c^*) + \mu H + \sum W_i \chi_i\} ds = 0.$$

Deoarece

$$\det \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_i \chi_i ds \neq 0$$

aceste condiții permit determinarea unică a constantelor  $W_i^1$  și apoi a soluției periodice

$$z^1(s) = M_1 z_1 + \dots + M_k z_k + z^{1*}(s).$$

Procedeu continuă; se formează sistemul

$$\frac{dz(s)}{ds} = A(s, c^*) z(s) + B(s, c^*) z(s - \tau) + B(s, c^*) [z^{n-1}(s - \theta) - \\ - z^{n-1}(s - \tau)] + F(s, c^*) + \alpha(c^*, \mu) G(s, c^*) + \\ + \mu H[s, z^{n-1}(s), z^{n-1}(s - \theta), \mu] + \sum W_i \chi_i.$$

Se determină  $W_i^n$  astfel ca acest sistem să admită soluții periodice de perioadă  $\omega_0(c^*)$  și se alege soluția periodică

$$z^n(s) = M_1 z_1 + \dots + M_k z_k + z^{n*}(s),$$

soluția  $z^{n*}(s)$  fiind determinată astfel încît

$$|z^{n*}(s)| < LK,$$

unde  $L$  depinde de sistemul omogen (66), iar  $K$  este marginea superioară a termenului liber. Constantele  $W_i^n$  depind de  $\mu$  și se vede că  $W_i^n(0)$  sînt date de sistemul

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) F(s, c^*) ds + \sum_i W_i^n \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j \chi_i ds = 0.$$

Dacă presupunem îndeplinită condiția  $P_j(c^*) = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ , rezultă  $W_i^n(0) = 0$  pentru toți  $n$ . Vom scrie mai departe  $W_i^n(\mu) = \mu \bar{W}_i^n(\mu)$  și  $z^{n*}(s) = z^*(s) + z^{n**}(s)$ , unde  $z^*(s)$  este soluția periodică a sistemului

$$\frac{dz(s)}{ds} = A(s, c^*) z(s) + B(s, c^*) z(s - \tau) + F(s, c^*) + \alpha(c^*, \mu) G(s, c^*) \quad (71)$$

aleasă astfel ca

$$|z^*(s)| \leq L \sup \{ |F(s, c^*)| + |\alpha(c^*, \mu)| |G(s, c^*)| \}.$$

Avem

$$z^n(s) = \sum_j M_j z_j + z^*(s) + \mu z^{n**}(s).$$

Funcția  $\mu z^{n**}(s)$  verifică sistemul

$$\begin{aligned} \frac{dz(s)}{ds} &= A(s, c^*) z(s) + B(s, c^*) z(s - \tau) + \\ &+ B(s, c^*) [z_{n-1}(s - \theta) - z_{n-1}(s - \tau)] + \mu H_{n-1} + \mu \sum \bar{W}_i^n \chi_i, \end{aligned}$$

unde am notat  $H_{n-1}$  ceea ce devine  $H$  cînd  $z$  se înlocuiește cu  $z^{n-1}$ . Fie  $u_n = z^{(n+1)**}(s) - z^{n**}(s)$ . Avem

$$\begin{aligned} \mu \frac{du_n}{ds} &= A(s, c^*) \mu u_n(s) + B(s, c^*) \mu u_n(s - \tau) + \\ &+ B(s, c^*) [z^n(s - \theta) - z^{n-1}(s - \theta)] - B(s, c^*) [z^n(s - \tau) - z^{n-1}(s - \tau)] + \\ &+ \mu (H_n - H_{n-1}) + \mu \sum_j (\bar{W}_j^{(n+1)} - \bar{W}_j^{(n)}) \chi_j. \end{aligned}$$

Dar

$$z^n(s - \theta) - z^{n-1}(s - \theta) = \mu z^{n**}(s - \theta) - \mu z^{n-1**}(s - \theta) = \mu u_{n-1}(s - \theta).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \mu \frac{du_n}{ds} &= \mu A(s, c^*) u_n(s) + \mu B(s, c^*) u_n(s - \tau) + \mu B(s, c^*) u_{n-1}(s - \theta) - \\ &- \mu B(s, c^*) u_{n-1}(s - \tau) + \mu (H_n - H_{n-1}) + \mu \sum_j (\bar{W}_j^{(n+1)} - \bar{W}_j^{(n)}) \chi_j \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{ds} &= A(s, c^*) u_n(s) + B(s, c^*) u_n(s - \tau) + \\ &+ B(s, c^*) [u_{n-1}(s - \theta) - u_{n-1}(s - \tau)] + H_n - H_{n-1} + \sum_j [\bar{W}_j^{n+1} - \bar{W}_j^n] \chi_j. \end{aligned}$$

Fie  $b_n = \sup |u_n(s)|$ . Avem

$$H_n = H[s, z^n(s), z^{n-1}(s-\theta), \mu], H_{n-1} = H[s, z^{n-1}(s), z^{n-1}(s-\theta), \mu]$$

deci

$$|H_n - H_{n-1}| \leq L_1 |z^n(s) - z^{n-1}(s)| + L_2 |z^n(s-\theta) - z^{n-1}(s-\theta)| = \\ = |\mu| L_1 |u_{n-1}(s)| + |\mu| L_2 |u_{n-1}(s-\theta)| \leq |\mu| L b_{n-1}.$$

Mai departe

$$u_{n-1}(s-\theta) - u_{n-1}(s-\tau) = \int_{s-\tau}^{s-\theta} \dot{u}_{n-1}(t) dt = \\ = \int_{s-\tau}^{s-\theta} \{A(t, c^*) u_{n-1}(t) + B(t, c^*) u_{n-1}(t-\tau) + \\ + B(t, c^*) [u_{n-2}(t-\theta) - u_{n-2}(t-\tau)] + (H_{n-1} - H_{n-2}) + \sum_j (\bar{W}_j^n - \bar{W}_j^{n-1}) \chi_j\} dt$$

deci

$$|u_{n-1}(s-\theta) - u_{n-1}(s-\tau)| \leq |\mu| |\alpha \theta| (L_3 b_{n-1} + L_4 b_{n-2} + \\ + |\mu| L_5 b_{n-2} + |\mu| L_6 \beta_{n-1}),$$

unde am notat

$$|\mu| \beta_n = \sup_j |\bar{W}_j^{n+1} - \bar{W}_j^n|.$$

Rezultă

$$|u_n| \leq |\mu| L_7 (b_{n-1} + b_{n-2} + |\mu| \beta_{n-1} + \beta_n),$$

deci

$$b_n \leq |\mu| L_7 (b_{n-1} + b_{n-2} + |\mu| \beta_{n-1} + \beta_n).$$

Constantele  $\mu \bar{W}_i^n$  sînt date de sistemul

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) \{B(s, c^*) [z^{n-1}(s-\theta) - z^{n-1}(s-\tau)] + H_{n-1}\} ds + \\ + \mu \sum_i \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j \chi_i ds \bar{W}_i^n = 0.$$

Notînd  $\bar{W}_i^{n+1} - \bar{W}_i^n = v_i^n$  rezultă

$$\mu \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j \chi_i ds v_i^n + \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) B(s, c^*) [z^n(s-\theta) - z^{n-1}(s-\theta) - \\ - z^n(s-\tau) + z^{n-1}(s-\tau)] ds + \mu \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) [H_n - H_{n-1}] ds = 0$$

deci

$$\sum_i \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j \chi_i ds v_i^n + \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) B(s, c^*) [u_{n-1}(s-\theta) - u_{n-1}(s-\tau)] ds + \\ + \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) [H_n - H_{n-1}] ds = 0.$$

De aici rezultă

$$|\mu| \beta_n \leq L_8 [|\mu| L_9 (b_{n-1} + b_{n-2}) + |\mu| L_{10} b_{n-1}]$$

deci

$$\beta_n \leq L_{11} (b_{n-1} + b_{n-2}) + L_{12} |\mu| \beta_{n-1}.$$

Evaluările obținute pentru  $b_n$  și  $\beta_n$  permit să se deducă pentru  $|\mu|$  suficient de mic convergența uniformă a aproximațiilor succesive. Trezind la limită în relațiile care dau pe  $\overline{W}_i^n$  rezultă că  $\overline{W}_i$  verifică relațiile

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) \left\{ B(s, c^*) \frac{1}{\mu} [z(s - \theta) - z(s - \tau)] + H \right\} ds + \\ + \sum_i \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j \chi_i ds \overline{W}_i = 0. \end{aligned}$$

Condiția ca  $\overline{W}_i$  să fie nuli se scrie

$$\int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) \left\{ B(s, c^*) \frac{1}{\mu} [z(s - \theta) - z(s - \tau)] + H \right\} ds = 0.$$

Dar

$$\begin{aligned} z(s - \theta) - z(s - \tau) = \sum_i M_i [z_i(s - \theta, c^*) - z_i(s - \tau, c^*)] + \\ + z^*(s - \theta) - z^*(s - \tau) + \mu [z^{**}(s - \theta) - z^{**}(s - \tau)]. \end{aligned}$$

Rezultă condiția

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c) \frac{1}{\mu} B(s, c^*) \left\{ \sum_i M_i [z_i(s - \theta, c^*) - z_i(s - \tau, c^*)] + z^*(s - \theta) - \right. \\ \left. - z^*(s - \tau) \right\} ds + \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) B(s, c^*) [z^{**}(s - \theta) - z^{**}(s - \tau) + H] ds = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Pentru  $\mu \rightarrow 0$  această condiție devine

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) \alpha(c^*, 0) \tau B(s, c^*) \left[ \sum_i M_i \dot{z}_i(s - \tau, c^*) + \dot{z}^*(s - \tau) \right] ds + \\ + \int_0^{\omega_0(c^*)} \psi_j(s, c^*) B(s, c^*) H ds = 0, \end{aligned}$$

unde

$$H = H[s, \sum_i M_i z_i(s, c^*) + z^*(s), \sum_i M_i z_i(s - \tau, c^*) + z^*(s - \tau), 0],$$

iar  $z^*$  este soluția periodică a sistemului (71) în care  $\alpha(c^*, \mu)$  este înlocuit cu  $\alpha(c^*, 0)$ .

Aceste condiții permit determinarea constantelor  $M_i(0)$  și  $\alpha(c^*, 0)$ , una din constantele  $M_i(0)$  fiind luată nulă. O dată  $M_i(0)$  și  $\alpha(c^*, 0)$  astfel alese, condițiile (72) permit determinarea, pe baza teoremei funcțiilor

implicite (dacă jacobianul corespunzător este diferit de zero), a funcțiilor  $M_i(\mu)$  și  $\alpha(c^*, \mu)$  astfel încît  $\overline{W}_i(\mu) \equiv 0$ . Se obține atunci soluția

$$z(s, \mu) = \sum M_i(\mu) z_i(s, c^*) + z^*(s) + \mu z^{**}(s)$$

a sistemului (68).

Punînd

$$y(s, \mu) = p(s, c^*) + \mu z(s, \mu)$$

și apoi

$$x(t, \mu) = y\left(\frac{t}{1 + \mu\alpha}, \mu\right)$$

sîntem conduși la o soluție periodică a sistemului (60) cu proprietățile cerute.

### § 13. SOLUȚII APROAPE-PERIODICE LA SISTEME CVASILINIARE CU ÎNTÂRZIERE

Pentru sistemele cvasiliniare cu parametru mic vom indica o nouă metodă de demonstrare a existenței soluțiilor periodice.

În problema soluțiilor periodice această metodă conduce la rezultate mai slabe decît cele pe care le-am obținut mai înainte, dar avantajul ei constă în faptul că se poate aplica și la demonstrarea existenței soluțiilor aproape-periodice. Rolul esențial îl joacă următoarea :

LEMĂ. *Se consideră sistemul*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 x(t+s) d_s \eta(t, s) + f(t), \quad (73)$$

unde  $\eta$  are proprietățile precizate în § 3, iar  $f$  e mărginită pentru  $t \geq 0$ . Dacă soluția banală a sistemului omogen corespunzător este uniform asimptotic stabilă, atunci toate soluțiile sistemului (73) sînt mărginite pentru  $t \geq 0$ .

*Observație.* Această leamnă se prezintă ca o reciprocă a teoremei 4.15.

*Demonstrație.* Pe baza teoremei 4.4' există o funcțională  $V[t, \varphi]$  definită pentru orice  $t \geq 0$  pe spațiul funcțiilor  $\varphi$  continue pe  $[-\tau, 0]$  cu proprietățile :

$$1^\circ \|\varphi\|^2 \leq V[t, \varphi] < K_1 \|\varphi\|^2;$$

$$2^\circ |V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leq K_1 (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\|;$$

$$3^\circ \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, y(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, y(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leq \\ \leq -\|y(t+s; t_0, \varphi)\|^2,$$

unde  $y(t; t_0, \varphi)$  este soluția sistemului omogen care pe  $[t_0 - \tau, t_0]$  coincide cu  $\varphi$ .



Ținând seama de formula (18) rezultă evaluarea

$$\|x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))\| \leq L_1 \|x(t+s; t_0, \varphi)\| + \\ + h L_2 M, \quad M = \sup |f(t)|$$

și

$$\|x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi)) - y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))\| \leq h L_2 M.$$

Rezultă

$$|V[t+h, x(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))] - V[t+h, y(t+h+s; t, x(t+s; t_0, \varphi))]| \leq K_1 (2L_1 \|x(t+s; t_0, \varphi)\| + h L_2 M) h L_2 M$$

deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leq \\ \leq -\|x(t+s; t_0, \varphi)\|^2 + LM \|x(t+s; t_0, \varphi)\|.$$

Fie acum  $x(t; 0, \varphi)$  o soluție oarecare pentru care funcția inițială verifică relația  $V[0, \varphi] < K_1 L^2 M^2$ . Demonstrăm că pentru orice  $t \geq 0$  avem

$$V[t, x(t+s; 0, \varphi)] \leq K_1 L^2 M^2.$$

Dacă acest lucru nu ar avea loc, ar exista  $t_1 > 0$  astfel ca

$$V[t_1, x(t_1+s; 0, \varphi)] > K_1 L^2 M^2$$

și deci ar exista  $0 < t_2 < t_1$  astfel ca

$$V[t_2, x(t_2+s; 0, \varphi)] = K_1 L^2 M^2$$

și

$$V(t, x(t+s; 0, \varphi)) > K_1 L^2 M^2$$

pentru  $t_2 < t \leq t_1$ . De aici rezultă

$$V[t_2+h, x(t_2+h+s; t_2, x(t_2+s; 0, \varphi))] > V[t_2, x(t_2+s; 0, \varphi)]$$

și deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t_2+h, x(t_2+h+s; t_2, x(t_2+s; 0, \varphi))] - V[t_2, x(t_2+s; 0, \varphi)]}{h} \geq 0.$$

Pe de altă parte,

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V(t_2+h, x(t_2+h+s; 0, \varphi)) - V[t_2, x(t_2+s; 0, \varphi)]}{h} \leq \\ \leq -\|x(t_2+s; 0, \varphi)\|^2 + LM \|x(t_2+s; 0, \varphi)\| = \\ = \|x(t_2+s; 0, \varphi)\| (-\|x(t_2+s; 0, \varphi)\| + LM).$$

Din

$$V[t_2, x(t_2+s; 0, \varphi)] = K_1 L^2 M^2$$

și

$$V[t, \varphi] < K_1 \|\varphi\|^2$$

rezultă

$$K_1 L^2 M^2 < K_1 \|x(t_2 + s; 0, \varphi)\|^2,$$

deci

$$\|x(t_2 + s; 0, \varphi)\|^2 > L^2 M^2$$

sau

$$\|x(t_2 + s; 0, \varphi)\| > LM.$$

Rezultă

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[t_2 + h, x(t_2 + h + s; 0, \varphi)] - V[t_2, x(t_2 + s; 0, \varphi)]}{h} < 0.$$

Am ajuns la o contradicție, deci

$$V[t, x(t + s; 0, \varphi)] \leq K_1 L^2 M^2$$

pentru toți  $t \geq 0$ . Dar  $V[t, \varphi] \geq \|\varphi\|^2$ , deci

$$\|x(t + s; 0, \varphi)\| \leq \sqrt{K_1} LM = KM.$$

În acest fel lema e demonstrată.

**TEOREMA 4.29.** *Fie în sistemul (73) funcțiile  $\eta$  și  $f$  aproape-periodice în  $t$  ( $\eta$  aproape-periodică în  $t$ , uniform în raport cu  $s$ ). Dacă soluția banală a sistemului omogen corespunzător este uniform asimptotic stabilă, atunci sistemul (73) admite o soluție aproape-periodică. Această soluție este evident unică și verifică o evaluare de forma  $|x_0(t)| \leq KM$ , unde  $K$  depinde numai de sistemul omogen, iar  $M = \sup |f|$ .*

*Demonstrație.* Conform lemei precedente, soluțiile sistemului (73) sînt mărginite; fie  $u(t)$  o astfel de soluție. Scriem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [u(t + \theta) - u(t)] &= \int_{-\infty}^0 u(t + \theta + s) d_s \eta(t + \theta, s) + f(t + \theta) - \\ &- \int_{-\infty}^0 u(t + s) d_s \eta(t, s) - f(t) = \int_{-\infty}^0 [u(t + \theta + s) - u(t + s)] d_s \eta(t, s) + \\ &+ \int_{-\infty}^0 u(t + \theta + s) d_s [\eta(t + \theta, s) - \eta(t, s)] + f(t + \theta) - f(t). \end{aligned}$$

Fie  $y(t)$  soluția sistemului omogen care pe  $[-\tau, 0]$  coincide cu  $u(t + \theta) - u(t)$ ; notăm  $v(t) = u(t + \theta) - u(t) - y(t)$ .

Avem  $v(t) \equiv 0$  pe  $[-\tau, 0]$  și

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= \int_{-\infty}^0 v(t + s) d_s \eta(t, s) + \int_{-\infty}^0 u(t + \theta + s) d_s [\eta(t + \theta, s) - \eta(t, s)] + \\ &+ f(t + \theta) - f(t). \end{aligned}$$

Pe baza formulei de integrare prin părți,

$$\begin{aligned} \int_{-\tau}^0 u(t + \theta + s) d_s [\eta(t + \theta, s) - \eta(t, s)] &= u(t + \theta) [\eta(t + \theta, 0) - \\ &- \eta(t, 0)] - u(t + \theta - \tau) [\eta(t + \theta, -\tau) - \eta(t, -\tau)] - \\ &- \int_{-\tau}^0 \left( \frac{d}{dt} u(t + \theta + s) \right) [\eta(t + \theta, s) - \eta(t, s)] ds. \end{aligned}$$

Fie  $M_1 = \sup |u(t)|$ ,  $M_2 = \sup \left| \frac{du(t)}{dt} \right|$ . Rezultă

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\tau}^0 u(t + \theta + s) d_s [\eta(t + \theta, s) - \eta(t, s)] \right| &\leq M_1 (|\eta(t + \theta, 0) - \eta(t, 0)| + \\ &+ |\eta(t + \theta, -\tau) - \eta(t, -\tau)|) + M_2 \tau \sup_{s, t} |\eta(t + \theta, s) - \eta(t, s)|. \end{aligned}$$

Fie  $M_0 = \max \{2M_1, \tau M_2, 1\}$  și  $\theta \leq \frac{\varepsilon}{4KM_0}$  — aproape-perioadă comună a funcțiilor  $\eta$  și  $f$ . Atunci

$$|\eta(t + \theta, s) - \eta(t, s)| < \frac{\varepsilon}{4KM_0}, \quad |f(t + \theta) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4KM_0}.$$

Ținând seama de lemă, rezultă

$$\begin{aligned} |v(t)| &\leq K \{M_1 \sup (|\eta(t + \theta, 0) - \eta(t, 0)| + |\eta(t + \theta, -\tau) - \eta(t, -\tau)|) + \\ &+ M_2 \tau \sup |\eta(t + \theta, s) - \eta(t, s)| + \sup |f(t + \theta) - f(t)|\} \end{aligned}$$

deci

$$|v(t)| \leq K \left( 2M_1 \frac{\varepsilon}{4KM_0} + M_2 \tau \frac{\varepsilon}{4KM_0} + \frac{\varepsilon}{4KM_0} \right) < \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Prin urmare

$$|u(t + \theta) - u(t) - y(t)| < \frac{3\varepsilon}{4} \text{ pentru } t \geq -\tau.$$

Pe baza ipotezei făcute asupra sistemului omogen, există  $T(\varepsilon)$  cu proprietatea că  $t > T$  implică  $|y(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$ .

De aici, pentru  $t > T$ , deducem

$$|u(t + \theta) - u(t)| < \varepsilon.$$

Rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $l(\varepsilon)$  și  $T(\varepsilon)$  cu proprietatea că în orice interval de lungime  $l$  există  $\theta$  astfel ca  $|u(t + \theta) - u(t)| < \varepsilon$  dacă  $t > T$ . Aceasta înseamnă că soluția  $u(t)$  este asimptotic aproape-periodică.

Atunci  $u(t) = x_0(t) + \omega(t)$ , unde  $x_0(t)$  este o funcție aproape-periodică și  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0$ . Avem

$$\frac{dx_0(t)}{dt} + \frac{d\omega(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 x_0(t+s) d_s \eta(t, s) + f(t) + \int_{-\infty}^0 \omega(t+s) d_s \eta(t, s).$$

Deoarece  $\omega(t)$  tinde către zero când  $t \rightarrow \infty$ , rezultă

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 \omega(t+s) d_s \eta(t, s) &= 0 \left( \text{căci } \left| \int_{-\infty}^0 \omega(t+s) d_s \eta(t, s) \right| \leq \right. \\ &\leq \sup_s |\omega(t+s)| \bigvee_{s=-\tau}^0 \eta(t, s) \Big). \end{aligned}$$

Deducem

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 x_0(t+s) d_s \eta(t, s) + f(t)$$

și existența soluției aproape-periodice este demonstrată.

Din  $|u(t)| \leq KM$  rezultă  $|x_0(t)| \leq KM + |\omega(t)|$ . Fie  $\varepsilon > 0$ ; din  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0$  rezultă că există  $T > 0$  astfel ca pentru  $t > T$  să avem

$$|\omega(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ deci } |x_0(t)| \leq KM + \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru } t > T. \text{ Fie } t \text{ arbitrar; există o}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} - \text{aproape-periodă } \theta \text{ astfel ca } t + \theta > T. \text{ Atunci}$$

$$|x_0(t + \theta)| \leq KM + \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } |x_0(t + \theta) - x_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ deci}$$

$$|x_0(t)| \leq KM + \varepsilon.$$

Cum  $\varepsilon$  este arbitrar, deducem

$$|x_0(t)| \leq KM.$$

Teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 4.30. Se consideră sistemul

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 x(t+s) d_s \eta(t, s) + f(t) + \mu g[t, x(t+s), \mu], \quad (74)$$

unde  $\eta$  și  $f$  sînt ca în teorema precedentă, iar  $g$  verifică o condiție de tip Lipschitz în vecinătatea soluției aproape-periodice  $x_0(t)$  a sistemului generator obținut pentru  $\mu = 0$ .

*Dacă soluția banală a sistemului*

$$\frac{dy(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 y(t+s) d_s \eta(t,s)$$

*este uniform asimptotic stabilă, există  $\mu_0 > 0$  astfel încât pentru  $|\mu| < \mu_0$  sistemul (74) admite o soluție aproape-periodică  $x(t, \mu)$  cu proprietatea  $\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = x_0(t)$ . Această soluție este uniform asimptotic stabilă.*

*Demonstrație.* Existența soluției aproape-periodice  $x_0(t)$  a sistemului pentru  $\mu = 0$  rezultă din teorema 4.28. Fie

$$z(t) = x(t) - x_0(t).$$

Obținem

$$\frac{dz(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 z(t+s) d_s \eta(t,s) + \mu Z[t, z(t+s), \mu].$$

Fie  $z_1(t)$  soluția aproape-periodică a sistemului

$$\frac{dz(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 z(t+s) d_s \eta(t,s) + \mu Z[t, 0, 0]$$

și  $z_k(t)$  soluția aproape-periodică a sistemului

$$\frac{dz(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 z(t+s) d_s \eta(t,s) + \mu Z[t, z_{k-1}(t+s), \mu].$$

Aceste soluții există și sînt determinate unic conform teoremei 4.28. Notînd

$$v_k(t) = z_k(t) - z_{k-1}(t)$$

deducem

$$\frac{dv_k(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 v_k(t+s) d_s \eta(t,s) + \mu \{Z[t, z_{k-1}(t+s), \mu] - Z[t, z_{k-2}(t+s), \mu]\}$$

deci, ținînd seama de teorema 4.28, rezultă evaluarea

$$|v_k(t)| \leq |\mu| KL \sup |z_{k-1}(t) - z_{k-2}(t)| = |\mu| KL \sup |v_{k-1}(t)|.$$

De aici rezultă pentru  $|\mu|$  suficient de mic convergența uniformă a șirului de aproximații succesive. Limita acestui șir este o funcție aproape-periodică  $z(t, \mu)$  cu  $\lim_{\mu \rightarrow 0} z(t, \mu) = 0$ . Punînd  $x(t, \mu) = x_0(t) + z(t, \mu)$  se obține soluția aproape-periodică a sistemului (74). Stabilitatea soluției rezultă aplicînd teorema 4.6 de stabilitate după prima aproximație. Teorema este demonstrată.

În cazul particular cînd  $\eta, f, g$  sînt periodice în  $t$  cu perioada  $\omega$  se obține un caz particular al teoremei 4.23 (aplicația).

Metoda de mai sus se poate aplica la sistemele de forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = X_0[t, x(t), x(t-\tau)] + \mu X_1[t, x(t), x(t-\tau), \mu],$$

unde  $X_0$  și  $X_1$  sînt aproape-periodice în  $t$ , uniform în raport cu celelalte variabile. Presupunem că sistemul generator obținut pentru  $\mu = 0$  admite o soluție aproape-periodică  $x_0(t)$  cu proprietatea că sistemul în variații corespunzător are soluția banală uniform asimptotic stabilă. Atunci pentru  $|\mu|$  suficient de mic sistemul admite o soluție aproape-periodică, care pentru  $\mu \rightarrow 0$  tinde către soluția banală. Punînd  $z(t) = x(t) - x_0(t)$  se obține un sistem de forma

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) + B(t)z(t-\tau) + Z_0[t, z(t), z(t-\tau)] + \mu Z_1[t, z(t), z(t-\tau)]$$

pentru care aproximațiile succesive se construiesc după schema

$$z_0(t) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_k(t)}{dt} = & A(t)z_k(t) + B(t)z_k(t-\tau) + Z_0[t, z_{k-1}(t), z_{k-1}(t-\tau)] + \\ & + \mu Z_1[t, z_{k-1}(t), z_{k-1}(t-\tau)], \end{aligned}$$

$z_k(t)$  fiind aproape-periodică.

#### § 14. METODA LUĂRII MEDIEI LA SISTEME CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

În cele ce urmează vom prezenta unele rezultate privitoare la extinderea metodei mediei la sistemele cu argument întîrziat.

TEOREMA 4. 31. *Se consideră sistemul*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon X[t, x(t), x(t-\tau)]. \quad (75)$$

*Presupunem că  $X(t, x, y)$  e mărginită pentru  $t \in (0, \infty)$ ,  $x \in D$ ,  $y \in D$ ,*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, y) dt = X_0(x, y), \quad x \in D, y \in D,$$

*și în plus, pentru orice  $\eta > 0$  există  $\delta(\eta) > 0$  astfel încît*

$$|x' - x''| < \delta(\eta), |y' - y''| < \delta(\eta)$$

*să implice*

$$|X(t, x', y') - X(t, x'', y'')| < \eta, |X_0(x', y') - X_0(x'', y'')| < \eta.$$

*Presupunem de asemenea că sistemul*

$$\frac{dy(t)}{dt} = X_0[y(t), y(t)] \quad (76)$$

admite soluție unică verificînd condiția  $y(0) = x_0$ . Dacă  $x(t, \varepsilon)$  este o soluție arbitrară a sistemului (75) cu  $x(0, \varepsilon) = x_0$ , iar  $y(t, \varepsilon)$  este soluția sistemului (76) cu  $y(0, \varepsilon) = x_0$ , atunci pentru orice  $T > 0$  și  $\eta > 0$  există  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încît pentru  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  să avem

$$|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)| < \eta, \quad t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right].$$

Pentru demonstrarea teoremei stabilim mai întîi cîteva leme.

LEMA 1. Dacă

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, y) dt = X_0(x, y) \text{ pentru orice } x \in D, y \in D,$$

atunci pentru orice pereche de funcții  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$ , constante pe porțiuni, are loc relația

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t_1} X\left[\frac{t}{\varepsilon}, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)\right] dt = \int_0^{t_1} X_0[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] dt.$$

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t_1} X\left[\frac{t}{\varepsilon}, x, y\right] dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{\frac{t_1}{\varepsilon}} X[u, x, y] du = t_1 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{t_1} \int_0^{\frac{t_1}{\varepsilon}} X(u, x, y) du = \\ &= t_1 X_0(x, y) = \int_0^{t_1} X_0(x, y) dt_1. \end{aligned}$$

De aici

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, y\right) dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} X_0(x, y) dt$$

și

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_i, y_i\right) dt = \sum_i \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} X_0(x_i, y_i) dt.$$

Cu aceasta, lema e demonstrată.

LEMA 2. Dacă  $X(t, x, y)$  e mărginită pentru  $t \in [0, \infty)$ ,  $x \in D$ ,  $y \in D$ , și  $x_n$  este soluția sistemului

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon_n X[t, x(t), x(t-\tau)],$$

atunci din  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) = y(t)$  rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau\right) = y(t);$$

(presupunem că pentru toți  $t$  avem  $x_n(t) \in D$ ).

*Demonstrație.* Avem pentru  $u \geq \tau$ :

$$x_n(u-\tau) = x_n(u) - \int_{u-\tau}^u \dot{x}_n(t) dt = x_n(u) - \int_{u-\tau}^u \varepsilon_n X[t, x_n(t), x_n(t-\tau)] dt.$$

De aici

$$x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau\right) = x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) - \int_{\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau}^{\frac{t}{\varepsilon_n}} \varepsilon_n X[s, x_n(s), x_n(s-\tau)] ds, \quad t \geq \tau \varepsilon_n.$$

Fie  $|X(t, x, y)| < M$  pentru  $t \in [0, \infty)$ ,  $x \in D$ ,  $y \in D$ . Avem

$$x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau\right) - y(t) = x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) - y(t) - \varepsilon_n \int_{\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau}^{\frac{t}{\varepsilon_n}} X[s, x_n(s), x_n(s-\tau)] ds.$$

Deci

$$\left| x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau\right) - y(t) \right| \leq \left| x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) - y(t) \right| + \varepsilon_n \tau M, \quad t \geq \tau \varepsilon_n.$$

Pentru orice  $t > 0$  și  $\eta > 0$  alegem  $N(\eta, t)$  astfel încât dacă  $n > N(\eta, t)$  să avem

$$\varepsilon_n < \min\left\{\frac{t}{\tau}, \frac{\eta}{2\tau M}\right\}, \quad \left| x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) - y(t) \right| < \frac{\eta}{2}.$$

Atunci

$$\left| x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau\right) - y(t) \right| < \eta \quad \text{pentru } n > N(\eta, t)$$

și lema e demonstrată.

**LEMA 3.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) = y(t)$  uniform în raport cu  $t$  în  $[0, T]$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau\right)\right] dt_1 = \int_0^{t_1} X_0[y(t), y(t)] dt.$$

*Demonstrație.* Avem

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau\right)\right] dt_1 - \int_0^{t_1} X_0[y(t), y(t)] dt \right| \leq \\ & \leq \left| \int_0^{\varepsilon_n \tau} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau\right)\right] dt_1 - \int_0^{\varepsilon_n \tau} X_0[y(t_1), y(t_1)] dt_1 \right| + \\ & + \left| \int_{\varepsilon_n \tau}^{t_1} X\left[\frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n}\right), x_n\left(\frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau\right)\right] dt_1 - \int_{\varepsilon_n \tau}^{t_1} X_0[y(t_1), y(t_1)] dt_1 \right|. \end{aligned}$$



Dar

$$\left| \int_0^{\varepsilon_n \tau} X \, dt_1 - \int_0^{\varepsilon_n \tau} X_0 \, dt_1 \right| \leq 2M \varepsilon_n \tau.$$

Fie  $\delta(\eta)$  astfel ca pentru  $|x' - x''| < \delta, |y' - y''| < \delta$  să avem

$$|X(t, x', y') - X(t, x'', y'')| < \frac{\eta}{12T}, \quad |X_0(x', y') - X_0(x'', y'')| < \frac{\eta}{12T}.$$

Fie  $\tilde{y}(t)$  o funcție constantă de porțiuni astfel ca

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| < \delta(\eta) \text{ pentru } t \in [0, T].$$

Alegem  $N(\eta)$  astfel ca pentru  $n > N(\eta)$  să avem  $\varepsilon_n < \frac{\eta}{16M\tau}$ ,

$$x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) - y(t) < \delta(\eta), \quad x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n} - \tau\right) - y(t) < \delta(\eta) \text{ pentru } \varepsilon_n \tau \leq t \leq T.$$

Pentru aceasta e suficient să luăm pe  $N(\eta)$  astfel încît dacă  $n > N(\eta)$  să avem

$$\varepsilon_n < \min \left\{ \frac{\eta}{16M\tau}, \frac{\delta(\eta)}{2M\tau} \right\}, \quad \left| x_n\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) - y(t) \right| < \frac{1}{2} \delta(\eta).$$

În plus,  $N(\eta)$  va fi ales astfel încît pentru  $n > N(\eta)$  să avem și

$$\left| \int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X \left[ \frac{t_1}{\varepsilon_n}, \tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_1) \right] dt_1 - \int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X_0 [\tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_1)] dt_1 \right| < \frac{\eta}{4}$$

pentru  $\frac{\eta}{2M} \leq t_1 \leq T$ .

Atunci

$$\left| X \left[ \frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n \left( \frac{t_1}{\varepsilon_n} \right), x_n \left( \frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau \right) \right] - X \left[ \frac{t_1}{\varepsilon_n}, y(t_1), y(t_1) \right] \right| < \frac{\eta}{12T}, \quad \tau\varepsilon_n \leq t_1 \leq T,$$

$$\left| X \left[ \frac{t_1}{\varepsilon_n}, y(t_1), y(t_1) \right] - X \left[ \frac{t_1}{\varepsilon_n}, \tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_1) \right] \right| < \frac{\eta}{12T},$$

$$|X_0[y(t_1), y(t_1)] - X_0[\tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_1)]| < \frac{\eta}{12T}.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X \left[ \frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n \left( \frac{t_1}{\varepsilon_n} \right), x_n \left( \frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau \right) \right] dt_1 - \int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X_0 [y(t_1), y(t_1)] dt_1 \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X \left[ \frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n \left( \frac{t_1}{\varepsilon_n} \right), x_n \left( \frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau \right) \right] dt_1 - \int_{\tau\varepsilon_n}^{t_1} X \left[ \frac{t_1}{\varepsilon_n}, y(t_1), y(t_1) \right] dt_1 \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \int_{\tau \varepsilon_n}^{t_1} X \left[ \frac{t_1}{\varepsilon_n}, y(t_1), y(t_1) \right] dt_1 - \int_{\tau \varepsilon_n}^{t_1} X \left[ \frac{t_1}{\varepsilon_n}, \tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_1) \right] dt_1 \right| + \\
& + \left| \int_{\tau \varepsilon_n}^{t_1} X \left[ \frac{t_1}{\varepsilon_n}, \tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_1) \right] dt_1 - \int_{\tau \varepsilon_n}^{t_1} X_0 [\tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_1)] dt_1 \right| + \\
& + \left| \int_{\tau \varepsilon_n}^{t_1} X_0 [\tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_1)] dt_1 - \int_{\tau \varepsilon_n}^{t_1} X_0 [y(t_1), y(t_1)] dt_1 \right| < \\
& < \frac{\eta}{12} + \frac{\eta}{12} + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{12} = \frac{\eta}{2}; \left| \int_0^{\varepsilon_n \tau} X dt_1 - \int_0^{\varepsilon_n \tau} X_0 dt_1 \right| < \frac{\eta}{2}.
\end{aligned}$$

În definitiv, pentru  $n > N(\eta)$  avem

$$\left| \int_0^{t_1} X \left[ \frac{t_1}{\varepsilon_n}, x_n \left( \frac{t_1}{\varepsilon_n} \right), x_n \left( \frac{t_1}{\varepsilon_n} - \tau \right) \right] dt_1 - \int_0^{t_1} X_0 [y(t_1), y(t_1)] dt_1 \right| < \eta$$

și lema e demonstrată.

Să observăm că am efectuat toate evaluările noastre pentru  $t_1 \geq \frac{\eta}{2M}$

deoarece pentru  $0 < t_1 < \frac{\eta}{2M}$  avem

$$\left| \int_0^{t_1} X dt_1 - \int_0^{t_1} X_0 dt_1 \right| < \eta \text{ pentru toți } n.$$

*Demonstrația teoremei 4.31. Avem*

$$x(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon \int_0^t X[u, x(u), x(u-\tau)] du.$$

Pentru  $t = \frac{t_1}{\varepsilon}$  obținem

$$x\left(\frac{t_1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = x_0 + \varepsilon \int_0^{\frac{t_1}{\varepsilon}} X[u, x(u), x(u-\tau)] du.$$

Facem în integrală schimbarea de variabilă  $v = \varepsilon u$ . Atunci

$$x\left(\frac{t_1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = x_0 + \int_0^{t_1} X\left[\frac{v}{\varepsilon}, x\left(\frac{v}{\varepsilon}\right), x\left(\frac{v}{\varepsilon} - \tau\right)\right] dv.$$

Din faptul că  $|X| < M$ , rezultă că pentru  $0 \leq t_1 \leq T$  familia  $\left\{ x\left(\frac{t_1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \right\}$  e egal mărginită și are derivate egal mărginite, deci este egal continuă. De aceea familia  $\left\{ x\left(\frac{t_1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \right\}$  e compactă și pentru orice șir  $\{\varepsilon_n\}$

cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$  se poate găsi un subșir  $\{\varepsilon_{n_k}\}$  astfel ca  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \left( \frac{t_1}{\varepsilon_{n_k}}, \varepsilon_{n_k} \right) = y(t_1)$ ,

convergența fiind uniformă pe  $[0, T]$ . Atunci  $y(0) = x_0$  și din

$$x_{n_k} \left( \frac{t_1}{\varepsilon_{n_k}}, \varepsilon_{n_k} \right) = x_0 + \int_0^{t_1} X \left[ \frac{v}{\varepsilon_{n_k}}, x_{n_k} \left( \frac{v}{\varepsilon_{n_k}} \right), x_{n_k} \left( \frac{v}{\varepsilon_{n_k}} - \tau \right) \right] dv$$

obținem pe baza lemei 3 că

$$y(t_1) = x_0 + \int_0^{t_1} X_0[y(v), y(v)] dv.$$

De aici rezultă că  $y(t_1)$  e soluție a sistemului

$$\dot{y}(t) = X_0[y(t), y(t)].$$

Deoarece această soluție este prin ipoteză unică, deducem că pentru orice șir  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  există un subșir  $\varepsilon_{n_k}$  astfel ca

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \left( \frac{t_1}{\varepsilon_{n_k}}, \varepsilon_{n_k} \right) = y(t_1).$$

Dar aceasta înseamnă că  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x \left( \frac{t_1}{\varepsilon}, \varepsilon \right) = y(t_1)$  și deci pentru orice

$\eta > 0$  există  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încît dacă  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , atunci

$$\left| x \left( \frac{t_1}{\varepsilon}, \varepsilon \right) - y(t_1) \right| < \eta \text{ pentru } t_1 \in [0, T]. \text{ Fie } t = \frac{t_1}{\varepsilon}.$$

Avem  $|x(t, \varepsilon) - y(\varepsilon t)| < \eta$ .

Notăm  $y(\varepsilon t) = y(t, \varepsilon)$ . Rezultă  $\frac{d}{dt} y(t, \varepsilon) = \frac{d}{dt} y(\varepsilon t) = \varepsilon \frac{d}{dt_1} y(\varepsilon t) = \varepsilon X_0[y(\varepsilon t), y(\varepsilon t)] = \varepsilon X_0[y(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)]$ , deci  $y(t, \varepsilon)$  este soluția sistemului (2) și  $y(0, \varepsilon) = y(0) = x_0$ .

**Teorema e demonstrată.**

**TEOREMA 4.32.** *Se consideră sistemul*

$$\frac{dz(t)}{dt} = \varepsilon Z[t, z(t), z(t - \varepsilon\tau), \varepsilon], \quad (77)$$

unde  $Z(t, u, v, \varepsilon)$  are derivate parțiale continue de ordinul întâi și  $Z(t+T, u, v, \varepsilon) \equiv Z(t, u, v, \varepsilon)$ . Fie

$$Z_0(u, v, \varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t, u, v, \varepsilon) dt$$

și  $\zeta^0$  o soluție a ecuației  $Z_0(u, u, 0) = 0$ . Dacă valorile proprii ale matricii

$$\frac{\partial Z_0(\zeta^0, \zeta^0, 0)}{\partial u} + \frac{\partial Z_0(\zeta^0, \zeta^0, 0)}{\partial v}$$

au părți reale negative, există  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încît pentru  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  sistemul (77) admite o soluție periodică de perioadă  $T$  care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către  $\zeta^0$ .

Și demonstrația acestei teoreme va fi precedată de cîteva leme.

LEMA 4. Fie  $H_1$  și  $H_2$  matrici pătrate de ordinul  $n$ . Presupunem că valorile proprii ale matricii  $H_1 + H_2$  au părți reale negative. Atunci există  $\gamma_0 > 0$  și  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încît dacă  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , rădăcinile ecuației

$$\det(\varepsilon H_1 + \varepsilon H_2 e^{-\varepsilon r} - E r) = 0,$$

unde  $E$  este matricea unitate, verifică inegalitatea

$$\operatorname{Re} r \leq -\varepsilon \gamma_0$$

*Demonstrație.* Punem  $r = \varepsilon s$ . Ecuația ia forma

$$\det(\varepsilon H_1 + \varepsilon H_2 e^{-\varepsilon^2 s} - E \varepsilon s) = 0$$

sau

$$\det(H_1 + H_2 e^{-\varepsilon^2 s} - E s) = 0.$$

Dar

$$H_1 + H_2 e^{-\varepsilon^2 s} - E s = H_1 + H_2 - E s + H_2(e^{-\varepsilon^2 s} - 1).$$

De aici rezultă că

$$\begin{aligned} \det(H_1 + H_2 e^{-\varepsilon^2 s} - E s) &= \det(H_1 + H_2 - E s) + (e^{-\varepsilon^2 s} - 1) f(s, \varepsilon) = \\ &= g(s) + (e^{-\varepsilon^2 s} - 1) f(s, \varepsilon). \end{aligned}$$

Ecuația  $g(s) = 0$  are rădăcinile cu părți reale negative, deci există  $\gamma_0 > 0$  astfel ca în semiplanul  $\operatorname{Re} z \geq -\gamma_0$  să nu existe rădăcini ale ecuației  $g(s) = 0$ . Considerăm conturul care conține porțiunea din dreapta  $\operatorname{Re} z = -\gamma_0$  pentru care  $|\operatorname{Im} z| \leq R$  și arcul de cerc de rază  $R$  situate în semiplanul  $\operatorname{Re} z > -\gamma_0$ . Deoarece în interiorul acestui contur  $g(s)$  e regulată și nu are zerouri, variația argumentului pe contur e nulă. Atunci, pentru  $\varepsilon$  suficient de mic, va fi egală cu zero și variația pe acest contur a argumentului funcției  $g(s) + (e^{-\varepsilon^2 s} - 1) f(s, \varepsilon)$ . De aici rezultă că există  $\varepsilon_0$  astfel încît dacă  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , ecuația dată să nu aibă rădăcini în interiorul conturului considerat. Să arătăm că dacă  $R$  e destul de mare, ecuația nu poate avea rădăcini în semiplanul  $\operatorname{Re} z > -\gamma_0$  în afara acestui contur. Dacă  $s$  e o rădăcină a ecuației, există un vector  $c$  astfel ca

$$(H_1 + H_2 e^{-\varepsilon^2 s}) c = s c;$$

dar

$$\begin{aligned} |e^{-\varepsilon^2 s}| &\leq e^{\varepsilon^2 \gamma_0}, \quad |s| \|c\| = \|(H_1 + H_2 e^{-\varepsilon^2 s}) c\| \leq \|H_1 + H_2 e^{-\varepsilon^2 s}\| \|c\| \leq \\ &\leq (\|H_1\| + \|H_2\| e^{\varepsilon^2 \gamma_0}) \|c\| \leq M \|c\| \end{aligned}$$

deci  $|s| \leq M$ . Cu aceasta lema e demonstrată, deoarece dacă

$$\operatorname{Re} s < -\gamma_0$$

rezultă

$$\operatorname{Re} r < -\varepsilon\gamma_0.$$

LEMA 5. Dacă numerele caracteristice ale matricii  $H_1 + H_2$  au părți reale negative, există o funcțională  $V$  cu următoarele proprietăți:

1°  $V[\varphi]$  e definită pe spațiul funcțiilor continue pe  $[-\varepsilon\tau, 0]$ .

$$2^\circ \|\varphi\|^2 \leq V[\varphi] \leq K^2 \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon\gamma_0}\right) \|\varphi\|^2$$

$$3^\circ |V[\varphi_1] - V[\varphi_2]| \leq L_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon\gamma_0}\right) (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

4° Mulțimea funcțiilor pentru care  $V[\varphi] \leq C$  e închisă și convexă

$$5^\circ \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[z(t+h+s; t, \varphi)] - V[\varphi]}{h} \leq -\frac{1}{2} \|\varphi\|^2 \text{ pentru } \varepsilon < \varepsilon_0,$$

$\|\varphi\| < \delta_0(\varepsilon_0)$ , unde  $z(t; t_0, \varphi)$  e soluția sistemului

$$\dot{z}(t) = \varepsilon [E + A(t, z(t), z(t - \varepsilon\tau), \varepsilon)] \{H_1 z(t) + H_2 z(t - \varepsilon\tau) + B[z(t), z(t - \varepsilon\tau)]\}$$

unde

$$|A(t, u, v, \varepsilon)| < M_1 \varepsilon^\alpha$$

pentru

$$t \geq 0, |u| + |v| \leq M_0$$

$$|B(u, v)| < M_2 \{|u| + |v|\}^{1+\beta}, \beta > 0, \text{ pentru } |u| + |v| \leq M_0.$$

*Demonstrație.* Considerăm sistemul

$$\dot{y}(t) = \varepsilon \{H_1 y(t) + H_2 y(t - \varepsilon\tau)\}. \quad (78)$$

Dacă numerele caracteristice ale matricii  $H_1 + H_2$  au părți reale negative, din lema 4 rezultă că rădăcinile ecuației  $\det(\varepsilon H_1 + \varepsilon H_2 e^{-\varepsilon\tau r} - Er) = 0$  verifică inegalitatea  $\operatorname{Re} r \leq -\varepsilon\gamma_1$  pentru  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Dar atunci, după cum se știe, soluția banală a sistemului este uniform asimptotic stabilă și avem pentru orice soluție evaluarea

$$|y(t; t_0, \varphi)| \leq K e^{-\varepsilon\gamma_0(t-t_0)} \|\varphi\|$$

pentru

$$t \geq t_0, \gamma_0 < \gamma_1 \text{ arbitrar}^*).$$

Fie

$$V[\varphi] = \int_0^\infty \|y(t+s; \varphi)\|^2 dt + \sup_{\sigma \geq 0} \|y(\sigma+s; \varphi)\|^2.$$

\*) Vezi rezultatele lui N. N. Krasovski expuse în anexă.

Am notat  $y(t; \varphi)$  soluția sistemului (78) care pentru  $-\varepsilon\tau \leq t \leq 0$  coincide cu  $\varphi(t)$ ; peste tot în formulele noastre  $s \in [-\varepsilon\tau, 0]$  și

$$\|y(t+s; \varphi)\| = \sup_{-\varepsilon\tau \leq s \leq 0} |y(t+s; \varphi)|.$$

Deoarece integrala e pozitivă și  $y(s; \varphi) = \varphi$ , rezultă că  $V[\varphi] \geq \|\varphi\|^2$ .  
Pe de altă parte,

$$\|y(t+s; \varphi)\| \leq K e^{-\varepsilon\gamma_0 t} \|\varphi\|$$

deci

$$V[\varphi] \leq K^2 \|\varphi\|^2 \int_0^\infty e^{-2\varepsilon\gamma_0 t} dt + K^2 \|\varphi\|^2 = K^2 \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon\gamma_0}\right) \|\varphi\|^2.$$

Fie

$$\delta_0 > 0$$

și

$$T(\eta) = \frac{1}{\varepsilon\gamma_0} \ln \frac{K\delta_0}{\eta};$$

dacă

$$\|\varphi\| < \delta, \quad t > T(\eta)$$

avem

$$|y(t, \varphi)| < \eta$$

deci dacă

$$\|\varphi\| < \delta_0$$

și

$$\sigma > \frac{1}{\varepsilon\gamma_0} \ln \frac{2K\delta_0}{\|\varphi\|}$$

avem

$$\|y(\sigma+s; \varphi)\|^2 < \frac{\|\varphi\|^2}{4}$$

și

$$\sup_{\sigma \geq 0} \|y(\sigma+s; \varphi)\|^2 = \sup_{0 \leq \sigma \leq \frac{1}{\varepsilon\gamma_0} \frac{2K\delta_0}{\|\varphi\|}} \|y(\sigma+s; \varphi)\|^2 = \|y(\sigma'+s; \varphi)\|^2,$$

deoarece  $\|y(\sigma+s; \varphi)\|^2$  e o funcție continuă de  $\sigma$ .

Mai departe

$$\begin{aligned} & | \|y(\sigma+s; \varphi_1)\|^2 - \|y(\sigma+s; \varphi_2)\|^2 | = \\ & = (\|y(\sigma+s; \varphi_1)\| + \|y(\sigma+s; \varphi_2)\|) |\|y(\sigma+s; \varphi_1)\| - \\ & - \|y(\sigma+s; \varphi_2)\|| \leq (\|y(\sigma+s; \varphi_1)\| + \|y(\sigma+s; \varphi_2)\|) \|y(\sigma+s; \varphi_1 - \varphi_2)\| \leq \\ & \leq 2K e^{\varepsilon\gamma_0\tau} (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) K e^{\varepsilon\gamma_0\tau} \|\varphi_1 - \varphi_2\| < L_0 (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\|. \end{aligned}$$

De aici rezultă

$$\sup_{\sigma \geq 0} \|y(\sigma + s; \varphi_1)\|^2 = \|y(\sigma' + s; \varphi_1)\|^2 \leq \|y(\sigma' + s; \varphi_1)\| + \\ + L_0(\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq \sup_{\sigma \geq 0} \|y(\sigma + s; \varphi_2)\|^2 + L_0(\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

În definitiv

$$|\sup_{\sigma \geq 0} \|y(\sigma + s; \varphi_2)\|^2 - \sup_{\sigma \geq 0} \|y(\sigma + s; \varphi_1)\|^2| \leq L_0(\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

$$|V[\varphi_1] - V[\varphi_2]| \leq \int_0^\infty |\|y(t + s; \varphi_1)\|^2 - \|y(t + s; \varphi_2)\|^2| dt +$$

$$+ L_0(\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq L_0(\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \int_0^\infty e^{-\varepsilon \gamma_0 t} dt \|\varphi_1 - \varphi_2\| +$$

$$+ L_0(\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

deci

$$|V[\varphi_1] - V[\varphi_2]| \leq L_0 \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon \gamma_0} \right] (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Am arătat că funcționala  $V[\varphi]$  verifică condiția lui Lipschitz, deci  $V[\varphi]$  e continuă și de aceea mulțimea  $V[\varphi] \leq C$  e închisă. Să verificăm că e convexă. Fie  $V[\varphi_1] \leq C$ ,  $V[\varphi_2] \leq C$ .

Avem

$$V[\lambda \varphi_1 + (1 - \lambda) \varphi_2] = \int_0^\infty \|y(t + s; \lambda \varphi_1 + (1 - \lambda) \varphi_2)\|^2 dt +$$

$$+ \sup_{\sigma \geq 0} \|y(\sigma + s; \lambda \varphi_1 + (1 - \lambda) \varphi_2)\|^2,$$

$$y(t + s; \lambda \varphi_1 + (1 - \lambda) \varphi_2) = \lambda y(t + s; \varphi_1) + (1 - \lambda) y(t + s; \varphi_2),$$

$$\|y(t + s; \lambda \varphi_1 + (1 - \lambda) \varphi_2)\| \leq \lambda \|y(t + s; \varphi_1)\| + (1 - \lambda) \|y(t + s; \varphi_2)\|,$$

$$\|y(t + s; \lambda \varphi_1 + (1 - \lambda) \varphi_2)\|^2 \leq$$

$$\leq \lambda^2 \|y(t + s; \varphi_1)\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \|y(t + s; \varphi_1)\| \|y(t + s; \varphi_2)\| +$$

$$+ (1 - \lambda)^2 \|y(t + s; \varphi_2)\|^2 \leq \lambda^2 \|y(t + s; \varphi_1)\|^2 + \lambda(\lambda - 1) [\|y(t + s; \varphi_1)\|^2 +$$

$$+ \|y(t + s; \varphi_2)\|^2] + (1 - \lambda)^2 \|y(t + s; \varphi_2)\|^2 =$$

$$= \lambda \|y(t + s; \varphi_1)\|^2 + (1 - \lambda) \|y(t + s; \varphi_2)\|^2,$$

$$\sup_{t \geq 0} \|y(t + s; \lambda \varphi_1 + (1 - \lambda) \varphi_2)\|^2 \leq \lambda \sup_{t \geq 0} \|y(t + s; \varphi_1)\|^2 +$$

$$+ (1 - \lambda) \sup_{t \geq 0} \|y(t + s; \varphi_2)\|^2.$$

De aici obținem

$$V[\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2] \leq \lambda \int_0^\infty \|y(t+s; \varphi_1)\|^2 dt + (1-\lambda) \int_0^\infty \|y(t+s; \varphi_2)\|^2 dt + \\ + \lambda \sup_{t \geq 0} \|y(t+s; \varphi_1)\|^2 + (1-\lambda) \sup_{t \geq 0} \|y(t+s; \varphi_2)\|^2 = \lambda V[\varphi_1] + (1-\lambda) V[\varphi_2] \leq C,$$

deci  $V[\varphi] \leq C$  e convexă.

Rămâne de demonstrat ultima afirmație a lemei. Avem

$$V[y(t+s; t_0, \varphi)] = \int_0^\infty \|y(u+s; y(t+s; t_0, \varphi))\|^2 du + \\ + \sup_{\sigma \geq 0} \|y(\sigma+s; y(t+s; t_0, \varphi))\|^2 = \int_0^\infty \|y(t+u+s; t, y(t+s; t_0, \varphi))\|^2 du + \\ + \sup_{\sigma \geq 0} \|y(t+\sigma+s; t, y(t+s; t_0, \varphi))\|^2 = \int_0^\infty \|y(t+u+s; t_0, \varphi)\|^2 du + \\ + \sup_{\sigma \geq t} \|y(t+\sigma+s; t_0, \varphi)\|^2 = \int_t^\infty \|y(u+s; t_0, \varphi)\|^2 du + \sup_{\sigma \geq t} \|y(\sigma+s; t_0, \varphi)\|^2.$$

Din faptul că  $\sup_{\sigma \geq t} \|y(\sigma+s; t_0, \varphi)\|^2$  este o funcție monoton descrescătoare, rezultă că

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \sup \frac{V[y(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[y(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leq -\|y(t+s; t_0, \varphi)\|^2.$$

Considerăm sistemul

$$\dot{z}(t) = \varepsilon \{H_1 z(t) + H_2 z(t-\varepsilon\tau)\} + A[t, z(t), z(t-\varepsilon\tau)] \{H_1 z(t) + H_2 z(t-\varepsilon\tau)\} + \\ + \varepsilon \{E + A[t, z(t), z(t-\varepsilon\tau)]\} B[z(t), z(t-\varepsilon\tau)].$$

Avem

$$z(u; t, \varphi) = \varphi(t) + \int_t^u \varepsilon [E + A][H_1 z(v; t, \varphi) + H_2 \varphi(v-\varepsilon\tau) + B] dv$$

deci

$$|z(u; t, \varphi)| \leq \|\varphi\| + \varepsilon M \int_t^{t+h} |z(v; t, \varphi)| dv + \varepsilon M h \|\varphi\| + \varepsilon L \int_t^{t+h} |B| dv.$$

Funcția

$$B^*(v) = |B[z(v; t, \varphi), \varphi(v-\varepsilon\tau)]|$$

e continuă și deci

$$\int_t^{t+h} B^*(v) dv = h B^*(t) + \eta h$$



unde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta = 0, \quad B^*(t) = |B[\varphi(t), \varphi(t - \varepsilon\tau)]| \leq 2M_2 \|\varphi\|^{1+\beta}.$$

În definitiv obținem pentru  $t \leq u \leq t + h$ :

$$|z(u; t, \varphi)| \leq \{\|\varphi\| + \varepsilon h(M\|\varphi\| + 2M_2 L\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta)\} e^{\varepsilon Mh}$$

de unde

$$\|z(t+h+s; t, \varphi)\| \leq \{\|\varphi\| + \varepsilon h(M\|\varphi\| + 2M_2 L\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta)\} e^{\varepsilon Mh}.$$

Aceleași calcule dau

$$\|y(t+h+s; t, \varphi)\| \leq \{\|\varphi\| + \varepsilon h M\|\varphi\|\} e^{\varepsilon Mh}.$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} |z(u; t, \varphi) - y(u; t, \varphi)| &\leq \varepsilon M \int_t^{t+h} |z(v; t, \varphi) - y(v; t, \varphi)| dv + \\ &+ 2MM_1 h \varepsilon^{1+\alpha} \{\|\varphi\| + \varepsilon h(M\|\varphi\| + 2M_2 L\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta)\} e^{\varepsilon Mh} + \\ &+ 2\varepsilon LM_2 h \|\varphi\|^{1+\beta} + L\varepsilon \eta h. \end{aligned}$$

De aici, pentru  $t \leq u \leq t + h$ ,

$$\begin{aligned} |x(u; t, \varphi) - y(u; t, \varphi)| &\leq \\ &\leq \varepsilon h \{2MM_1 \varepsilon^\alpha [\|\varphi\| + \varepsilon h(M\|\varphi\| + 2M_2 L\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta)] e^{\varepsilon Mh} + \\ &+ 2LM_2 \|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta\} e^{\varepsilon Mh} \end{aligned}$$

și deci

$$\begin{aligned} \|z(t+h+s; t, \varphi) - y(t+h+s; t, \varphi)\| &= \sup_{-\varepsilon \leq s \leq 0} |z(t+h+s; t, \varphi) - \\ - y(t+h+s; t, \varphi)| &= \sup_{-h \leq s \leq 0} |z(t+h+s; t, \varphi) - y(t+h+s; t, \varphi)| \leq \\ &\leq \varepsilon h \{2MM_1 \varepsilon^\alpha [\|\varphi\| + \varepsilon h(M\|\varphi\| + 2M_2 L\|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta)] e^{\varepsilon Mh} + \\ &+ 2LM_2 \|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta\} e^{\varepsilon Mh}. \end{aligned}$$

De aici

$$\begin{aligned} |V[z(t+h+s; t, \varphi)] - V[y(t+h+s; t, \varphi)]| &\leq \\ &\leq L_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon\gamma_0}\right) [2\|\varphi\| + \varepsilon h(\quad)] e^{\varepsilon Mh} \varepsilon h \{2MM_1 \varepsilon^\alpha [\|\varphi\| + \varepsilon h(\quad)] e^{\varepsilon Mh} + \\ &+ 2LM_2 \|\varphi\|^{1+\beta} + L\eta\} e^{\varepsilon Mh} \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{|V[z(t+h+s; t, \varphi)] - V[y(t+h+s; t, \varphi)]|}{h} &\leq \\ &\leq L_0 \left(\varepsilon + \frac{1}{\gamma_0}\right) 2\|\varphi\| [2MM_1 \varepsilon^\alpha \|\varphi\| + 2LM_2 \|\varphi\|^{1+\beta}]. \end{aligned}$$

Mai departe obținem

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[z(t+h+s; t, \varphi)] - V[\varphi]}{h} \leq \\ & \leq \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[z(t+h+s; t, \varphi)] - V[y(t+h+s; t, \varphi)]}{h} + \\ & + \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[y(t+h+s; t, \varphi)] - V[\varphi]}{h} \leq 4L_0 \left( \varepsilon + \frac{1}{\gamma_0} \right) [MM_1 \varepsilon^\alpha \|\varphi\|^2 + \\ & + LM_2 \|\varphi\|^{2+\beta}] - \|\varphi\|^2 = -\|\varphi\|^2 \left[ 1 - 4L_0 \left( \varepsilon + \frac{1}{\gamma_0} \right) MM_1 \varepsilon^\alpha - \right. \\ & \left. - 4LM_2 L_0 \left( \varepsilon + \frac{1}{\gamma_0} \right) \|\varphi\|^\beta \right] \end{aligned}$$

Pentru  $\varepsilon < \varepsilon_0$  avem

$$4L_0 \left( \varepsilon + \frac{1}{\gamma_0} \right) M \varepsilon^\alpha < \frac{1}{4}$$

și pentru  $\|\varphi\| < \delta_0$  avem

$$4LM_2 L_0 \left( \varepsilon + \frac{1}{\gamma_0} \right) \|\varphi\|^\beta < \frac{1}{4}$$

deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[z(t+h+s; t, \varphi)] - V[\varphi]}{h} \leq -\frac{1}{2} \|\varphi\|^2.$$

Lema e demonstrată.

LEMA 6. *Considerăm sistemul*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \varepsilon \{ [E + A(t, x(t), x(t - \varepsilon\tau), \varepsilon)] [H_1 x(t) + H_2 x(t - \varepsilon\tau) + \\ & + B(x(t), x(t - \varepsilon\tau))] + C(t, x(t), x(t - \varepsilon\tau), \varepsilon) \} \end{aligned}$$

unde  $H_1, H_2, B$  sînt la fel ca în lema precedentă,  $A(t, u, v, \varepsilon), C(t, u, v, \varepsilon)$  sînt periodice în raport cu  $t$  de perioadă  $T$  și

$$|A(t, u, v, \varepsilon)| < M_1 \varepsilon^\alpha, |C(t, u, v, \varepsilon)| < M_3 \varepsilon^{1-\alpha}, \alpha < \frac{1}{2}.$$

Atunci sistemul admite pentru  $\varepsilon > 0$  suficient de mic, o soluție periodică de perioadă  $T$  care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către zero.

*Demonstrație.* Avem

$$x(u; t, \varphi) = \varphi(t) + \varepsilon \int_t^u \{ [E + A] [H_1 x(v; t, \varphi) + H_2 \varphi(v - \varepsilon\tau) + B] + C \} dv,$$

$$z(u; t, \varphi) = \varphi(t) + \varepsilon \int_t^u [E + A] [H_1 z(v; t, \varphi) + H_2 \varphi(v - \varepsilon\tau) + B] dv,$$

$$\begin{aligned}
& |x(u; t, \varphi) - z(u; t, \varphi)| \leq \varepsilon M_4 \int_t^u |x(v; t, \varphi) - z(v; t, \varphi)| dv + \varepsilon^{\alpha+1} h \|\varphi\| + \\
& \quad + 2M_2 L \|\varphi\|^{1+\beta} \varepsilon h + L\eta \varepsilon h + \varepsilon h M_3 \varepsilon^{1-\alpha}, \\
& |x(u; t, \varphi) - z(u; t, \varphi)| \leq \varepsilon h [M_3 \varepsilon^{1-\alpha} + M \varepsilon^\alpha \|\varphi\| + 2M_2 L \|\varphi\|^{1+\beta}] e^{\varepsilon h M_4}.
\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}
& \|x(t+h+s; t, \varphi) - z(t+h+s; t, \varphi)\| \leq \varepsilon h [M_3 \varepsilon^{1-\alpha} + \\
& \quad + M \varepsilon^\alpha \|\varphi\| + 2M_2 L \|\varphi\|^{1+\beta}] e^{\varepsilon h M_4}, \\
& \|x(t+h+s; t, \varphi)\| \leq \|z(t+h+s; t, \varphi)\| + \varepsilon h e^{\varepsilon h M_4} [M_3 \varepsilon^{1-\alpha} + \\
& \quad + M \varepsilon^\alpha \|\varphi\| + 2M_2 L \|\varphi\|^{1+\beta}] \leq \{\|\varphi\| + \varepsilon h(\cdot)\} e^{\varepsilon h M_4}.
\end{aligned}$$

De aici rezultă

$$\begin{aligned}
& |V[x(t+h+s; t, \varphi) - V[z(t+h+s; t, \varphi)]| \leq \\
& \leq L_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon \gamma_0}\right) \{2\|\varphi\| + 2\varepsilon h(\cdot)\} e^{\varepsilon h M_4} h \varepsilon [M_3 \varepsilon^{1-\alpha} + \\
& \quad + M \varepsilon^\alpha \|\varphi\| + 2M_2 L \|\varphi\|^{1+\beta}] e^{\varepsilon h M_4}, \\
& \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[x(t+h+s; t, \varphi) - V[z(t+h+s; t, \varphi)]]}{h} \leq \\
& \leq 2L_0 \left(\varepsilon + \frac{1}{\gamma_0}\right) M_6 \|\varphi\| [\varepsilon^{1-\alpha} + \varepsilon^\alpha \|\varphi\| + \|\varphi\|^{1+\beta}].
\end{aligned}$$

Obținem în definitiv

$$\begin{aligned}
& \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[x(t+h+s; t, \varphi)] - V[\varphi]}{h} \leq 2L_0 \left(\varepsilon + \frac{1}{\gamma_0}\right) M_6 \|\varphi\| [\varepsilon^{1-\alpha} + \\
& \quad + \varepsilon^\alpha \|\varphi\| + \|\varphi\|^{1+\beta}] - \frac{1}{2} \|\varphi\|^2 = \|\varphi\| [M_7 \varepsilon^{1-\alpha} + M_7 \varepsilon^\alpha \|\varphi\| + \\
& \quad + M_7 \|\varphi\|^{1+\beta} - \frac{1}{2} \|\varphi\|].
\end{aligned}$$

Pentru  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\|\varphi\| < \delta_0$ , avem

$$M_7 \varepsilon^\alpha \|\varphi\| + M_7 \|\varphi\|^{1+\beta} < \frac{1}{4} \|\varphi\|$$

și deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[x(t+h+s; t, \varphi)] - V[\varphi]}{h} \leq \|\varphi\| \left[ M_7 \varepsilon^{1-\alpha} - \frac{1}{4} \|\varphi\| \right].$$

Fie acum  $C = \delta_0^2$ ,  $V[\varphi] \leq C$ . Avem  $V[x(t+s; \varphi)] \leq C$  pentru  $t = 0$ . Dacă există  $0 < t_1 < T$  astfel ca  $V[x(t_1+s; \varphi)] > C$ , există

$0 \leq t_2 < T$  astfel ca  $V[x(t_2 + s; \varphi)] = C$  și  $V[x(t_2 + h + s; \varphi)] > C$  pentru  $0 < h < \delta$ , deci

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[x(t_2 + h + s; \varphi)] - V[x(t_2 + s; \varphi)]}{h} \gg 0.$$

Dar

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[x(t_2 + h + s; \varphi)] - V[x(t_2 + s; \varphi)]}{h} = \\ & = \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[x(t_2 + h + s; t_2, x(t_2 + s; \varphi))] - V[x(t_2 + s; \varphi)]}{h} \leq \\ & \leq \|x(t_2 + s; \varphi)\| \left[ M_7 \varepsilon^{1-\alpha} - \frac{1}{4} \|x(t_2 + s; \varphi)\| \right]. \end{aligned}$$

Din  $V[x(t_2 + s; \varphi)] = C$  rezultă

$$C \leq K^2 \left( 1 + \frac{1}{2\varepsilon\gamma_0} \right) \|x(t_2 + s; \varphi)\|^2$$

și

$$\|x(t_2 + s; \varphi)\|^2 \leq C = \delta_0^2,$$

deci

$$\|x(t_2 + s; \varphi)\| \leq \delta_0$$

și

$$\|x(t_2 + s; \varphi)\| \geq \frac{\sqrt{C}}{K \sqrt{1 + \frac{1}{2\varepsilon\gamma_0}}}; \quad -\frac{1}{4} \|x(t_2 + s; \varphi)\| \leq -\frac{1}{4K} \frac{\sqrt{2C\gamma_0}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon\gamma_0}} \sqrt{\varepsilon}.$$

De aici obținem

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[x(t_2 + h + s; t_2, x(t_2 + s; \varphi))] - V[x(t_2 + s; \varphi)]}{h} \leq \\ & \leq \|x(t_2 + s; \varphi)\| [M_7 \varepsilon^{1-\alpha} - M_8 \sqrt{\varepsilon}]. \end{aligned}$$

Dar  $\alpha < \frac{1}{2}$ ,  $1 - \alpha > \frac{1}{2}$ , deci pentru  $\varepsilon > 0$  suficient de mic avem

$M_7 \varepsilon^{1-\alpha} - M_8 \sqrt{\varepsilon} < 0$  și ajungem la o contradicție.

Prin urmare,  $V[x(t + s; \varphi)] \leq C$  pentru toți  $t \in [0, T]$  și  $V[x(T + s; \varphi)] \leq C$ .

Am stabilit astfel că mulțimea închisă, mărginită și convexă  $V[\varphi] \leq C$  este aplicată în ea însăși de operatorul complet continuu  $U[\varphi] = x(T + s; \varphi)$ . De aici rezultă că există un punct fix al acestui operator; acestui punct fix îi corespunde o soluție periodică a sistemului, de perioadă  $T$ . Calculele noastre arată că se poate lua  $C = O(\varepsilon^{\alpha'})$ ,  $\alpha' < 1 - 2\alpha$  de unde rezultă că soluția periodică obținută tinde către zero când  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Demonstrația teoremei 4.32.* Facem în sistemul (77) schimbarea  $z = \zeta^\circ + b$ . Obținem sistemul

$$\dot{b}(t) = \varepsilon B(t, b(t), b(t - \varepsilon \tau), \varepsilon),$$

unde  $B$  are aceleași proprietăți de regularitate ca și  $Z$  și e periodică în  $t$  cu perioada  $T$ . Fie

$$B_0(u, v, \varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T B(t, u, v, \varepsilon) dt.$$

Evident,

$$B_0(0, 0, 0) = 0.$$

Notăm

$$B^*(t, u, v, \varepsilon) = B(t, u, v, \varepsilon) - B_0(u, v, \varepsilon).$$

Avem

$$\frac{1}{T} \int_0^T B^*(t, u, v, \varepsilon) dt = 0.$$

Fie

$$B_\eta^*(t, u, v, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-s)} B^*(s, u, v, \varepsilon) ds.$$

Avem

$$\begin{aligned} B_\eta^*(t, u, v, \varepsilon) &= \int_0^\infty e^{-\eta\sigma} B^*(t - \sigma; u, v, \varepsilon) d\sigma = \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-n\eta T} \int_{nT}^{(n+1)T} B^*(t - \sigma, u, v, \varepsilon) e^{-\eta(\sigma - nT)} d\sigma = \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-n\eta T} \int_0^T e^{-\eta\sigma} B^*(t - \sigma; u, v, \varepsilon) d\sigma = \frac{1}{1 - e^{-\eta T}} \int_0^T e^{-\eta s} B^*(t - s; u, v, \varepsilon) ds. \end{aligned}$$

Fie

$$B^{**}(\sigma; u, v, \varepsilon) = \int_0^\sigma B^*(\xi; u, v, \varepsilon) d\xi.$$

Avem mai departe

$$\begin{aligned} B_\eta^*(t; u, v, \varepsilon) &= \frac{1}{1 - e^{-\eta T}} \int_0^T e^{-\eta s} B^*(t - s; u, v, \varepsilon) ds = \\ &= \frac{-1}{1 - e^{-\eta T}} \int_t^{t-T} e^{-\eta t} e^{\eta\sigma} B^*(\sigma; u, v, \varepsilon) d\sigma = \\ &= \frac{e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta T}} \int_{t-T}^t e^{\eta\sigma} B^*(\sigma; u, v, \varepsilon) d\sigma = \frac{e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta T}} \int_{t-T}^t e^{\eta\sigma} dB^{**} = \\ &= \frac{e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta T}} [e^{\eta\sigma} B^{**}] \Big|_{t-T}^t - \frac{\eta e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta T}} \int_{t-T}^t e^{\eta\sigma} B^{**}(\sigma; u, v, \varepsilon) d\sigma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta T}} [e^{\eta t} B^{**}(t, u, v, \varepsilon) - e^{\eta t} e^{\eta T} B^{**}(t, u, v, \varepsilon)] - \\
&\quad - \frac{\eta e^{-\eta t}}{1 - e^{-\eta t}} \int_0^T e^{\eta(t-s)} B^{**}(t-s; u, v, \varepsilon) ds = \\
&= B^{**}(t, u, v, \varepsilon) - \frac{\eta}{1 - e^{-\eta T}} \int_0^T e^{-\eta s} B^{**}(t-s; u, v, \varepsilon) ds.
\end{aligned}$$

Dar  $B^*$  are valoare medie nulă, deci  $B^{**}$  este o funcție periodică, deci  $B^{**}$  e mărginită. Rezultă

$$|B_{\eta}^*(t, u, v, \varepsilon)| \leq M + M \frac{\eta}{1 - e^{-\eta T}} \int_0^T e^{-\eta s} ds = 2M.$$

Să observăm că

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{\eta}^*(t, u, v, \varepsilon) = - \int_{-\infty}^t \eta e^{-\eta(t-s)} B^*(s, u, v, \varepsilon) ds + B^*(t, u, v, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{\eta}^*(t, u, v, \varepsilon) = -\eta B_{\eta}^*(t, u, v, \varepsilon) + B^*(t, u, v, \varepsilon).$$

Mai departe

$$\frac{\partial}{\partial u} B_{\eta}^*(t, u, v, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-s)} \frac{\partial}{\partial u} B^*(s, u, v, \varepsilon) ds,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} B^*(s, u, v, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial u} B(s, u, v, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial u} B_0(u, v, \varepsilon).$$

Dar

$$\frac{\partial}{\partial u} B_0(u, v, \varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial u} B(t, u, v, \varepsilon) dt$$

deci

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial u} B^*(s, u, v, \varepsilon) ds = 0.$$

De aici rezultă că matricea  $\frac{\partial}{\partial u} B^*(t, u, v, \varepsilon)$  are valoare medie nulă și deci se pot repeta pentru ea toate calculele pe care le-am făcut pentru vectorul  $B^*(t, u, v, \varepsilon)$ . În definitiv obținem

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} B_{\eta}^*(t, u, v, \varepsilon) \right| < M_1$$

și analog

$$\left| \frac{\partial}{\partial v} B_{\eta}^*(t, u, v, \varepsilon) \right| < M_2.$$

Să facem acum în sistem schimbarea de variabile

$$b(t) = h(t) + \varepsilon B_{\eta}^*(t, h(t), h(t), \varepsilon).$$

Obținem

$$\begin{aligned} & h(t) + \varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*(t, h(t), h(t), \varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*(t, h(t), h(t), \varepsilon)}{\partial u} h(t) + \\ & + \varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*(t, h(t), h(t), \varepsilon)}{\partial v} h(t) = \varepsilon B[t, h(t) + \varepsilon B_{\eta}^*, h(t - \varepsilon\tau) + \varepsilon B_{\eta}^*, \varepsilon] = \\ & = \varepsilon B_0[h(t) + \varepsilon B_{\eta}^*, h(t - \varepsilon\tau) + \varepsilon B_{\eta}^*, \varepsilon] + \\ & + \varepsilon B^*[t, h(t) + \varepsilon B_{\eta}^*, h(t - \varepsilon\tau) + \varepsilon B_{\eta}^*, \varepsilon], \\ & B_0[h(t) + \varepsilon B_{\eta}^*, h(t - \varepsilon\tau) + \varepsilon B_{\eta}^*, \varepsilon] = B_0[h(t), h(t - \varepsilon\tau), \varepsilon] + O(\varepsilon) = \\ & = H_1 h(t) + H_2 h(t - \varepsilon\tau) + B_1[h(t), h(t - \varepsilon\tau)] + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

unde

$$H_1 = \frac{\partial}{\partial u} B_0(0, 0, 0), \quad H_2 = \frac{\partial}{\partial v} B_0(0, 0, 0),$$

deci din

$$\begin{aligned} B_0(u, v, \varepsilon) &= \frac{1}{T} \int_0^T B(t, u, v, \varepsilon) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T Z(t, \zeta^0 + u, \zeta^0 + v, \varepsilon) dt = Z_0(\zeta^0 + u, \zeta^0 + v, \varepsilon) \end{aligned}$$

obținem

$$H_1 = \frac{\partial}{\partial u} Z_0(\zeta^0, \zeta^0, 0), \quad H_2 = \frac{\partial}{\partial v} Z_0(\zeta^0, \zeta^0, 0).$$

$$\begin{aligned} & B^*[t, h(t) + \varepsilon B_{\eta}^*, h(t - \varepsilon\tau) + \varepsilon B_{\eta}^*, \varepsilon] = \\ & = B^*[t, h(t) + \varepsilon B_{\eta}^*, h(t) + \varepsilon B_{\eta}^*, \varepsilon] + O(\varepsilon) = B^*(t, h(t), h(t), \varepsilon) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned} & \left( E + \varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial v} \right) h(t) = \varepsilon H_1 h(t) + \varepsilon H_2 h(t - \varepsilon\tau) + \varepsilon B_1[h(t), h(t - \varepsilon\tau)] + \\ & + \varepsilon B^*(t, h(t), h(t), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} B_{\eta}^*(t, h(t), h(t), \varepsilon) + \varepsilon O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Dar

$$\left[ E + \varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial B_{\eta}^*}{\partial v} \right]^{-1} = E + O(\varepsilon)$$

$$B^*(t, h(t), h(t), \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial t} B_{\eta}^*(t, h(t), h(t), \varepsilon) = \eta B_{\eta}^*(t, h(t), h(t), \varepsilon),$$

Fie  $\eta = \varepsilon$ . Obținem în definitiv sistemul

$$h(t) = \varepsilon \{ [E + O(\varepsilon)] [H_1 h(t) + H_2 h(t - \varepsilon\tau) + B_1 [h(t), h(t - \varepsilon\tau)]] + O(\varepsilon) \}.$$

Acest ultim sistem verifică condițiile din lema 6, deci pentru  $\varepsilon > 0$  suficient de mic are o soluție periodică  $h(t)$  de perioadă  $T$  care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către zero. Dar  $B_\varepsilon^*(t, u, v, \varepsilon)$  este funcție periodică de perioadă  $T$ , deci obținem o soluție  $b(t)$  periodică de perioadă  $T$  care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către zero. Dar aceasta înseamnă că sistemul (77) are o soluție periodică  $z(t)$  de perioadă  $T$  care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către  $\zeta^\circ$ .

Teorema e demonstrată.

Să punem în evidență o consecință a acestei teoreme.

Considerăm sistemul

$$\dot{x}(t) = X_0(t, x) + \varepsilon X_1[t, x(t), x(t - \varepsilon\tau), \varepsilon], \quad (79)$$

unde  $X_0$  și  $X_1$  sînt periodice în raport cu  $t$  de perioadă  $T$ .

Presupunem că soluția generală a sistemului

$$\dot{x}(t) = X_0(t, x)$$

e periodică de perioadă  $T$ . Fie  $x_0(t, h)$  această soluție.

Facem schimbarea de variabile  $x = x_0(t, z)$ . Obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial x_0}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} &= X_0[t, x_0(t, z)] + \\ &+ \varepsilon X_1[t, x_0(t, z(t)), x_0(t - \varepsilon\tau, z(t - \varepsilon\tau))]. \end{aligned}$$

Dar

$$\frac{\partial x_0(t, z)}{\partial t} = X_0[t, x_0(t, z)];$$

$x_0(t, h)$  este soluția generală, deci matricea  $\frac{\partial x_0}{\partial z}$  are inversă. De aici obținem

$$\dot{z}(t) = \varepsilon \left[ \frac{\partial x_0(t, z(t))}{\partial z} \right]^{-1} X_1[t, x_0(t, z(t)), x_0(t - \varepsilon\tau, z(t - \varepsilon\tau)), \varepsilon].$$

Dacă aplicăm teorema 4.31, obținem următorul rezultat : Fie  $\zeta^\circ$  o soluție a sistemului

$$Z_0(\zeta^\circ, \zeta^\circ, 0) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\partial x_0(t, \zeta^\circ)}{\partial z} \right)^{-1} X_1[t, x_0(t, \zeta^\circ), x_0(t, \zeta^\circ), 0] dt = 0$$

astfel ca matricea  $\frac{\partial Z_0(\zeta^\circ, \zeta^\circ, 0)}{\partial u} + \frac{\partial Z_0(\zeta^\circ, \zeta^\circ, 0)}{\partial v}$  să aibă valorile proprii

cu părți reale negative ; atunci sistemul (79) are o soluție periodică de perioadă  $T$  care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tinde către soluția  $x_0(t, \zeta^\circ)$  a sistemului generator. Să observăm că în cazul cînd  $X_0$  și  $X_1$  sînt analitice, acest rezultat decurge din teorema 4.25 fără a presupune că întîrzierea este mică.



**TEOREMA 4.33.** *Se consideră sistemul (79) și se presupune că  $X_0$  și  $X_1$  sînt aproape-periodice în  $t$ , uniform în raport cu celelalte variabile și că au derivate parțiale continue pînă la ordinul al doilea inclusiv. Presupunem că sistemul*

$$\dot{x} = X_0(t, x)$$

*are soluția generală  $x_0(t, h)$  aproape-periodică în  $t$ , uniform în raport cu  $h$ . Fie*

$$Z(t, u, v, \varepsilon) = \left[ \frac{\partial x_0(t, u)}{\partial u} \right]^{-1} X_1[t, x_0(t, u), x_0(t - \varepsilon\tau, v), \varepsilon].$$

*Notăm*

$$Z_0(u, v, \varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t, u, v, \varepsilon) dt.$$

*Fie  $\zeta^0$  o soluție a ecuației  $Z_0(u, u, 0) = 0$ . Dacă valorile proprii ale matricei  $\frac{\partial}{\partial u} Z_0(\zeta^0, \zeta^0, 0) + \frac{\partial}{\partial v} Z_0(\zeta^0, \zeta^0, 0)$  au părți reale negative, atunci există  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încît pentru  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  sistemul (79) admite o soluție aproape-periodică unică,  $x(t, \varepsilon)$  cu proprietatea*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x_0(t, \zeta^0).$$

*Demonstrație.* După schimbarea de variabile  $x = x_0(t, z)$  se capătă sistemul

$$\dot{z}(t) = \varepsilon Z(t, z(t), z(t - \varepsilon\tau), \varepsilon)$$

iar după noua schimbare de variabile  $z = \zeta^0 + b$  se capătă

$$\frac{db(t)}{dt} = \varepsilon B[t, b(t), b(t - \varepsilon\tau), \varepsilon].$$

*Notăm*

$$B_0(u, v, \varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(t, u, v, \varepsilon) dt,$$

$$B^*(t, u, v, \varepsilon) = B(t, u, v, \varepsilon) - B_0(u, b, v, \varepsilon).$$

*Avem*

$$B_0(0, 0, 0) = 0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B^*(t, u, v, \varepsilon) dt = 0$$

*Fie*

$$B_\varepsilon^*(t, u, v, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t e^{-\varepsilon(t-s)} B^*(s, u, v, \varepsilon) ds.$$

Atunci  $B_\varepsilon^*$  este o funcție aproape-periodică de  $t$  și pe baza unei leme a lui N. N. Bogoliubov (Cap. III) avem

$$|B_\varepsilon^*| \leq \frac{\zeta(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

unde  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta(\varepsilon) = 0$ .

Facem noua schimbare de variabile

$$b(t) = h(t) + \varepsilon B_\varepsilon^*(t, h(t), h(t), \varepsilon).$$

Obținem

$$\dot{h}(t) + \varepsilon \frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial u} \dot{h}(t) + \varepsilon \frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial v} \dot{h}(t) = \varepsilon B_0 + \varepsilon B^*.$$

Dar

$$\begin{aligned} & B_0[h(t) + \varepsilon B_\varepsilon^*(t, h(t), h(t), \varepsilon), h(t - \varepsilon\tau) + \\ & + B_\varepsilon^*(t - \varepsilon\tau, h(t - \varepsilon\tau), h(t - \varepsilon\tau), \varepsilon), \varepsilon] = B_0[h(t), h(t - \varepsilon\tau), \varepsilon] + \\ & + O(\zeta(\varepsilon)) = H_1 h(t) + H_2(h(t - \varepsilon\tau) + B_1[h(t), h(t - \varepsilon\tau)] + O(\zeta(\varepsilon)) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

unde

$$H_1 = \frac{\partial Z_0}{\partial u}(\zeta^0, \zeta^0, 0), \quad H_2 = \frac{\partial Z_0}{\partial v}(\zeta^0, \zeta^0, 0),$$

$$\begin{aligned} |B_1(u, v)| &\leq \beta(|u| + |v|)^2, \quad |B_1(u_1, v_1) - B_1(u_2, v_2)| \leq \\ &\leq \beta(|u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2|)(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|). \end{aligned}$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} & B^*[t, h(t) + \varepsilon B_\varepsilon^*(t, h(t), h(t), \varepsilon), h(t - \varepsilon\tau) + \varepsilon B_\varepsilon^*(t - \\ & - \varepsilon\tau, h(t - \varepsilon\tau), h(t - \varepsilon\tau), \varepsilon), \varepsilon] = B^*[t, h(t) + \\ & + \varepsilon B_\varepsilon^*(t, h(t), h(t), \varepsilon), h(t) + \varepsilon B_\varepsilon^*(t, h(t), h(t), \varepsilon), \varepsilon] + \\ & + O(\varepsilon) + O(\zeta(\varepsilon)) = B^*[t, h(t), h(t), \varepsilon] + O(\varepsilon) + O(\zeta(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Din

$$\frac{\partial}{\partial t} B_\varepsilon^*(t, u, v, \varepsilon) = B^*(t, u, v, \varepsilon) - \varepsilon B_\varepsilon^*(t, u, v, \varepsilon)$$

rezultă

$$\frac{\partial}{\partial t} B_\varepsilon^*[t, h(t), h(t), \varepsilon] = B^*[t, h(t), h(t), \varepsilon] - \varepsilon B_\varepsilon^*[t, h(t), h(t), \varepsilon]$$

și deci

$$B^*[t, h(t), h(t), \varepsilon] - \frac{\partial}{\partial t} B_\varepsilon^*[t, h(t), h(t), \varepsilon] = O(\zeta(\varepsilon)).$$

Mai departe, din

$$\varepsilon \left( \left| \frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial v} \right| + \left| \frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial v} \right| \right) < \zeta_1(\varepsilon)$$

deducem

$$\left[ E + \varepsilon \frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial v} + \varepsilon \frac{\partial B_\varepsilon^*}{\partial v} \right]^{-1} = E + O(\zeta_2(\varepsilon)),$$

unde

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta_2(\varepsilon) = 0.$$

În definitiv obținem

$$h(t) = \varepsilon h_1 h(t) + \varepsilon H_2 h(t - \varepsilon\tau) + \varepsilon B_1 [h(t), h(t - \varepsilon\tau)] + \\ + \varepsilon \Gamma[t, h(t), h(t - \varepsilon\tau), \varepsilon],$$

unde  $H_1 = \frac{\partial Z_0(\zeta^0, \zeta^0, 0)}{\partial u}$ ,  $H_2 = \frac{\partial Z_0(\zeta^0, \zeta^0, 0)}{\partial v}$ ,  $B_1$  verifică inegalitățile scrise mai sus, iar  $|\Gamma(t, u, v, \varepsilon)| < \gamma(\varepsilon)$  cu  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma(\varepsilon) = 0$ ,  $\Gamma$  fiind aproape-periodică în  $t$ , uniform în raport cu celelalte variabile.

Demonstrăm că pentru  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , acest sistem admite o soluție aproape-periodică unică, care pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  tinde către zero.

Din faptul că valorile proprii ale matricii  $H_1 + H_2$  au părți reale negative, deducem, pe baza lemelor 4 și 5 că există o funcțională  $V[\varphi]$  cu proprietățile:

$$1^\circ \quad \frac{1}{\varepsilon} \|\varphi\|^2 < V[\varphi] \leq \frac{K_1}{\varepsilon} \|\varphi\|^2;$$

$$2^\circ \quad |V[\varphi_1] - V[\varphi_2]| \leq \frac{L_0}{\varepsilon} (\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|) \|\varphi_1 - \varphi_2\|;$$

$$3^\circ \quad \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V[y(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[y(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leq \\ \leq -\|y(t+s; t_0, \varphi)\|^2,$$

unde  $y(t; t_0, \varphi)$  e soluția sistemului (78).

De aici, ca în demonstrația teoremei 4.28, se deduce că pentru orice  $f(t)$  aproape-periodică sistemul

$$\dot{x}(t) = \varepsilon H_1 x(t) + \varepsilon H_2 x(t - \varepsilon\tau) + f(t)$$

admite o soluție aproape-periodică unică  $x_0(t)$  pentru care are loc evaluarea

$$|x_0(t)| < \frac{L}{\varepsilon} \sup |f|.$$

Fie  $h_0(t)$  soluția aproape-periodică a sistemului

$$h(t) = \varepsilon H_1 h(t) + \varepsilon H_2 h(t - \varepsilon\tau) + \varepsilon \Gamma(t, 0, 0, \varepsilon).$$

Avem

$$|h_0(t)| \leq \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \gamma(\varepsilon) = L\gamma(\varepsilon).$$

Fie mai departe  $h_k(t)$  soluția aproape-periodică a sistemului

$$h(t) = \varepsilon H_1 h(t) + \varepsilon H_2 h(t - \varepsilon\tau) - \varepsilon B_1 [h_{k-1}(t), h_{k-1}(t - \varepsilon\tau)] + \\ + \varepsilon \Gamma[t, h_{k-1}(t), h_{k-1}(t - \varepsilon\tau), \varepsilon].$$

Presupunem, prin inducție,

$$|h_{k-1}(t)| < 2L\gamma(\varepsilon).$$

Atunci

$$|B_1 [h_{k-1}(t), h_{k-1}(t - \varepsilon\tau)]| < 16\beta L^2 \gamma^2(\varepsilon),$$

deci

$$|h_k(t)| < \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \{16\beta L^2 \gamma^2(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon)\} = L \{16\beta L^2 \gamma^2(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon)\}.$$

Dacă  $\gamma(\varepsilon) < \frac{1}{16\beta L^2}$ , deducem  $|h_k(t)| < 2L\gamma(\varepsilon)$  și evaluarea este demonstrată. Fie  $l_k(t) = h_k(t) - h_{k-1}(t)$ . Avem

$$l_{k+1}(t) = \varepsilon H_1 l_{k+1}(t) + \varepsilon H_2 l_{k+1}(t - \varepsilon\tau) + \\ + \varepsilon B_1 [h_k(t), h_k(t - \varepsilon\tau)] - \varepsilon B_1 [h_{k-1}(t), h_{k-1}(t - \varepsilon\tau)] + \\ + \varepsilon \Gamma[t, h_k(t), h_k(t - \varepsilon\tau), \varepsilon] - \varepsilon \Gamma[t, h_{k-1}(t), h_{k-1}(t - \varepsilon\tau), \varepsilon].$$

Conform ipotezelor

$$|\varepsilon B_1 [h_k(t), h_k(t - \varepsilon\tau)] - \varepsilon B_1 [h_{k-1}(t), h_{k-1}(t - \varepsilon\tau)]| \leq 16\varepsilon\beta L\gamma(\varepsilon) \sup |l_k|.$$

De aici rezultă

$$|l_{k+1}(t)| \leq \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \{16\beta L\gamma(\varepsilon) \sup |l_k| + 2\gamma(\varepsilon)\}.$$

Avem  $|l_0| = |h_0| \leq L\gamma(\varepsilon)$ ; presupunem că  $|l_k| \leq 3L\gamma(\varepsilon)$ . Rezultă

$$|l_{k+1}(t)| \leq L \{48\beta L^2 \gamma^2(\varepsilon) + 2\gamma(\varepsilon)\}; \text{ dacă } \gamma(\varepsilon) < \frac{1}{48\beta^2}, \text{ deducem } \\ |l_{k+1}(t)| < 3L\gamma(\varepsilon) \text{ și evaluarea e stabilită.}$$

De aici decurge convergența uniformă a aproximațiilor succesive, deci existența soluției aproape-periodice a sistemului în  $h$ . Ținând seama de schimbările de variabile efectuate, deducem existența unei soluții aproape-periodice a sistemului (79) cu toate proprietățile cerute. Teorema e demonstrată.

### § 15. ALTE TEOREME RELATIVE LA SOLUȚII PERIODICE ȘI APROAPE-PERIODICE ALE SISTEMELOR CU ÎNTÂRZIERE

Vom da în încheiere alte câteva teoreme relative la soluțiile periodice și aproape-periodice ale sistemelor cu argument întârziat.

**TEOREMA 4.34.** *Considerăm sistemul general (52). Dacă pentru  $\mu = 0$  sistemul admite o soluție periodică  $x_0(t)$ , de perioadă  $\omega > \tau$ , uniform asimptotic stabilă, atunci pentru  $|\mu|$  suficient de mic sistemul (52) admite o soluție periodică  $x(t, \mu)$  cu proprietatea*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = x_0(t).$$

*Demonstrație.* Fie  $U_\omega^\mu$  operatorul definit de relația

$$U_\omega^\mu \varphi = x(t + s, \varphi, \mu),$$

unde  $x(t, \varphi, \mu)$  este soluția sistemului (52) care pe  $[-\tau, 0]$  coincide cu  $\varphi$ . Vom demonstra că  $U_\omega^\mu$  are un punct fix cu ajutorul teoremei lui F. Browder. Nu restrângem generalitatea luând  $x_0(t) \equiv 0$ , căci ajungem la aceasta printr-o simplă schimbare de variabile care conservă proprietățile sistemului. Stabilitatea asimptotică uniformă înseamnă existența unui număr  $\delta_0 > 0$  și a două funcții  $\delta(\varepsilon)$  și  $T(\varepsilon)$  astfel încât dacă  $\|\varphi\| < \delta(\varepsilon)$ , atunci  $|x(t, \varphi, 0)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq -\tau$  și dacă  $\|\varphi\| < \delta_0$ ,  $t > T(\varepsilon)$ , atunci  $|x(t, \varphi, 0)| < \varepsilon$ . Fie  $\delta_1 = \delta\left(\frac{1}{2}h\right)$ ,  $0 < \eta < \min\left\{\delta_0, \delta\left(\frac{1}{2}\delta_1\right)\right\}$ ,

$$T = T\left[\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)\right], m \text{ cel mai mic număr natural pentru care } m\omega > T + \tau.$$

Fie  $S$  sfera  $\|\varphi\| < \delta_1$ . Atunci  $|x(t, \varphi, 0)| < \frac{1}{2}h$  pentru  $\varphi \in S$  și  $t > -\tau$ .

Dacă  $|\mu|$  e suficient de mic, rezultă  $|x(t, \varphi, \mu)| < h$  pentru  $\varphi \in S$ ,  $-\tau \leq t \leq m\omega$ . De aici rezultă că pentru  $\varphi \in S$  avem  $\|U_\omega^\mu \varphi\| < h$  și ținând seama și de sistemul (52) rezultă că operatorul  $U_\omega^\mu$  este compact pe  $S$ . Din evaluarea obținută rezultă între altele și prelungibilitatea soluțiilor cu  $\varphi \in S$ , deci operatorul e definit pentru toți  $\varphi \in S$ . Fie  $S_1$  sfera  $\|\varphi\| < \eta$  și  $S_0$  sfera  $\|\varphi\| \leq \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$ . Pentru  $\|\varphi\| < \eta$ ,  $t \geq -\tau$  avem  $|x(t, \varphi, 0)| < \frac{1}{2}\delta_1$

deoarece  $\eta < \delta\left(\frac{1}{2}\delta_1\right)$ ; pentru  $|\mu|$  suficient de mic rezultă  $|x(t, \varphi, \mu)| < \delta_1$  pentru  $-\tau \leq t \leq m\omega$ . De aici se deduce  $[U_\omega^\mu]^j(S_1) \subset S$  pentru  $0 \leq j \leq m$ , căci  $[U_\omega^\mu]^j(\varphi) = x(j\omega + s, \varphi, \mu)$ . [Din  $\|\varphi\| \leq \frac{3}{4}\delta\left(\frac{1}{2}\eta\right)$ ,  $t \geq -\tau$  rezultă

$$|x(t, \varphi, 0)| < \frac{1}{2}\eta, \text{ deci pentru } |\mu| \text{ suficient de mic se capătă } |x(t, \varphi, \mu)| < \eta$$

dacă  $\|\varphi\| \leq \frac{3}{4} \delta \left( \frac{1}{2} \eta \right)$ ,  $-\tau \leq t \leq m\omega$ , deci  $[U_\omega^\mu]^j(S_0) \subset S_1$  pentru  $0 \leq j \leq m$ .

Din  $\eta < \delta_0$  rezultă că pentru  $\varphi \in S_1$ ,  $t > T$  avem  $|x(t, \varphi, 0)| < \frac{1}{2} \delta \left( \frac{1}{2} \eta \right)$ ,

deci pentru  $|\mu|$  suficient de mic  $|x(t, \varphi, \mu)| \leq \frac{3}{4} \delta \left( \frac{1}{2} \mu \right)$  dacă  $\varphi \in S_1$ ,

$m\omega - \tau \leq t \leq m\omega$ , adică  $[U_\omega^\mu]^m(S_1) \subset S_0$ . Condițiile teoremei lui F. Browder sînt îndeplinite, operatorul  $U_\omega^\mu$  are un punct fix, deci sistemul (52) are o soluție periodică cu proprietatea din enunț.

**Definiție.** O soluție  $x_0(t)$  a sistemului general (2) se numește stabilă (T) dacă există  $\delta > 0$  astfel încît  $\sup_{t-\tau \leq s \leq t} |x(s) - x_0(s)| < \delta$  să implice

$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{t-\tau \leq s \leq t} |x(s) - x_0(s)| = 0$ , oricare ar fi soluția  $x(t)$  a sistemului.

**TEOREMA 4.35.** Dacă  $f$  este periodică în  $t$  cu perioadă  $\omega$  și dacă sistemul (2) admite o soluție mărginită, stabilă (T), atunci ea admite o soluție periodică de perioadă  $k\omega$ .

**Demonstrație.** Fie  $x_0(t)$  soluția mărginită, stabilă (T). Considerăm familia de funcții  $\varphi_n(s) = x_0(s + n\omega)$ ,  $s \in [-\tau, 0]$ . Avem  $|\varphi_n(s)| < M$  și pentru  $n$  suficient de mare rezultă și  $|\dot{\varphi}_n(s)| < L(M)$ , deci mulțimea  $\{\varphi_n(s)\}$  este compactă. De aici rezultă că există  $n_1$  și  $n_2$  astfel ca

$\max_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi_{n_1}(s) - \varphi_{n_2}(s)| < \delta$ . Fie  $n_2 > n_1, k = n_2 - n_1$ . Considerăm soluția  $x_0(t + k\omega)$ ;

avem  $\max_{n_1\omega - \tau \leq t \leq n_1\omega} |x_0(t + k\omega) - x_0(t)| = \max_{-\tau \leq s \leq 0} |x_0(s + n_1\omega + k\omega) - x_0(s + n_1\omega)| =$

$$= \max_{-\tau \leq s \leq 0} |x_0(s + n_2\omega) - x_0(s + n_1\omega)| = \max_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi_{n_2}(s) - \varphi_{n_1}(s)| < \delta.$$

Deoarece soluția  $x_0(t)$  este stabilă (T), rezultă că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{t-\tau \leq s \leq t} |x_0(s + k\omega) - x_0(s)| = 0.$$

Din faptul că mulțimea  $\{\varphi_n(s)\}$  este compactă, rezultă că există un punct limită  $\varphi^*$ ; fie  $\varphi^*(s) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{n_j}$  și  $x^*(t) = x(t; 0, \varphi^*(s))$ .

Atunci

$$x^*(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} x_0(t + n_j \omega)$$

deoarece

$$x_0(t + n_j \omega) = x(t; 0, x_0(s + n_j \omega)) = x(t; 0, \varphi_{n_j}(s)).$$

Pentru  $t = s + k\omega$  obținem

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_0(s + k\omega + n_j \omega) = x^*(s + \omega).$$

deci

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{n_j+k}(s) = x^*(s + k\omega).$$

Dar din

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{t-\tau \leq s \leq t} |x_0(s + k\omega) - x_0(s)| = 0$$

rezultă

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi_{n_j+k}(s) - \varphi_{n_j}(s)| = 0.$$

Din

$$|\varphi_{n_j+k}(s) - \varphi^*(s)| \leq |\varphi_{n_j+k}(s) - \varphi_{n_j}(s)| + |\varphi_{n_j}(s) - \varphi^*(s)|$$

rezultă

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{n_j+k}(s) = \varphi^*(s)$$

și aceasta înseamnă că

$$x^*(s + k\omega) = \varphi^*(s),$$

deci soluția  $x^*(t)$  este periodică cu perioada  $k\omega$ .

În același fel se demonstrează și următoarea propoziție.

*Dacă sistemul (2) admite o soluție mărginită  $x_0(t)$  astfel ca*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_0(t + \omega) - x_0(t)] = 0,$$

*atunci el admite o soluție periodică de perioadă  $\omega$ .*

*Demonstrație.* Mulțimea  $\{\varphi_n(s)\}$  e compactă; fie

$$\varphi^*(s) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{n_j}(s).$$

Din

$$\lim_{j \rightarrow \infty} [x_0(s + n_j\omega + \omega) - x_0(s + n_j\omega)] = 0$$

rezultă că

$$\varphi^*(s) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{n_j+1}(s).$$

De aici demonstrația decurge ca mai sus cu  $k = 1$ :

$$x(t; 0, \varphi^*(s)) = \lim_{j \rightarrow \infty} x(t; 0, \varphi_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} x(t; 0, \varphi_{n_j+1}).$$

Dar

$$x(t; 0, \varphi_{n_j}) = x_0(t + n_j\omega)$$

și deci

$$x(t; 0, \varphi^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} x_0(t + n_j\omega) = \lim_{j \rightarrow \infty} x_0(t + \omega + n_j\omega).$$

De aici, pentru  $t = s + \omega$ , se capătă  $x(s + \omega; 0, \varphi^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} x_0(s + \omega + n_j\omega) = x(s; 0, \varphi^*) = \varphi^*(s)$ , ceea ce arată că soluția  $x(t; 0, \varphi^*)$  e periodică de perioadă  $\omega$ .

**TEOREMA 4.36.** *Dacă  $f$  este periodică în  $t$ , orice soluție mărginită și uniform stabilă a sistemului (2) este asimptotic aproape-periodică.*

Pentru demonstrarea acestei teoreme avem nevoie de o anumită pregătire.

**DEFINIȚIE.** Fie  $U$  o transformare continuă a unui spațiu metric în el însuși. Transformarea  $U$  se numește asimptotic aproape-periodică în punctul  $p$ , dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există întregii pozitivi  $l$  și  $N$  astfel încât între oricare  $l + 1$  întregi pozitivi consecutivi să existe cel puțin un întreg  $\tau$  pentru care  $\rho(U^n p, U^{n+\tau} p) < \varepsilon$  dacă  $n \geq N$ .

**LEMĂ.** Dacă din orice șir de puncte  $\{U^{n+h_m} p\}$ , ( $m = 1, 2, \dots$ ) se poate extrage un subșir convergent uniform în raport cu  $n$ , atunci  $U$  este asimptotic aproape-periodică în punctul  $p$ .

**Demonstrație.** Presupunem că  $U$  nu este asimptotic aproape-periodică în  $p$ ; atunci există  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încât pentru orice cuplu  $l, N$  există un interval de numere pozitive  $L_{l,N}$  de lungime  $l$  astfel încât pentru orice  $\tau \in L_{l,N}$  să avem  $\rho(U^n p, U^{n+\tau} p) \geq \varepsilon$  pentru cel puțin un  $n \geq N$ . Fie  $L_1 = L_{1,1}$  și  $h_1 \in L_1$ ; alegem pe  $h_2$  întreg astfel ca  $h_2 - h_1$  să fie în  $L_2 = L_{2,2}$ . Alegem mai departe un interval  $L_3 = L_{v_3, v_3}$  astfel ca  $v_3 > 2(h_2 - h_1)$ ; putem găsi un întreg  $h_3$  astfel încât  $h_3 - h_1$  și  $h_3 - h_2$  să fie în  $L_3$ . În general alegem pe  $L_{m+1} = L_{v_{m+1}, v_{m+1}}$  astfel încât  $v_{m+1} > \max_{1 \leq \lambda \leq m} 2(h_\lambda - h_1)$ ,  $v_{m+1} > v_m$ ; e suficient de exemplu să luăm drept  $h_{m+1} - h_1$  unul din întregii imediat vecini mijlocului lui  $L_{m+1}$ . Considerăm șirul

$$U^{n+h_1} p, U^{n+h_2} p, \dots, U^{n+h_m} p, \dots;$$

conform ipotezei, din acest șir se poate extrage un subșir

$$U^{n+k_1} p, U^{n+k_2} p, \dots, U^{n+k_m} p, \dots$$

convergent uniform în raport cu  $n$ ; se poate deci găsi  $R$  astfel ca

$$\rho(U^{n+k_r+s} p, U^{n+k_r} p) < \varepsilon_0 \text{ pentru } r \geq R, s = 1, 2, \dots,$$

oricare ar fi  $n$ . Înlocuind pe  $n$  cu  $n - k_r$ , rezultă că pentru  $r \geq R$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$  și  $n > k_r$  are loc relația

$$\rho(U^{n+k_r+s-k_r} p, U^n p) < \varepsilon_0.$$

Notînd  $k_{r+s} - k_r = \tau_s$ , avem

$$\rho(U^{n+\tau_s} p, U^n p) < \varepsilon_0 \text{ pentru } n > k_r;$$

$\tau_s$  se află în intervalul  $L'_{m_r+s}$  corespunzător lui  $k_{r+s}$ . Lăsăm pe  $r$  fix, cu  $r \geq R$  și alegem pe  $s$  destul de mare pentru ca  $v_{m_r+s} > k_r$ . Notăm  $N = v_{m_r+s}$ . Avem  $\rho(U^{n+\tau_s} p, U^n p) < \varepsilon_0$  pentru  $n > N$  și  $\tau_s \in L'_{N,N}$  ceea ce contrazice felul cum au fost alese intervalele  $L_{l,N}$ . Lema este astfel demonstrată.

**Demonstrația teoremei 4.36.** Fie  $x_0(t)$  o soluție mărginită, uniform stabilă a sistemului (2),  $\varphi_0(s) = x_0(s)$ ,  $s \in [-\tau, 0]$ . Există  $\delta(\varepsilon)$  astfel ca din  $\|x_0(t_0 + s) - \psi(u)\| < \delta$  să rezulte  $|x(t; t_0, \psi) - x_0(t)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ . Pentru  $t_0 = n\omega$  deducem că  $\|x_0(n\omega + s) - \psi(u)\| < \delta$  implică



$|x(t; n\omega, \psi) - x_0(t)| < \varepsilon$  pentru  $t \geq n\omega$  și deci

$$|x(t + n\omega; n\omega, \psi) - x_0(t + n\omega)| < \varepsilon \text{ pentru } t \geq 0.$$

Dar  $x(t + n\omega; n\omega, \psi) = x(t, 0, \psi^*)$ , unde  $\psi^*(s) = \psi(n\omega + s)$ ,  $s \in [-\tau, 0]$ , deoarece în ambii membri avem soluții ale sistemului (2) (din cauza ipotezei că  $f$  e periodică), și cele două soluții coincid pentru  $t \in [-\tau, 0]$ . Prin urmare, din

$$\|x_0(n\omega + s) - \psi^*(s)\| < \delta$$

rezultă

$$|x(t, 0, \psi^*) - x_0(t + n\omega)| < \varepsilon.$$

Considerăm operatorul  $U\varphi = x(s + \omega; 0, \varphi)$ . Avem

$$x(t; 0, U\varphi) = x(t; 0, x(s + \omega; 0, \varphi)) = x(t + \omega; 0, \varphi)$$

și în general

$$x(t; 0, U^n \varphi) = x(t + n\omega; 0, \varphi), \quad x(s + n\omega; 0, \varphi) = U^n \varphi.$$

Din

$$\|x_0(n\omega + s) - \psi^*(s)\| < \delta$$

rezultă

$$|x(t, 0, \psi^*) - x_0(t + n\omega)| < \varepsilon$$

și de aici

$$\|x(s + k\omega, 0, \psi^*) - x_0(s + (n + k)\omega)\| < \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că din

$$\|U^n \varphi_0 - \psi^*\| < \delta$$

rezultă

$$\|U^k \psi^* - U^{n+k} \varphi_0\| < \varepsilon, \quad k > \frac{\tau}{\omega}.$$

Fie  $h_1, h_2, \dots$  un șir de numere naturale,  $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = \infty$ . Mulțimea  $\{U^{h_k} \varphi_0\}$  este compactă datorită faptului că soluția  $x_0(t)$  a fost presupusă mărginită. Fie  $k_m$  un subșir astfel ca

$$\lim_{m \rightarrow \infty} U^{k_m} \varphi_0 = \varphi_0^*.$$

Avem

$$\|U^{l+k_m} \varphi_0 - U^l \varphi_0^*\| = \|U^l U^{k_m} \varphi_0 - U^l \varphi_0^*\|.$$

Pentru  $m$  destul de mare avem

$$\|U^{k_m} \varphi_0 - \varphi_0^*\| < \delta$$

și deci

$$\|U^{l+k_m} \varphi_0 - U^l \varphi_0^*\| < \varepsilon$$

pentru  $l > \frac{\tau}{\omega}$ . Aceasta înseamnă că

$$\lim_{m \rightarrow \infty} U^{l+k_m} \varphi_0 = U^l \varphi_0^*$$

uniform în raport cu  $l$ , pentru  $l > \frac{\tau}{\omega}$ . De aici pe baza lemei rezultă că  $U$  este asimptotic aproape-periodică în punctul  $\varphi_0$ . Rămîne să deducem că soluția  $x_0(t)$  este asimptotic aproape periodică. Pentru orice  $\eta > 0$  există  $l$  și  $N$  astfel ca între  $l + 1$  întregi consecutivi să putem găsi un întreg  $m$  astfel ca

$$\|U^n \varphi_0 - U^{n+m} \varphi_0\| < \eta$$

dacă  $n \geq N$ ; rezultă

$$\|x_0(s + n\omega) - x_0(s + (n + m)\omega)\| < \eta.$$

Fie  $t$  suficient de mare,  $t = t' + k\omega$ ,  $0 \leq t' < \omega$ ; avem

$$\begin{aligned} x(t + s; 0, \varphi_0) &= x(t' + k\omega + s; 0, \varphi_0) = \\ &= x(t' + s; 0, x(k\omega + s; 0, \varphi_0)) = x(t' + s; 0, U^k \varphi_0). \end{aligned}$$

Fie  $\varepsilon > 0$ ; există  $\eta > 0$  astfel ca din  $\|\varphi - \psi\| < \eta$  să rezulte

$$\|x(t + s; 0, \varphi) - x(t + s; 0, \psi)\| < \varepsilon \text{ pentru } 0 \leq t \leq \omega.$$

Fie  $k > N(\eta)$ ; atunci  $\|x(t + s; 0, \varphi_0) - x(t + s + m\omega; 0, \varphi_0)\| =$   
 $= \|x(t' + s; 0, U^k \varphi_0) - x(t' + s; 0, U^{k+m} \varphi_0)\| < \varepsilon$  deoarece  
 $\|U^k \varphi_0 - U^{k+m} \varphi_0\| < \eta.$

Prin urmare

$$|x_0(t) - x_0(t + m\omega)| < \varepsilon$$

pentru  $t > (N + 1)\omega$ . Mulțimea  $m\omega$  este relativ densă, deci  $x_0(t)$  este asimptotic aproape-periodică.

Fără modificări esențiale în demonstrație, rezultatele din §11, capitolul III, relative la perturbațiile singulare ale sistemelor neautonome, se extind la sisteme cu argument întîrziat de forma

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f[t, x(t), x(t-\tau), y(t), y(t-\tau), \varepsilon], \\ \varepsilon \frac{dy(t)}{dt} &= g[t, x(t), y(t), \varepsilon], \end{aligned} \quad (80)$$

unde  $f$  și  $g$  sînt, în raport cu  $t$ , periodice, respectiv aproape-periodice (în cazul periodic, perioada va fi presupusă ca de obicei  $\omega > \tau$ ).

Pentru  $\varepsilon = 0$  se obține sistemul

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f[t, x(t), x(t-\tau), y(t), y(t-\tau), 0], \\ g[t, x(t), y(t), 0] &\equiv 0. \end{aligned} \quad (81)$$

Presupunem că acest sistem admite o soluție  $[u(t), v(t)]$  periodică, respectiv aproape-periodică.

Se notează

$$U(t) = g'_v[t, u(t), v(t), 0]^{-1} g'_x[t, u(t), v(t), 0]$$

$$A_1(t) = f'_x - f'_v U(t), B_1(t) = f'_{x\tau} - f'_{v\tau} U(t - \tau), A_2(t) = f'_v$$

$$B_2(t) = f'_{v\tau}, Q(t) = g'_v,$$

unde derivatele parțiale sînt luate în punctul

$$[t, u(t), u(t - \tau), v(t), v(t - \tau), 0].$$

**TEOREMA 4.37.** *Dacă sistemul (81) admite o soluție periodică, respectiv aproape-periodică  $[u(t), v(t)]$  astfel ca  $\frac{Q + Q^*}{2} \leq -\mu E$  și dacă soluția banală a sistemului*

$$\frac{d\xi}{dt} = A_1(t)\xi(t) + B_1(t)\xi(t - \tau) \quad (82)$$

*este uniform asimptotic stabilă, sistemul (80) admite o soluție periodică, respectiv aproape-periodică unică  $x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)$  astfel ca*

$$x(t, \varepsilon) = u(t) + \varepsilon \xi^*(t, \varepsilon), \quad y(t, \varepsilon) = v(t) + \varepsilon \eta^*(t, \varepsilon) - \varepsilon U(t) \xi^*(t, \varepsilon).$$

**TEOREMA 4.38.** *Presupunem că sistemul (81) admite o familie de soluții periodice de perioadă  $\omega > \tau, [u(t, c), v(t, c)]$  și că pentru soluția corespunzătoare valorii  $c = c_0$  avem  $\frac{Q + Q^*}{2} \leq -\mu E$ .*

*Dacă sistemul (80) admite o soluție periodică de perioadă  $\omega$  de forma*

$$x(t, \varepsilon) = u(t, c_0) + \varepsilon \xi^*(t, \varepsilon),$$

$$y(t, \varepsilon) = v(t, c_0) + \varepsilon \eta^*(t, \varepsilon) - \varepsilon U(t) \xi^*(t, \varepsilon),$$

*atunci*

$$\int_0^\omega q_1(t, c_0) \{A_2(t, c_0) \eta^{**}(t, c_0) + B_2(t, c_0) \eta^{**}(t - \tau, c_0) + f'_v\} dt = 0$$

*pentru toate soluțiile periodice independente  $q_1(t, c_0)$  de perioadă  $\omega$  ale sistemului adjunct sistemului (82).*

*Funcția  $\eta^{**}(t, c_0)$  este dată de formula*

$$\eta^{**}(t, c_0) = -Q^{-1}(t, c_0) \left[ g'_x - \frac{dv(t, c_0)}{dt} \right].$$

## COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Expuneri de ansamblu relative la sistemele cu întârziere se găsesc în [65], [66]. Rezultate cu privire la teoria stabilității sistemelor cu întârziere precum și inegalitatea fundamentală din § 1 se găsesc în monografia [15]. Rezultatele din §§ 1,2 au fost publicate în [67], [68], [69], [70]. Rezultatele din § 3 sînt publicate în [71], cele din § 4 parțial în [72], iar cele din § 5 într-o lucrare comună cu V. M. Popov [73]. Rezultatele din § 6 sînt publicate în [74], [75], [76], iar cele din §§ 7, 8, 9, 10 în [77], [78]. Pentru cazul sistemelor liniare cu coeficienți constanți rezultatele au fost date de S. N. Simanov în [79], [80]. Teoria sistemelor cu parametru mic se găsește în [67] și în [81], [82]. Pentru sisteme cvasiliniare rezultatele au fost stabilite de S. N. Simanov [83]. Rezultatele din § 13 sînt publicate în [49], iar cele relative la metoda mediei în [84], [85]. Teorema 4.33 se află în [86]. Teoremele 4.34 și 4.35 se află în [67] iar teorema 4.36 în [87].

## ANEXĂ

### I. ELEMENTE DE TEORIA TRANSFORMATEI FOURIER

Fie  $f$  o funcție de modul integrabil,  $f \in L^1(-\infty, +\infty)$ . Numim transformata Fourier a funcției  $f$  funcția

$$\Phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} f(t) dt, \alpha \text{ real.}$$

Stabilim următoarele proprietăți:

1° Funcția  $\Phi$  este *mărginită*, căci

$$|\Phi(\alpha)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty.$$

2° Funcția  $\Phi$  este *continuă*, căci

$$\begin{aligned} |e^{-iht} - 1| &= |\cos ht - i \sin ht - 1| = |-2 \sin^2 \frac{ht}{2} - 2i \sin \frac{ht}{2} \cos \frac{ht}{2}| = \\ &= \left| 2 \sin \frac{ht}{2} \right| \left| -\sin \frac{ht}{2} - i \cos \frac{ht}{2} \right| = \left| 2 \sin \frac{ht}{2} \right| \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} |\Phi(\alpha + h) - \Phi(\alpha)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha+h)t} f(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} f(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} (e^{-iht} - 1) f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iht} - 1| |f(t)| dt \leq \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left| \sin \frac{ht}{2} \right| dt \leq 2 \int_{-\infty}^{-R} |f(t)| dt + 2 \int_{-R}^R |f(t)| \left| \sin \frac{ht}{2} \right| dt + \\ &+ 2 \int_R^{\infty} |f(t)| dt \leq 2 \int_{-\infty}^{-R} |f(t)| dt + 2 \int_R^{\infty} |f(t)| dt + \frac{2|h|R}{2} \int_{-R}^R |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Pentru  $\varepsilon > 0$  există  $R_0$  astfel încît dacă  $R > R_0$  să rezulte

$$\int_{-\infty}^{-R} |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{6}, \quad \int_R^{\infty} |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{6}$$

Fixăm pe  $R > R_0$  și alegem  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3R \int_{-R}^R |f(t)| dt}$ . Rezultă că

dacă  $|h| < \delta(\varepsilon)$ , atunci  $|h| R \int_{-R}^R |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3}$ . În definitiv, pentru  $|h| < \delta(\varepsilon)$  rezultă  $|\Phi(\alpha + h) - \Phi(\alpha)| < \varepsilon$ , deci  $\Phi$  este *uniform continuă pe toată axa*

3° Dacă  $f \in L^1$  și  $itf(t) \in L^1$ ,  $\Phi'(\alpha)$  există și este transformata Fourier a funcției  $-itf(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(\alpha + h) - \Phi(\alpha)}{h} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha t} (e^{-iht} - 1)}{h} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} \frac{e^{-iht} - 1}{h} f(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} f_h(t) dt, \end{aligned}$$

unde am notat

$$f_h(t) = \frac{e^{-iht} - 1}{h} f(t).$$

Se vede că

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h(t) = -itf(t),$$

$$|f_h(t)| \leq \frac{|e^{-iht} - 1|}{|h|} |f(t)| = \frac{2 \left| \sin \frac{ht}{2} \right|}{|h|} |f(t)| \leq |t| |f(t)| \in L^1$$

deci  $f_h(t) \in L^1$ . Rezultă că putem trece la limită sub semnul de integrare și obținem

$$\Phi'(\alpha) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} itf(t) dt.$$

4° Dacă  $f' \in L^1$ ,  $f \in L^1$ , atunci transformata Fourier a lui  $f'$  este  $i\alpha \Phi(\alpha)$ . Avem, evident,

$$f(X) - f(x) = \int_x^X f'(t) dt \quad (\text{teorema lui Leibniz-Newton}),$$

deci, deoarece  $f' \in L^1$ , rezultă

$$\lim_{X \rightarrow \infty} f(X) = l.$$

Dar  $f \in L^1$  și din

$$\lim_{X \rightarrow \infty} f(X) = l,$$

rezultă obligatoriu că  $l = 0$ . Putem deci scrie că

$$f(x) = - \int_x^\infty f'(t) dt.$$

Mai departe

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\alpha t} f'(t) dt &= \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow \infty}} \int_{-x_1}^{x_2} e^{-i\alpha t} f'(t) dt = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow \infty}} \left\{ e^{-i\alpha t} f(t) \Big|_{-x_1}^{x_2} + \right. \\ &\quad \left. + i\alpha \int_{-x_1}^{x_2} e^{-i\alpha t} f(t) dt \right\} = i\alpha \Phi(\alpha). \end{aligned}$$

DEFINIȚIE. Fie  $f, g \in L^1$ . Funcția

$$h(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x-y) g(y) dy = \int_{-\infty}^\infty f(y) g(x-y) dy$$

se numește produsul de compoziție al funcțiilor  $f$  și  $g$ .

TEOREMA 1. Dacă  $f, g \in L^1$ , atunci  $h$  e definit pentru aproape orice  $x$  real,  $h \in L^2$  și avem

$$\int_{-\infty}^\infty |h| dt \leq \int_{-\infty}^\infty |f| dt \int_{-\infty}^\infty |g| dt.$$

Transformata Fourier a lui  $h$  este produsul transformatelor Fourier ale funcțiilor  $f$  și  $g$ .

Demonstrație. Avem

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x-t)| |g(t)| dx = |g(t)| \int_{-\infty}^\infty |f(x-t)| dx = |g(t)| \int_{-\infty}^\infty |f(t)| dt$$

deci

$$\left| \int_{-\infty}^\infty f(x-t) g(t) dx \right| < L |g(t)|$$

deci

$$\int_{-\infty}^\infty f(x-t) g(t) dx \in L^1. \text{ Rezultă că } \int_{-\infty}^\infty dt \int_{-\infty}^\infty f(x-t) g(t) dx \text{ există și}$$

$$\int_{-\infty}^\infty dt \int_{-\infty}^\infty |f(x-t)| |g(t)| dx < \int_{-\infty}^\infty |g(t)| dt \int_{-\infty}^\infty |f(t)| dt.$$

Funcția  $f$  e măsurabilă, deci  $f(x-t)$  e măsurabilă în spațiul produs al variabilelor  $(x, t)$ . Se poate aplica teorema lui Fubini și avem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dt \int_{-\infty}^\infty |f(x-t)| |g(t)| dx &= \int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty |f(x-t)| |g(t)| dt \geq \\ &\geq \int_{-\infty}^\infty |h(x)| dx. \end{aligned}$$

Rezultă că  $h$  există aproape peste tot (teorema lui Fubini),

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt, \quad h \in L^1$$

și

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt.$$

Mai departe

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} h(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-y)} f(x-y) e^{-i\alpha y} g(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha y} g(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-y)} f(x-y) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha y} g(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} f(t) dt. \end{aligned}$$

**TEOREMA 2.** Fie  $f_1, f_2 \in L^1$ ,  $\Phi_1(\alpha)$ ,  $\Phi_2(\alpha)$  transformatele Fourier corespunzătoare. Atunci

$$\Phi_1(y) f_2(y) \in L^1, \quad \Phi_2(y) f_1(y) \in L^1$$

și în plus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1 f_2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2 f_1 dy.$$

*Demonstrație.* Prima afirmație este imediată, deoarece  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$  sînt mărginite;

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(y) f_2(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} f_1(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} f_1(x) f_2(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f_1(x) f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f_2(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(x) f_1(x) dx. \end{aligned}$$

**TEOREMA 3.** Fie  $f \in L^1 \cap L^2$ . Atunci  $\Phi \in L^2$  și

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$



*Demonstrație.* Fie  $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)\bar{f}(y)dy$ . Integrala există datorită faptului că  $f \in L^2$ . Avem

$$|h(x)|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+y)|^2 dy \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}(y)|^2 dy \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy \right)^2 < \infty$$

deci  $h$  este mărginită. Funcția  $h$  este și continuă, căci

$$\begin{aligned} |h(x+\delta) - h(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\delta+y)\bar{f}(y)dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\bar{f}(y)dy \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+\delta+y) - f(x+y)]\bar{f}(y)dy \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\delta+y) - f(x+y)| \cdot |\bar{f}(y)| dy \leq \\ &\leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+y+\delta) - f(x+y)|^2 dy \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}(y)|^2 dy \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Dar pentru funcțiile din  $L^2$  avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+y+\delta) - f(x+y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t+\delta) - f(t)|^2 dt$$

oricât de mică dacă  $\delta$  e suficient de mic, de unde rezultă continuitatea funcției  $h$ .

Mai departe

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\bar{f}(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)\bar{f}(-z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)g(z)dz,$$

unde am notat  $g(z) = \bar{f}(-z)$ .

Rezultă că  $h$  este produsul de compoziție al funcțiilor  $f$  și  $g$ , deci transformata Fourier a lui  $h$  există și coincide cu produsul transformatelor funcțiilor  $f$  și  $g$ .

Transformata Fourier a lui  $g$  se calculează în modul următor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iat} g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iat} \bar{f}(-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ias} \bar{f}(s) ds = \bar{\Phi}(\alpha).$$

Rezultă că transformata Fourier a funcției  $h$  este

$$\Phi(\alpha) \bar{\Phi}(\alpha) = |\Phi(\alpha)|^2$$

Fie  $\gamma(x) = e^{-\varepsilon x^2}$ . Avem

$$\gamma'(x) = -2\varepsilon x e^{-\varepsilon x^2} = 2\varepsilon i \cdot ix \gamma(x).$$

Notăm

$$\Psi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iat} \gamma(t) dt.$$

Pe baza proprietăților 3° și 4° avem

$$i\alpha \Psi'(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} \gamma'(t) dt = 2\varepsilon i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} i t \gamma(t) dt = -2\varepsilon i \Psi''(\alpha).$$

Rezultă

$$\Psi'(\alpha) = -\frac{\alpha}{2\varepsilon} \Psi(\alpha), \quad \frac{\Psi'(\alpha)}{\Psi(\alpha)} = -\frac{\alpha}{2\varepsilon}$$

deci

$$\Psi(\alpha) = C e^{-\frac{\alpha^2}{4\varepsilon}}; \quad C = \Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}.$$

Rezultă

$$\Psi(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-\frac{\alpha^2}{4\varepsilon}}.$$

Aplicăm funcțiilor  $\gamma$  și  $h$  teorema 2.

Rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\alpha)|^2 e^{-\varepsilon\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{4\varepsilon}} d\alpha = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(2\sqrt{\varepsilon} y) e^{-y^2} dy.$$

Pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\alpha)|^2 d\alpha = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(0) e^{-y^2} dy = 2\sqrt{\pi} h(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 2\pi h(0).$$

Dar

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \bar{f}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy.$$

**Teorema e demonstrată.**

**TEOREMA 4.** Fie  $f_1, f_2 \in L^1 \cap L^2$ , iar  $\Phi_1, \Phi_2$  transformatele lor Fourier.

**Atunci**

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f_1 \bar{f}_2 + f_2 \bar{f}_1) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_1 \bar{\Phi}_2 + \Phi_2 \bar{\Phi}_1) dt.$$

**Demonstrație.** Pe baza teoremei precedente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1 + f_2|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1 + \Phi_2|^2 dt,$$

sau

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f_1 + f_2)(\bar{f}_1 + \bar{f}_2) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_1 + \Phi_2)(\bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2) dt.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} |f_1|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |f_2|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 \bar{f}_2 + f_2 \bar{f}_1) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1|^2 dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_2|^2 dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_1 \bar{\Phi}_2 + \Phi_2 \bar{\Phi}_1) dt. \end{aligned}$$

Ținând seama de teorema precedentă, rezultă formula din enunț.  
CONSECINȚĂ. Dacă  $f_1$  și  $f_2$  sînt reale, formula devine

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} f_1 f_2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2 \operatorname{Re} \Phi_1 \bar{\Phi}_2) dt,$$

deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1 f_2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \Phi_1(\alpha) \bar{\Phi}_2(\alpha) d\alpha.$$

Dar

$$\Phi_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} f_2(t) dt,$$

deci

$$\bar{\Phi}_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} f_2(t) dt = \Phi_2(-\alpha),$$

deoarece  $f_2$  e reală

Rezultă în definitiv că dacă  $f_1$  și  $f_2$  sînt reale,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1 f_2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \Phi_1(\alpha) \Phi_2(-\alpha) d\alpha.$$

Dacă funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  sînt date numai pe  $[0, \infty)$ , le prelungim cu valoarea nulă pe  $(-\infty, 0)$  și formula precedentă devine

$$\int_0^{\infty} f_1 f_2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \Phi_1(\alpha) \Phi_2(-\alpha) d\alpha.$$

*Observație.* Dacă  $f$  e definită pe  $(0, \infty)$  și e derivabilă, cu derivata în  $L^1$ , rezultă

$$\int_0^{\infty} e^{-i\alpha t} f'(t) dt = e^{-i\alpha t} f(t) \Big|_0^{\infty} + i\alpha \int_0^{\infty} e^{-i\alpha t} f(t) dt = -f(0) + i\alpha \Phi(\alpha).$$

## II. PERMUTAREA ORDINII DE INTEGRARE LA INTEGRALA STIELTJES

În cele ce urmează vom reproduce o teoremă a lui H. E. Bray, relativă la permutarea ordinii de integrare în teoria integralei Stieltjes, care s-a folosit în repetate rînduri în teoria sistemelor generale cu întârziere.

TEOREMĂ. Dacă  $\varphi(s)$  este continuă în  $[a, b]$ ,  $\gamma(x)$  cu variație mărginită în  $[c, d]$ ,  $\alpha(x, s)$  continuă în  $x$  pentru  $s \in [a, b]$  și cu variație mărginită în raport cu  $s$ , uniform pentru  $x \in [c, d]$ , integralele

$$\int_c^d \left[ \int_a^b \varphi(s) d_s \alpha(x, s) \right] d\gamma(x) \text{ și } \int_a^b \varphi(s) d_s \int_c^d \alpha(x, s) d\gamma(x)$$

există și sînt egale.

Demonstrație. Fie

$$\Phi(x) = \int_a^b \varphi(s) d_s \alpha(x, s), \quad \psi(s) = \int_c^d \alpha(x, s) d\gamma(x).$$

Se verifică ușor că  $\psi$  este cu variație mărginită și  $\Phi$  este continuă. De aici rezultă existența celor două integrale. Prin calcul direct se verifică formula

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \left[ \sum_{i=0}^n \varphi(s_i) \{ \alpha(x_j, s_{i+1}) - \alpha(x_j, s_i) \} \right] [\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)] = \\ & = \sum_{i=0}^n \varphi(s_i) \left[ \sum_{j=0}^m \alpha(x_j, s_{i+1}) \{ \gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j) \} - \sum_{j=0}^m \alpha(x_j, s_i) \{ \gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j) \} \right] \end{aligned}$$

Fie  $\varepsilon > 0$ . Pentru diviziuni de normă suficient de mică avem

$$\begin{aligned} & \left| \int_c^d \Phi(x) d\gamma(x) - \sum_{j=0}^m \Phi(x_j) \{ \gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j) \} \right| < \frac{\varepsilon}{4} \\ & \left| \sum_{j=0}^m \psi(x_j) \{ \gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j) \} - \sum_{j=0}^m \left[ \sum_{i=0}^n \varphi(s_i) \{ \alpha(x_j, s_{i+1}) - \alpha(x_j, s_i) \} \right] \{ \gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j) \} \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\int_c^d \Phi(x) d\gamma(x) - \sum_{j=0}^m \left[ \sum_{i=0}^n \varphi(s_i) \{ \alpha(x_j, s_{i+1}) - \alpha(x_j, s_i) \} \right] [\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La fel, pentru diviziuni de normă destul de mică

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \varphi(s) d\psi(s) - \sum_{i=0}^{n'} \varphi(s_i) [\psi(s_{i+1}) - \psi(s_i)] \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \\ & \left| \sum_{i=0}^{n'} \varphi(s_i) [\psi(s_{i+1}) - \psi(s_i)] - \sum_{i=0}^{n'} \varphi(s_i) \left[ \sum_{j=0}^{m'} \alpha(x_j, s_{i+1}) \{ \gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j) \} - \sum_{j=0}^{m'} \alpha(x_j, s_i) \{ \gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j) \} \right] \right| < \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \varphi(s) d\psi(s) - \sum_{i=0}^{n'} \varphi(s_i) \left[ \sum_{j=0}^{m'} \alpha(x_j, s_{i+1}) \{ \gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j) \} - \sum_{j=0}^{m'} \alpha(x_j, s_i) \{ \gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j) \} \right] \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

În definitiv, pentru diviziuni de normă suficient de mică, convenabil alese,

$$\left| \int_c^d \Phi(x) d\gamma(x) - \int_a^b \varphi(s) d\psi(s) \right| < \varepsilon,$$

deci

$$\int_c^d \Phi(x) d\gamma(x) = \int_a^b \varphi(s) d\psi(s).$$

Teorema este astfel demonstrată.

Să observăm că aceleași calcule rămân valabile în cazul cînd funcțiile care intervin au valori matriciale pentru care înmulțirea este permisă. De asemenea se demonstrează la fel formula de forma

$$\int_a^b y(\alpha) \left[ \int_c^d x(s) d_s \eta(\alpha, s - \alpha) \right] d\alpha = \int_c^d x(s) d_s \int_a^b y(\alpha) \eta(\alpha, s - \alpha) d\alpha.$$

Presupunînd  $\eta(\alpha, s) \equiv 0$  pentru  $s \geq 0$ , are loc formula

$$\begin{aligned} \int_a^b y(\alpha) \left[ \int_{-A}^{\alpha} x(s) d_s \eta(\alpha, s - \alpha) \right] d\alpha &= \int_{-A}^a x(s) d_s \int_a^b y(\alpha) \eta(\alpha, s - \alpha) d\alpha + \\ &+ \int_a^b x(s) d_s \int_s^b y(\alpha) \eta(\alpha, s - \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Într-adevăr, ținînd seama de condiția impusă lui  $\eta$  deducem că

$$\int_{\alpha}^b x(s) d_s \eta(\alpha, s - \alpha) = 0 \text{ pentru } a \leq \alpha \leq b,$$

deci

$$\begin{aligned} \int_a^b y(\alpha) \left[ \int_{-A}^{\alpha} x(s) d_s \eta(\alpha, s - \alpha) \right] d\alpha &= \int_a^b y(\alpha) \left[ \int_{-A}^{\alpha} x(s) d_s \eta(\alpha, s - \alpha) \right] d\alpha = \\ &= \int_{-A}^b x(s) d_s \int_a^b y(\alpha) \eta(\alpha, s - \alpha) d\alpha = \int_{-A}^a x(s) d_s \int_a^b y(\alpha) \eta(\alpha, s - \alpha) d\alpha + \\ &+ \int_a^b x(s) d_s \int_a^b y(\alpha) \eta(\alpha, s - \alpha) d\alpha = \int_{-A}^a x(s) d_s \int_a^b y(\alpha) \eta(\alpha, s - \alpha) d\alpha + \\ &+ \int_a^b x(s) d_s \int_s^b y(\alpha) \eta(\alpha, s - \alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

deoarece pentru  $s \geq a$  și  $a \leq \alpha \leq s$  avem  $s - \alpha \geq 0$  și  $\eta(\alpha, s - \alpha) \equiv 0$ . Ultima formulă obținută este cea folosită în mod sistematic în teoria sistemelor cu întârziere.

### III. TEORIA STABILITĂȚII SISTEMELOR LINIARE STAȚIONARE CU ÎNTÎRZIERE

În cele ce urmează vom prezenta, după N. N. Krasovski, teoria generală a stabilității sistemelor liniare staționare cu întârziere, bazată pe teoria semigrupurilor.

Se consideră un sistem de forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \int_{-\tau}^0 x_j(t+s) d\eta_{ij}(s).$$

Dacă  $d\eta_{ij}=0$  pentru  $s \neq h_{ij}$ ,  $d\eta_{ij}=a_{ij}$  pentru  $s = -\tau_{ij}$  se obține un sistem de forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}).$$

Considerăm operatorul  $T(t)$  definit pe spațiul funcțiilor vectoriale continue pe  $[-\tau, 0]$  prin relația

$$T(t) \varphi = x(t+s; \varphi).$$

Deoarece sistemul este liniar, operatorul  $T(t)$  este liniar. În plus, ținând seama de faptul că sistemul este staționar

$$\begin{aligned} T(t_1 + t_2) \varphi &= x(t_1 + t_2 + s; \varphi) = x(t_1 + s; x(t_2 + s; \varphi)) = \\ &= T(t_1) x(t_2 + s; \varphi) = T(t_1) T(t_2) \varphi. \end{aligned}$$

Într-adevăr, o dată cu  $x(t; \varphi)$  este soluție și  $x(t+t_2; \varphi)$ ; pe  $[-\tau, 0]$  soluția  $x(t+t_2; \varphi)$  coincide cu  $x(t_2+s; \varphi)$ , deci  $x(t+t_2; \varphi) = x(t; x(t_2+s; \varphi))$ .

Punând aici  $t = t_1 + s$  se capătă relația pe care am folosit-o.

Relația

$$T(t_1 + t_2) = T(t_1) T(t_2), \quad t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0,$$

arată că  $T(t)$  formează un *semigrup*.

Ținând seama de inegalitatea fundamentală (3) din capitolul IV rezultă

$$\|T(t)\varphi\| \leq e^{\mu t} \|\varphi\|, \quad \text{pentru } t \geq 0.$$

Conform definiției operatorului  $T(t)$ , rezultă și

$$\lim_{t \rightarrow 0+} T(t) = I,$$

unde  $I$  este operatorul identic, iar limita este în topologia tare, adică

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|T(t)\varphi - \varphi\| = 0$$

pentru orice  $\varphi$  din spațiul considerat.

Introducem operatorul infinitezimal generator al semigrupului, definit prin

$$A\varphi = \lim_{\xi \rightarrow 0+} \frac{1}{\xi} [T(\xi)\varphi - \varphi].$$

Ținând seama de definiția operatorului  $T$  rezultă

$$A\varphi = \lim_{\xi \rightarrow 0+} \frac{1}{\xi} [x(\xi + s; \varphi) - \varphi].$$

Dacă  $\varphi$  este derivabilă și  $s < 0$ , pentru  $\xi + s < 0$  avem

$$x(\xi + s; \varphi) = \varphi(\xi + s)$$

și deci dacă  $\psi(s) = A\varphi$ , avem

$$\psi(s) = \lim_{\xi \rightarrow 0+} \frac{1}{\xi} [\varphi(\xi + s) - \varphi(s)] = \varphi'(s),$$

unde  $\varphi'(s)$  este derivata la dreapta a funcției  $\varphi$ .

Pentru  $s = 0$ ,  $x(\xi; \varphi)$  este soluție a sistemului,  $x(0; \varphi) = \varphi(0)$  și

$$\lim_{\xi \rightarrow 0+} \frac{1}{\xi} [x(\xi; \varphi) - x(0; \varphi)] = x'[0; \varphi].$$

Conform sistemului rezultă

$$x'[0; \varphi] = \int_{-\tau}^0 \varphi(s) d\eta(s).$$

Prin urmare, operatorul  $A$  este sigur definit pe mulțimea funcțiilor care admit derivată la dreapta și dacă  $\varphi$  este o asemenea funcție iar  $\psi = A\varphi$ , atunci

$$\psi(s) = \varphi'(s) \quad -\tau \leq s < 0,$$

$$\psi(0) = \int_{-\tau}^0 \varphi(s) d\eta(s).$$

Să determinăm spectrul operatorului  $A$ , adică mulțimea valorilor  $\lambda$  pentru care operatorul  $\lambda I - A$  nu admite un invers mărginit. Dacă  $\chi = (\lambda I - A)\varphi$ , atunci

$$\chi(s) = \lambda \varphi(s) - \varphi'(s) \quad \text{pentru } -\tau \leq s < 0,$$

$$\chi(0) = \lambda \varphi(0) - \int_{-\tau}^0 \varphi(s) d\eta(s).$$

Căutăm valorile  $\lambda$  pentru care aceste relații nu pot fi rezolvate unic în raport cu  $\varphi$  când  $\chi$  este dată continuă.

Prima relație dă

$$\varphi(s) = \varphi_0 e^{\lambda s} - \int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)} \chi(\sigma) d\sigma.$$

Înlocuind pe  $\varphi$  în cea de-a doua relație se obține

$$\begin{aligned} \chi(0) &= \lambda \varphi_0 - \int_{-\tau}^0 \left[ \varphi_0 e^{\lambda s} - \int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)} \chi(\sigma) d\sigma \right] d\eta(s) = \\ &= \lambda \varphi_0 - \varphi_0 \int_{-\tau}^0 e^{\lambda s} d\eta(s) + \int_{-\tau}^0 \left[ \int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)} \chi(\sigma) d\sigma \right] d\eta(s). \end{aligned}$$

Deci pentru determinarea valorilor  $\varphi_0$ , se obține sistemul liniar

$$\varphi_0 \left( \int_{-\tau}^0 e^{\lambda s} d\eta(s) - \lambda E \right) = \int_{-\tau}^0 \left[ \int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)} \chi(\sigma) d\sigma \right] d\eta(s) - \chi(0).$$

Rezultă de aici că valorile  $\lambda$  pentru care sistemul nu admite soluție unică sînt soluțiile ecuației

$$\det \left( \int_{-\tau}^0 e^{\lambda s} d\eta(s) - \lambda E \right) = 0.$$

În cazul particular al sistemelor cu argument întîrziat se obține ecuația

$$\det (a_{ij} e^{-\lambda \tau_{ij}} - \lambda \delta_{ij}) = 0.$$

**TEOREMĂ.** Dacă spectrul operatorului  $A$  se află în semiplanul  $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma$ ,  $\gamma > 0$ , soluțiile sistemului verifică inegalitatea  $\|x(t+s; \varphi)\| \leq B e^{-\alpha t} \|\varphi\|$  pentru  $t \geq 0$ , unde se poate lua  $\alpha = q\gamma$ ,  $0 < q < 1$  arbitrar.

*Demonstrație.* Fie  $z(t; \varphi) = e^{\gamma t} x(t; \varphi)$ . Avem

$$\frac{dz}{dt} = \gamma e^{\gamma t} x(t; \varphi) + e^{\gamma t} \frac{dx}{dt} = \gamma z(t; \varphi) + e^{\gamma t} \int_{-\tau}^0 x(t+s; \varphi) d\eta(s),$$

deci

$$\frac{dz(t; \varphi)}{dt} = \gamma z(t; \varphi) + e^{\gamma t} \int_{-\tau}^0 e^{-\gamma(t+s)} z(t+s; \varphi) d\eta(s).$$

Rezultă că  $z(t; \varphi)$  este soluție a sistemului

$$\frac{dz}{dt} = \gamma z + \int_{-\tau}^0 z(t+s) e^{-\gamma s} d\eta(s).$$

Acest sistem definește și el un semigrup de operatori  $T_0(t)$ , al cărui operator infinitesimal generator este dat de :

$$A_0 \varphi = \begin{cases} \varphi'(s) & -\tau \leq s < 0 \\ \gamma \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \varphi(s) e^{-\gamma s} d\eta(s). \end{cases}$$



Pentru  $T_0(t)$  are loc, la fel ca pentru  $T(t)$ , o evaluare de forma

$$\|T_0(t)\| \leq e^{L_0 t}.$$

Aceleași calcule ca mai sus permit să se obțină spectrul operatorului  $A_0$ . Se formează ecuațiile

$$\chi(s) = \lambda \varphi(s) - \varphi'(s) \text{ pentru } -\tau \leq s < 0,$$

$$\chi(0) = \lambda \varphi(0) - \gamma \varphi(0) - \int_{-\tau}^0 \varphi(s) e^{-\gamma s} d\eta(s).$$

Rezultă

$$\varphi(s) = \varphi_0 e^{\lambda s} - \int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)} \chi(\sigma) d\sigma$$

și

$$\chi(0) = (\lambda - \gamma) \varphi_0 - \int_{-\tau}^0 \left[ \varphi_0 e^{\lambda s} - \int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)} \chi(\sigma) d\sigma \right] e^{-\gamma s} d\eta(s)$$

de unde se capătă pentru  $\varphi_0$  sistemul

$$\varphi_0 \left( \int_{-\tau}^0 e^{(\lambda-\gamma)s} d\eta(s) - (\lambda - \gamma) E \right) = \int_{-\tau}^0 \left[ \int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)} \chi(\sigma) d\sigma \right] e^{-\gamma s} d\eta(s).$$

Prin urmare, spectrul lui  $A_0$  e dat de ecuația

$$\det \left( \int_{-\tau}^0 e^{(\lambda-\gamma)s} d\eta(s) - (\lambda - \gamma) E \right) = 0.$$

Se vede deci că dacă  $\lambda$  aparține spectrului lui  $A_0$ , atunci  $\lambda - \gamma$  aparține spectrului lui  $A$  deci, conform ipotezei,  $\operatorname{Re}(\lambda - \gamma) \leq -\gamma$ , de unde rezultă  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ .

Prin urmare, spectrul operatorului  $A_0$  se află în semiplanul  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ . Ținând seama de evaluarea pentru operatorul  $T_0(t)$  se deduce, pe baza unei teoreme generale din teoria semigrupurilor,

$$T_0(\xi) \varphi = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\omega}^{\gamma_1 + i\omega} e^{\lambda \xi} R(\lambda, A_0) \varphi d\lambda,$$

unde  $\gamma_1 > L_0$ ,  $\varphi$  este derivabilă, iar  $R(\lambda, A_0)$  este rezolventa operatorului  $A_0$ . Din calculele făcute pentru determinarea spectrului lui  $A_0$  se deduce că rezolventa se definește prin formulele

$$R(\lambda, A_0) \varphi = \begin{cases} \left( \int_{-\tau}^0 e^{(\lambda-\gamma)\sigma} d\eta(\sigma) - (\lambda - \gamma) E \right)^{-1} \int_{-\tau}^0 \left[ \int_0^\sigma e^{\lambda(\sigma-\zeta)} \varphi(\zeta) d\zeta \right] e^{-\gamma\sigma} d\eta(\sigma) e^{\lambda s} - \\ - \int_0^s e^{\lambda(s-\sigma)} \varphi(\sigma) d\sigma, & -\tau \leq s < 0 \\ \left( \int_{-\tau}^0 e^{(\lambda-\gamma)\sigma} d\eta(\sigma) - (\lambda - \gamma) E \right)^{-1} \int_{-\tau}^0 \left[ \int_0^\sigma e^{\lambda(\sigma-\zeta)} \varphi(\zeta) d\zeta \right] e^{-\gamma\sigma} d\eta(\sigma). & s \geq 0 \end{cases}$$

Din aceste formule ținând seama că spectrul lui  $A_0$  se află în  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ , rezultă că pentru orice  $\gamma_2 > 0$  există  $P(\gamma_2)$  astfel ca  $\|R(\lambda, A_0)\| \leq P(\gamma_2)$  pentru  $\gamma_1 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq L_0 + 1$ .

Din teoria generală a semigrupurilor rezultă că

$$R(\lambda, A_0) \varphi = \frac{\varphi}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} A_0 \varphi + \frac{1}{\lambda^2} R(\lambda, A_0) A_0^2 \varphi$$

pentru toate funcțiile  $\varphi$  care aparțin domeniului de definiție al lui  $A_0$  și  $A_0^2$ .

De aici rezultă că pentru funcțiile din domeniul lui  $A_0^2$ :

$$T_0(\xi) \varphi = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2 - i\omega}^{\gamma_2 + i\omega} e^{\lambda \xi} R(\lambda, A_0) \varphi d\lambda$$

pentru orice  $\gamma_2 > 0$ . Înlocuind expresia rezolventei deducem

$$\begin{aligned} T_0(\xi) \varphi = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} & \left[ \int_{\gamma_2 - i\omega}^{\gamma_2 + i\omega} e^{\lambda \xi} \frac{\varphi}{\lambda} d\lambda + \int_{\gamma_2 - i\omega}^{\gamma_2 + i\omega} e^{\lambda \xi} \frac{A_0 \varphi}{\lambda} d\lambda + \right. \\ & \left. + \int_{\gamma_2 - i\omega}^{\gamma_2 + i\omega} e^{\lambda \xi} \frac{R(\lambda, A_0) A_0^2 \varphi}{\lambda^2} d\lambda \right]. \end{aligned}$$

Din această formulă se obține evaluarea

$$\|T_0(\xi) \varphi\| \leq (\|\varphi\| + P_1 \|A_0 \varphi\| + P_2 \|A_0^2 \varphi\|) e^{(\gamma_2 + \beta)\xi},$$

unde  $\beta > 0$  e oricât de mic.

Să demonstrăm acum că funcția  $z(3\tau + s; \varphi)$  este, pentru orice  $\varphi$  conținută în domeniul lui  $A_0^2$  și în plus există  $N_1, N_2$  astfel ca

$$\|A_0 z(3\tau + s; \varphi)\| \leq N_1 \|\varphi\|, \|A_0^2 z(3\tau + s; \varphi)\| \leq N_2 \|\varphi\|.$$

Într-adevăr, soluția  $z(t; \varphi)$  este pentru  $t > 0$  derivabilă, iar din sistem rezultă că  $\frac{dz}{dt}$  este continuă pentru  $t > \tau$ .

De aici rezultă

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \gamma \frac{dz}{dt} + \int_{-\tau}^0 \frac{dz(t+s)}{dt} e^{-\gamma s} d\eta(s)$$

pentru  $t > 2\tau$ .

Prin urmare  $z(3\tau + s; \varphi)$  este de două ori derivabilă și în plus

$$\left. \frac{dz(3\tau + s; \varphi)}{ds} \right|_{s=0} = \gamma z(3\tau; \varphi) + \int_{-\tau}^0 z(3\tau + \sigma; \varphi) e^{-\gamma \sigma} d\eta(\sigma),$$

$$\left. \frac{d^2 z(3\tau + s; \varphi)}{ds^2} \right|_{s=0} = \gamma \left. \frac{dz(3\tau + s; \varphi)}{ds} \right|_{s=0} + \int_{-\tau}^0 \frac{dz(3\tau + \sigma; \varphi)}{ds} e^{-\gamma \sigma} d\eta(\sigma).$$

Aceste formule arată că  $z(3\tau + s; \varphi)$  aparține domeniului lui  $A_0^2$ . Evaluările dorite rezultă imediat din egalitatea fundamentală (3) din capitolul IV.

Deducem în definitiv evaluarea

$$\|T_0(\xi)z(3\tau + s; \varphi)\| \leq P_3 e^{(\gamma_2 + \beta)\xi} \|\varphi\|.$$

Dar

$$z(3\tau + s; \varphi) = T_0(3\tau)\varphi$$

și

$$T_0(\xi)z(3\tau + s; \varphi) = T_0(\xi)T_0(3\tau)\varphi = T_0(\xi + 3\tau)\varphi.$$

Punînd  $\xi + 3\tau = t$  deducem

$$\|T_0(t)\varphi\| \leq P_3 e^{(\gamma_2 + \beta)(t - 3\tau)} \|\varphi\| \text{ pentru } t \geq 3\tau.$$

Ținînd seama de evaluarea pentru  $0 < t \leq 3\tau$ , obținem în definitiv

$$\|T_0(t)\varphi\| \leq Q e^{(\gamma_2 + \beta)t} \|\varphi\| \text{ pentru } t > 0$$

deci

$$\|z(t + s; \varphi)\| \leq Q e^{(\gamma_2 + \beta)t} \|\varphi\|.$$

De aici se obține însă imediat

$$\|x(t + s; \varphi)\| \leq Q e^{\gamma\tau} e^{-(\gamma - \gamma_2 - \beta)t} \|\varphi\| = B e^{-at}$$

Teorema este demonstrată.

#### COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Anexa II este reprodusă după lucrarea lui H. Bray [88], iar anexa III după [15].

## BIBLIOGRAFIE

1. I. G. PETROVSKI, *Prelegeri asupra teoriei ecuațiilor diferențiale ordinare*. Ed. tehnică, București, 1952.
2. V. V. STEPANOV, *Curs de ecuații diferențiale*. Ed. tehnică, București, 1955.
3. В. В. НЕМЫЦКИЙ, В. В. СТЕПАНОВ, *Качественная теория дифференциальных уравнений*. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1949.
4. E. A. CODDINGTON, N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*. Mc. Graw-Hill Book Comp. New York, Toronto, London, 1955. (Există traducere în l. rusă: Изд. Иностранной Литературы, Москва, 1958).
5. S. LEFSCHETZ, *Differential Equations: Geometric Theory*. Interscience Publishers, New York, London, 1957. (Există traducere în limba rusă: *Геометрическая теория дифференциальных уравнений*. Изд. Иностр. Лит., Москва, 1961).
6. Л. С. ПОНТЯГИН, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Физматиздат, Москва, 1961.
7. T. WAZEWSKI, *Systèmes de équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*. Annales de la Soc. Polonaise de Math., **XXIII** 112—166 (1950).
8. А. М. ЛЯПУНОВ, *Общая задача об устойчивости движения*. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1950.
9. И. Г. МАЛКИН, *Теория устойчивости движения*. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1962.
10. J. L. MASSERA, *Contribution to Stability Theory*. Annals of Math., **65**, 1, 182—206 (July 1956).
11. К. П. ПЕРСИДСКИЙ, *Об устойчивости по первому приближению*. Мат. Сборник, **40**, 284—293 (1933).
12. В. В. РУМЯНЦЕВ, *Об устойчивости движения относительно части переменных*. Вестник Московского Университета. Серия Мат. и Мех., **4**, 9—16 (1957).
13. A. HALANAY, *Generalizarea unei teoreme a lui K. P. Persidski*. Comunicările Acad. R.P.R., **12**, 1065—1068 (1960).
14. И. Г. МАЛКИН, *К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости*. Прикладная Мат. и Мех., (1954), **18**, 129—138.
15. Н. Н. КРАСОВСКИЙ, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*. Физматиздат, Москва, 1959.
16. К. КОРДУЛЯНУ, *Применение дифференциальных неравенств к теории устойчивости*. Analele științifice ale Univ. Al. Cuza din Iași (seria nouă) Secțiunea I (Matematică, Fizică, Chimie), **VI** 1, 47—58 (1960).
17. I. G. MAL'KIN, *Das Existenz-Problem von Ljapunovschen Funktionen*. Известия Физмат. общества, Казань, **III**, 4, 51—62; **III**, 5, 63—84. (1931)
18. I. M. GHELFAND, *Lección de algebră liniară*. Ed. tehnică, București, 1953.
19. W. HAHN, *Eine Bemerkung zur zweiten Methode von Ljapunov*. Math. Nachrichten, **14**, 349—354 (1956).

20. R. BELLMAN, *Stability Theory of Differential Equations*. New York, Toronto, London, 1953. (Există traducere în l. rusă. Изд. Иностранной литературы, Москва, 1954).
21. Е. А. БАРБАШИН, *О двух схемах доказательства теорем об устойчивости по первому приближению*. Докл. АН СССР, **111**, 9—11 (1956).
22. A. HALANAY, *Cteva observații asupra stabilității asimptotice*, Analele Univ. „C. I. Parhon”, București, Seria Științelor Naturii, **9**, 31—38 (1956).
23. — *Un criteriu de stabilitate*. Comunicările Acad. R.P.R., **IX**, 3, 209—214 (1959).
24. Н. Н. БАУТИН, *О поведении динамических систем вблизи границ области устойчивости*. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1949.
25. T. HACKER, *Stability of Partially Controlled Motions of an Aircraft*. Journal of the Aerospace Sciences, **28** 1, 15—27 (Jan. 1961).
26. В. Е. ГЕРМАЙДЗЕ, *Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях*. Прикладная Мат. и Мех., **21** (1957), 6.
27. ИВО ВРКОЧ, *Интегральная устойчивость*. Чехословацкий Мат. Журнал, **9** (84), (1959), 71—128.
28. KYUZO HAYASHI, *On the Strong Stability and Boundedness of Solutions of Ordinary Differential Equations*. Memoirs of the College of Science, Univ. of Kyoto, Series A, Mathematics, **XXXII**, 2 (1959).
29. Н. П. ЕРУГИН, *Приводимые системы*. Труды Мат. Инст. им. Стеклова, **13** (1946).
30. И. М. ГЕЛЬФАНД, В. Б. ЛИДСКИЙ, *О структуре областей устойчивости канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*. Успехи Мат. Наук, **10**, 3—40 (1955).
31. М. Г. КРЕЙН, *Основные положения теории  $\lambda$ -зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*. АН СССР, Памяти А. А. Андропова, Москва, 1955, р. 413—498.
32. В. А. ЯКУБОВИЧ, *Замечание к некоторым работам по системам линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*. Прикладная Мат. и Мех., **21**, 707—713 (1957).
33. O. PERRON, *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen*, Math. Zeitschrift, **32**, 703—728 (1930).
34. R. BELLMAN, *On an Application of a Banach-Steinhaus Theorem to the Study of the Boundedness of Solutions of Nonlinear Differential and Difference Equations*. Ann. of Math., **49**, 515—522 (1948).
35. M. REGHIȘ, *Asupra stabilității neuniforme în spații generale*. Lucrările științifice ale Institutului pedagogic Timișoara, (1960), Matematică-Fizică, 153—169.
36. А. И. ЛУРЬЕ, В. Н. ПОСТНИКОВ, *Об устойчивости одного класса регулируемых систем*. Прикладная мат. и мех., **9** (1945).
37. А. И. ЛУРЬЕ, *Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования*. Гостехиздат, Москва, 1951.
38. А. М. ЛЕТОВ, *Устойчивость нелинейных регулируемых систем*. Гостехиздат, Москва, 1955.
39. В. А. ЯКУБОВИЧ, *Об устойчивости в целом невозмущенного движения для уравнений непрямого автоматического регулирования*. Вестник Ленинградского Университета, **19**. Сер. Мат. Мех. и астр. **4**, 172—176 (1957).
40. — *О нелинейных дифференциальных уравнениях систем автоматического регулирования с одним регулирующим органом*. Вестник Лен. Унив. **№ 7**, Сер. Мат. мех. астр. **2**, 120—153 (1960).
41. S. LEFSCHETZ, *An Application of the Direct Method of Liapunov*. Bol. de la Sociedad Matematica Mexicana, Sec. serie **5**, 2, 139—143 (1960).
42. V. M. ПОРОВ, *Nouveaux critères de stabilité pour les systèmes automatiques non linéaires*. Revue d'électrotechnique et d'énergétique, Acad. R.P.R., **V**, 1, 73—88 (1960).
43. В. М. ПОПОВ, *Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования*. Автоматика и Телемеханика, **XXII**, 8, 961—979 (1961).
44. В. М. ПОПОВ, *Об одном критическом случае абсолютной устойчивости*. Автоматика и Телемеханика, **XXIII** 1, 3—24 (1962).
45. — *К вопросу о практической устойчивости систем автоматического регулирования, содержащих элемент с неоднозначной нелинейностью*. Revue d'électrotechnique et d'énergétique, Acad. R.P.R., **VI**, 1, 81—101 (1959).

46. В. А. ЯКУБОВИЧ, *Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования*. Докл. АН СССР, 143, 6, 1304—1307 (1962).
47. J. L. MASSERA, *The Existence of Periodic Solutions of Systems of Differential Equations*. Duke Math. Journal, 17, 457—475 (1950).
48. А. ХАЛАНАЙ, *Почти-периодические решения нелинейных систем с малым параметром*. Журнал чистой и прикладной математики. Acad., R.P.R., I, 2, 49—60 (1956).
49. — *Периодические и почти-периодические решения систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*. Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., IV, 4, 686—691 (1959).
50. J. L. MASSERA, J. J. SCHÄFFER, *Linear Differential Equations and Functional Analysis I*. Ann. of Math., 67, 3, 517—573 (May 1958).
51. I. BARBĀLAT, A. HALANAY, *Solutions périodiques des systèmes d'équations différentielles non linéaires*. Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., III, 3, 395—411 (1958).
52. И. Г. МАЛКИН, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*. Гостехиздат, Москва, 1956.
53. Н. Н. БОГОЛЮБОВ, *О некоторых статистических методах в математической физике*. Изд. Акад. Наук Укр. ССР, 1945.
54. Н. Н. БОГОЛЮБОВ, Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Физматгиз, Москва, 1958.
55. А. HALANAY, *Solutions périodiques des systèmes non linéaires à petit paramètre*. Rendiconti dell'Accad. Naz. dei Lincei. Classe di Sci. Fis. Mat. naturali, Serie VIII, XXII, fasc. 1, 30—32 (1957).
56. И. БЕРШТЕЙН, А. ХАЛАНАЙ, *Индекс особой точки и существование периодических решений систем с малым параметром*. Докл. АН СССР, 111, 5, 923—925, (1956).
57. F. BROWDER, *On a Generalisation of the Schauder fixed-point theorem*, Duke Math. Journal, 26, 2, 291—303 (1959).
58. M. URABE, *Geometric Study of Nonlinear Autonomous System*. Funkcialaj Ekvacioj, 1, 1—84 (1958).
59. O. VEJVODA, *On the Existence and Stability of the Periodic Solution of the Second kind of a Certain Mechanical System*. Чехословацкий Мат. Журнал., 390—415. 9 (84), (1959).
60. L. CESARI, *Existence Theorems for Periodic Solutions of Non linear Lipschitzian Differential Systems and Fixed Point Theorems*. Contributions to the Theory of Non linear Oscillations, vol. V, Princeton, 1960, p. 115—172.
61. N. LEVINSON, *Small Periodic Perturbations of an Autonomous System with a Stable Orbit*. Ann. of math., 52, 727—738 (1950).
62. L. FLATTO, N. LEVINSON, *Periodic Solutions of Singularly Perturbed Equations*. Journal of math. mech., 4, 943—950 (1955).
63. J. K. HALE-G. SEIFERT, *Bounded and Almost Periodic Solutions of Singularly Perturbed Equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3, 1, 18—24 (August 1961).
64. Н. Д. АНОСОВ, *О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных*. Мат. Сборник, 50, 3, 299—334 (1960).
65. А. Д. МЫШКИС, *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951.
66. Л. Э. ЭЛЬСГОЛЬЦ, *Качественные методы в математическом анализе*. Гостехиздат, Москва, 1955.
67. А. ХАЛАНАЙ, *Некоторые качественные вопросы в теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*. Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., II, 127—144 (1957).
68. — *Теоремы устойчивости для систем с запаздывающим аргументом*. Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., III, 2, 207—216, (1958).
69. — *Критерии устойчивости для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*. Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R.,

- V, 2, 367 — 374 (1960); *Criteria de stabilitate pentru sisteme de ecuații diferențiale cu argument întârziat*. Comunicările Acad. R.P.R., **10**, 8, 635—642 (1960).
70. А. ХАЛАНАЙ, *Интегральная устойчивость в случае систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*. Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., V 3—4, 541—548 (1960); *Stabilitatea integrală la sistemele de ecuații diferențiale cu argument întârziat*. Studii și cercetări matematice, **XI**, 2, 429—438 (1961).
71. — *Условие Перрона в теории общих систем с последствием*. Mathematica **2** (25), 2, 257—267 (1960).
72. — *Inegalități diferențiale cu întârziere și o aplicație a lor la o problemă din teoria stabilității sistemelor cu întârziere*. Comunicările Acad. R.P.R., **XI**, 11, 1305—1310 (1961).
73. В. М. ПОПОВ, А. ХАЛАНАЙ, *Об устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования с запаздыванием*. Автоматика и Телемеханика, **XXIII**, 7, (1962).
74. А. HALANAY, *Solutions périodiques des systèmes linéaires à argument retardé*. C. R. Acad. Sci. Paris, **249**, 25 (1959).
75. — *Sur les systèmes d'équations différentielles linéaires à argument retardé*. C. R. Acad. Sci. Paris, **250**, 797—798 (1960).
76. — *Solutions périodiques des systèmes généraux à retardement*, C.R. Acad. Sci. Paris, **250**, 3557—3559 (1960).
77. — *Периодические решения линейных систем с запаздыванием*. Revue de math. pures et appliquées, **VI**, 1, 141—158 (1961); *Soluții periodice la sistemele liniare cu întârziere*. Studii și cercetări matematice **XII**, 2, 367—391 (1961).
78. — *Теория устойчивости линейных периодических систем с запаздыванием*. Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **VI**, 4, 633—653 (1961).
79. С. Н. ШИМАНОВ, *К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием*. Прикладная Мат. и Мех., **23**, 5, 836—844 (1959).
80. — *О почти-периодических колебаниях квазилинейных систем с запаздыванием времени в случае вырождения*. Докл. АН СССР, **133**, I, 36—39 (1960).
81. А. ХАЛАНАЙ, *Периодические решения систем с запаздыванием с малым параметром в критическом случае*. Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **VI**, 3, 487—491 (1961).
82. — *Автономные системы с запаздывающим аргументом с малым параметром*. Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **VII**, 1, 81—89 (1962).
83. С. Н. ШИМАНОВ, *Колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием*. Изв. высших учебных заведений, Радиофизика, **3**, 456—466 (1960).
84. А. ХАЛАНАЙ, *Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*. Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **VI**, 3, 467—483 (1959).
85. — *Почти-периодические решения систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*. Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **V**, 1, 75—79 (1960); *Soluții aproape-periodice la sisteme de ecuații diferențiale cu argument întârziat cu parametru mic*. Comunicările Acad. R.P.R., **XI**, 12, 1237—1242 (1959).
86. — *Асимптотическая устойчивость и малые возмущения периодических систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*. Успехи Мат. Наук, **XVII**, 1 (103), 231—233 (1962).
87. А. HALANAY, *Perturbations singulières des systèmes à retardement*. C. R. Acad. Sci. Paris, **253**, 1649—1650 (1961); *Сингулярные возмущения систем с запаздыванием*. Revue de math. pures et appliquées, Acad. R.P.R., **VII**, 2 (1962).
88. Н. Е. ВРАУ, *Elementary Properties on the Stieltjes Integral*. Ann. of math., series II, **20**, 177—186 (1918—1919).





Redactor responsabil: PETRE MOCANU  
Tehnoredactor: ION GHICA

---

*Dat la cules 03.09.1962. Bun de tipar 08.06. 1963. Apărut 1963. Tiraaj 1970 ex. Hârtie velină satinală de 63 g/m<sup>2</sup> 700×1000/16. Coli editoriale 31,34 Coli de tipar 30,25. A 02434/1962 C. Z. pentru bibliotecile mari 517.91 C.Z. pentru bibliotecile mici 517.9*

---

Întreprinderea poligrafică nr. 2, Str. Brezoianu nr. 23—25, București  
R.P.R. Comanda nr. 3902.